problemas de análisis matemático

B.P.Demidóvich

Traducido del ruso por: EMILIANO APARICIO BERNARDO

Doctor (Kandidat) en Ciencias Físico-Matemáticas por la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú, Catedrático de Universidad, Profesor Emérito de la Universidad del País Vasco

9' Edición



THOMSON

INDICE

5000 problemas de análisis matemático

Clarente Editorial Área Universitaria: Acutrão Olero Reguera

Editores de Producatón Ctara Mª de la Fuente Rojo Consuelo Garcia Asensio

Produceron Industries Susana Payon Sanchez Titulo original:

ЗАДАЧ И УПРАЖНЕННЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Traducido del ruso port Emiliano Aparicio Bernardo

Novana edición, revisada por el traductot. Impresión: CLM, Eduardo Marconi, 3, Políg. Ind. Codein. Fueniabreda (Madrid)

COPYRIGHT 5, 2002 International Thomson Editores Spain Paranunfo, S.A. 9° socion, 3° reimpression, 2003

Angallanes, 25: 28015 Madrid SSPANA Telétono 91 4463350 Fax: 91 4463350 Hentes Paraninfoles www.paraninfoles

* Editorial VAAP Mosco URSS)

impreso en España Printeo in Spain

ISBN: 84-9732-141-3 Deposito Legal: M-28.112-2003

(062/71/27)

Reservados los derechos pare todos los países de lengua espahola. De conformidad con lo dispuesto en el artículo 270 del Codigo Penal vigente, podrán sai cestigados con penas de multa y privación da Rhentad quienes reprodujeren o plaglaren, en todo o en parte, una obre literaria, artistica o científica fijada en cualquier tipo de sopone sin la preceptiva autorización. Ninguna parte de esta publicación, Incluido el diseño de la cubierta, puede set reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forms, ni por ningún medio, sea éste electrónico, químico, mecênico, electro-óptico, grabación, lotocopia o cualquier otro, sin la previa autorización escrita por perte de la Editorial.

Otras delegaciones:

Maxido, Cerrosmanica fel 1539 051-39-96 64x 1539 351-39-96 5 stendardiment apmina Stenles Sthomstiniesning com ma Mexico D 8

Puero Rico Tel: (767) 758-75-80 v 81 Pak (787) 758-75-73 thornson Peroqui nel Hate Rey

Chia Tel 1942: 501-26-42 Fax 1942: 501-26-48 Develope English press of Sanjago Costo filica EDISA Tel, Faz (500) 235-69-55 edisacci@nol recta color San José

Colombia Tel 1571) 340 94-76 Fax (571) 340 54-75 cithomson@endinel.com Sugota

Cond Sur Paraje Santa Rosa 5141 C.P.181 - Culturd de Brianos Aliez Tel. 8830 3833 1883 - 68340764 thomsom@themsorilatining.com.ar Buenos aires (Argenting)

Republics Doministral Caribbean Markering Services Tol 1809: 533-18-62 cmp@codeseling.do

Bolnia Librerus Asociedas, S.A.L. Tes. Has (591) 2246-53-09 librer (591) de 190 La Pau

Venezuela Ediciones Ramilla Tal 1982: 793-2992 y 182-29-11 Fax (582) 793-65-66 ar Uritinos@yanglobal.net Calleda Si Salvador The Bodishop, S.A. de E.V. Tel. (533) 243-70-12 Fas (501) 243-12-50 anioralis@sall.gbm her San Subador

Gusternala Yearon S.A. Tai (502) 365-01-45 Pan (502) 365-15-10 Instea, valoria com gi Gusternala

		Página
Prálogo de	traductor	9
Prólogo de	l autor a la edición española	11
	PRIMERA PARTE	
FUNC	IONES DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE	
Capítulo I	. Introducción al análisis	13
8	1. Los números reales	
60	2. Teoría de las sucesiones	19
8	3. Concepto de función	. 33
000 000 000 000 000	4. Representación gráfica de las funciones	40
ş	5. Limite de una función	53
Ş	6. Orden infinitesimal y orden de crecimiento de	
	una función. 0-simbolismo	74
000 000 000	7. Continuidad de una función	78
8	8. Función inversa. Funciones en forma paramétrica	
Š	9. Continuidad uniforme de una función	
ğ	10. Ecuaciones funcionales	94
Capítulo I	II. Cálculo diferencial de las funciones de una variable	97
40000	 Derivada de una función explícita	
	una función dada en forma implícita	
8	3. Significado geométrico de la derivada	
80	4. Diferencial de una función	
602 602 602 603 603	5. Derivadas y diferenciales de orden superior	123
Š	6. Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy	134
S	7. Crecimiento y decrecimiento de una función.	
	Desigualdades	
§	8. Sentido de la concavidad. Puntos de inflexión	
8	9. Cálculo de límites indeterminados	
507 007 100 10	10. Fórmula de Taylor	
8	11. Extremo de una función. Valores absolutos	1.00
	máximo y mínimo de una función	. 158

		Página				Págin:
9.12	Construcción de las gráficas de las funciones por un puntos característicos	163		SEGI	JNDA PARTE	- 48111
0.13	Problemas de máximos y mínimos de funciones	103		ETINOTONIO -		
	Contains de maximos y minimos de junciones	166		FUNCIONES D	E VARIAS VARIABLES	
- 100	Contacto de curvas. Círculo osculador. Evoluta	169				
8.10	Resolución aproximada de ecuaciones	172		Capítulo VI. Cálculo dife	rencial de las funciones de varias	
satisfied by	Integral Indefinida	126		variables	**************************************	317
	The Line Hellings	1/3				
9 1	Integrales indefinidas elementales	175		§ 1. Limite de una	función. Continuidad	317
5 2	integracion de funciones facionales	184		g 2. Derivadas par	Claies. Diferencial de una función	333
4 3	Integración de funciones irracionales	187		g b. Denvacion de	188 lunciones implicitae	2.20
0.4	Integración de funciones trigonométricas	191		§ 4. Cambio de va	riables	349
6. 5	Integración de diversas funciones transcendentes .	106		§ 5. Aplicaciones	geométricas	262
8.0	Diversos ejercicios de integración de funciones	196		§ 6. Fórmula de T	aylor	363
				§ 7. Extremo de u	na función de varias variables	369
sprinteriv.	Integral definida	203		3 Cadomo do d	ha tonctoff of varias variables	372
0.1	La integral deficite	203		Capitale VII Integrales		
	La integral definida como el límite de una suma	203		Capitoto vii. integrates pai	amétricas	381
9 /	Calculo de integrales definidas mediante integrales			§ 1. Integrales pro	pias paramétricas	381
	Indefinidas	208		§ 2. Integrales im	propias paramétricas. Convergencia	201
9.3	Teoremas de la media	219		uniforme de la	as integrales	207
1 3	Integrales impropias	223		8 3 Derivación e	integrales de latarelle	387
9.5	Calculo de áreas	231		baio el ciono :	integración de integrales impropias	201
9 6	Calculo de las longitudes de los arcos	235		bajo er signo i	ntegral	394
0.7	Cálculo de volúmenes	237		2 4. HILLERIAIGNERIA	manas	401
H.	Cilculo de áreas de superficies de revolución	240		g o. Formula integ	ral de Fourier	405
4 9	Calculo de momentos. Coordenadas del centro de	290				
	gravedad	241		Capitulo VIII. Integrales m	últiples y curvilíneas	409
8.10	Broblemes do marénias y 66-1-	241				
111	Problemas de mecánica y física	243		8 2 Célevis de te	les	409
9.811	Calculo aproximadao de integrales definidas	245		§ 2. Cálculo de áre	as	418
grinda V.	Series	240		8 or carento de Atti	umenes	420
		249		3 4. Catento de are	as de suderficies	422
0.30	Series numéricas. Criterios de convergencia de			g 5. Apheaciones	le las integrales dobles a la mecánica.	425
4.4	tenes de términos de signo constante	249		3 or integrates tub	les	428
0.2	Criterios de convergencia de series de términos de	20.00		§ 7. Cálculo de vol	úmenes mediante integrales triples .	433
	signo variable	262		§ 8. Aplicaciones	le las integrales triples a la mecánica	425
7 1	Operaciones con las series	260		§ 9. Integrales imp	ropias dobles y triples	436
0.4.	Series funcionales	270		§ 10. Integrales mul	tinhae	440
8.5	Series potenciales	200		8 11 Integrales min	tiples	444
6	Senes de Fourier	205		8 17 Fármula da C	ilineas	448
1 7	Sumación de caries	293		8 12. Folimula de G	reen	458
1 6	Sumación de series			a 12. Whicaclouss i	isicas de las integrales curvilíneas	463
1 2	Cálculo de integrales definidas por medio de series	304		9 14. integrales de s	uperlicie	166
7	Productos infinitos	306		§ 13. Formula de St	okes	471
8 10.	Formula de Stirling	312	1	3 IV. FORMULA de Os	Erneradski	1772
9.11.	Aproximación de las lunciones continuas			2 17 Elefticitos de	la (coria de campo	478
	mediante polinomios	313		Respuestas		491

		Página
	APENDICES	
1. 11.	Constantes principales	598 598
	Magnitudes inversas. Raíces cuadradas y cúbicas. Función exponencial Mantisas de los logaritmos decimales Logaritmos naturales Funciones hiperbólicas Facturial y funciones relacionadas con él Funciones trigonométricas Función Gamma	598 598 599 599

PROLOGO DEL TRADUCTOR

El presente libro contiene alrededor de 4.500 problemas y ejercicios de análisis matemático y abarca la gran mayoría de los temas que se estudian durante los dos primeros años en el curso de Análisis Matemático en la Facultad Mecánico-matemática de la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú, La orientación de la colección se debe al programa de análisis matemático vigente durante muchos años en esta Facultad.

El autor del libro, profesor B.P. Demidóvich, es bien conocido en España y América Latina por otro libro de problemas de 10 autores del mismo tema, revisado por el profesor B.P. Demidóvich, pero destinado ados centros de enseñanza técnica superior y de gran utilidad también para los cursos de Matemáticas Generales. Este libro ha sido reeditado

por la Editorial Paraninfo.

El libro que ahora presentamos en castellano está destinado a las especialidades de matemática y física de las Universidades y a las especialidades de Ingeniería que tienen un programa ampliado de matemática. Naturalmente, la enorme cantidad de problemas y ejercicios diversos que se proponen son suficientes para poder aprender a manejar bien las técnicas del cálculo. En la mayoría de los casos, al final del libro se da la solución. Como no conocemos en castellano colección alguna de problemas de análisis matemático tan completa, creemos que el presente libro podrá cubrir las necesidades en esta materia de las Universidades de habla hispánica. En la traducción se ha creido conveniente conservar todas las notaciones matemáticas empleadas por el autor,

La presente traducción se ha hecho de la séptima edición rusa.

Emiliano APARICIO BERNARDO

PROLOGO A LA EDICION ESPAÑOLA

La presente colección contiene gran número de problemas y ejercicios, tanto de varácter práctico como teórico, referentes al análisis matemático clásico. Está destinado a los estudiantes de los primeros cursos de las Universidades e Institutos Pedagógicos*1. Los párrafos del libro van acompañados de unas introducciones teóricas breves y de una lista de fórmulas que, no obstante, no pretenden dar una exposición sistemática de la teoría. Algunos de los enunciados de los teoremas son de carácter práctico y sólo sirven para recordar al lector los resultados principales del análisis matemático; además, se supone que ya se conocen los capítulos correspondientes de la teoría.

En la colección no figuran problemas relacionados con la topología elemental, análisis funcional, etc., puesto que en las universidades de la Unión Soviética este material se expone ordinariamente en los cursos superiores y no figura en el curso del análisis matemático.

Durante la confección de la presente colección se utilizaron parcialmente algunos tratados y guías de análisis matemático. En particular, se han tomado algunos problemas de los libros: N. M. Guiúnter y R. O. Kuzsmín: "Colección de problemas de matemática superior", 10.ª ed., Moscú-Leningrado, año 1933; R. Buck: "Advanced Calculus" (New York-Toronto-London, 1956); Dr. D. S. Mitrionovic: "Zbornik matematickih problema, I (Boegrad, 1958).

Espero que la versión castellana de la presente colección le permita al lector obtener una idea de la enseñanza del análisis matemático en las universidades de la IIRSS.

B. P. DEMIDOVICH Profesor de la Universidad de Mosců

Los Institutos Fedagógicos en La Unión Soviética son Centros de Enseñanza Superior de preparación de Profesores de Enseñanza Media.

unificultades tipográficas y para evitar errores en la refunción de las fórmulas, se ha conservado la terminoloun ain" en lugar de "san" como indicación de "seno".

Capítulo 1 INTRODUCCION AL ANALISIS.

§ 1. Los números reales

1.º Método de inducción matemática. Para demostrar que un teorema es válido para cualquier número natural n, es suficiente demostrar que: 1) el teorema es válido para n = 1, 2) si el teorema es válido para algún número natural n, entonces también es válido para el siguiente

número natural n + 1.

2.° Cortadura. Una partición del conjunto de los números racionales en dos clases A y B se llama cortadura si se cumplen las condiciones siguientes: 1) ambas clases no están vacías; 2) todo número racional pertenece a una clase y sólo a una; 3) cualquier número perteneciente a la clase A (clase inferior) es menor que cualquier número perteneciente a la clase B (clase superior). Una cortadura A/B determina: a) un número racional, si en la clase inferior A hay un número máximo o si en la clase superior B hay un número mínimo; b) un número irracional, si la clase A no posee un número máximo y la clase B no posee un número mínimo. Los números racionales e irracionales se denominan números reales.*).

3.º Valor absoluto. Si x es un número real, se llama valor absoluto |x| al número no negativo que se determina por las condiciones

siguientes:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0; \\ x, & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

Para cualesquiera números reales x e y se verifican las desigualdades:

$$|x|-|y|\leqslant |x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

4.° Extremo superior (supremo) y extremo inferior (infimo). Sea $X = \{x\}$ un conjunto acotado de números reales. El número

$$m = \inf\{x\}$$

se llama extremo inferior o infimo del conjunto X, si:

^{*)} A continuación, si no hay ningún inconveniente, el vocablo "número" significará un número real.

* Comple la designaldad

It was an appear a > 0, existe $x' \in X$ tal que

$$x' < m + \epsilon$$

In un modo similar, el número

$$M = \sup \{x\}$$

Hems as tremo superior o supremo del conjunto X_i si: A limba & C X cumple la desigualdad

$$x \leq M$$

n > 0, existe $x'' \in X$ tal que

al deministrativo de la contra del contra de la contra del la contra

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

al componto V no está acotado superiormente, se dice que

$$\sup |x| = +\infty.$$

I all a la constant de la constant manufactual que se mide, y x es el valor aproximado de esta magnitud,

$$\Delta := |x - a|$$

blama error absoluto, y

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

mama amor relativo de la magnitud que se mide.

dies que el número x tiene n cifras exactas, si el error absoluto de te palmero no excede de la mitad de una unidad del orden de la sul e ilra significativa.

A significa que el número x pertenece al conjunto X.

Problemas:

Aplicando el método de inducción matemática, demostrar que para cualquier número natural n se verifican las siguientes igualdades:

1.
$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
.

2.
$$1^{2} + 2^{2} + \dots + n^{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
.

3.
$$1^{3} + 2^{1} + \dots + n^{3} = (1 + 2 + \dots + n)^{3}$$
.
4. $1 + 2 + 2^{3} + \dots + 2^{n-1} = 2^{n} - 1$.

4.
$$1+2+2^{n}+\ldots+2^{n-1}=2^{n}-1$$

5. Sea

$$a^{(n)} = a (a - h) \dots [a - (n - 1) h] y a^{(n)} = 1.$$

Demostrar que

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)}$$

donde C_n^m es el número de combinaciones m-arias de n elementos. Deducir de aquí la fórmula del binomio de Newton.

6. Demostrar la desigualdad de Bernoulli:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \ge 1+x_1+x_2+...+x_n$$

donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son números de un mismo signo, mayores que -1. 7. Demostrar que, si x > -1, se verifica la designaldad

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \quad (n > 1),$$

donde el signo de igualdad se verifica solamente para x = 0.

8. Demostrar la desigualdad

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$
 para $n > 1$.

Indicación, Aplicar la desigualdad

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

9. Demostrar la desigualdad

$$2[.4!...(2n)! > [(n+1)!]^n$$
 para $n > 1$.

10. Demostrar la desigualdad

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot ... \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

10.1. Demostrar las desigualdades:

a)
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$
 $(n \ge 2);$

b)
$$n^{n+1} > (n+1)^n$$
 $(n \ge 3)$;

c)
$$\left| \sin \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

$$(0 \le x_k \le \pi; k = 1, 2, ..., n);$$

- d) $(2n)! < 2^{2\alpha} (n!)^2$.
- 11. Supongamos que c es un número entero positivo que no es el cuadrado exacto de un número entero, y que A/B es una cortadura que determina el número real \sqrt{c} , donde pertenecen a la clase B todos los números racionales positivos b, tales que $b^2 > c$, y a la clase A, todos los demás números racionales. Demostrar que en la clase A no hay un número máximo y en la clase B no hay un número mínimo.
- 12. La cortadura A/B que determina al número $\sqrt[3]{2}$, se forma del modo siguiente:

La clase A contiene todos los números racionales a, tales que $a^3 < 2$; la clase B contiene todos los demás números racionales. Demostrar que en la clase A no hay un número máximo y que en la clase B no hay un número mínimo.

- 13. Construyendo las cortaduras correspondientes, demostrar las igualdades:
 - a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$; b) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$.
 - 14. Construir la cortadura que determina el número $2^{\sqrt{2}}$.
- 15. Demostrar que todo conjunto numérico no vacío, que está acotado inferiormente, tiene un extremo inferior (infimo), y que todo extremo superior (supremo).
- 16. Comprobar que el conjunto de todas las fracciones racionales

m

donde m y n son números naturales y 0 < m < n, no tiene elementos mínimo y máximo. Hallar el ínfimo y el supremo de este conjunto.

17. Determinar el ínfimo y el supremo del conjunto de los números racionales r que cumplen la desigualdad

$$r^2 < 2$$
.

Sea {-x} el conjunto de los números opuestos a los números x ∈ {x}.
 Demostrar que

a) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; b) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. Sea $\{x + y\}$ el conjunto de todas las sumas x + y, donde $x \in \{x\}, y \in \{y\}$.

Demostrar las igualdades:

a) inf $\{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}$;

b) $\sup \{x + y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}$.

20. Sea $\{xy\}$ el conjunto de todos los productos xy, donde $x \in \{x\}, y \in \{y\}$, siendo $x \ge 0, y \ge 0$.

Demostrar las igualdades:

- a) $\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}$; b) $\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}$.
- 21. Demostrar las desigualdades:

a) $|x-y| \ge ||x|-|y||$;

b)
$$|x+x_1+...+x_n| \ge |x|-(|x_1|+...+|x_n|)$$
.

Resolver las desigualdades:

22.
$$|x+1| < 0.01$$
. 26. $|x+2| + |x-2| \le 12$.

23.
$$|x-2| \ge 10$$
.

27.
$$|x+2|-|x|>1$$
.

24.
$$|x| > |x+1|$$
.

28.
$$||x+1|-|x-1|<1$$
.

25.
$$|2x-1| < |x-1|$$
.

29.
$$|x(1-x)| < 0.05$$
.

30. Demostrar la identidad

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^x + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^x = x^x.$$

31. Midiendo una longitud de 10 cm, el error absoluto era de 0,5 mm; al medir una distancia de 500 km, el error absoluto era igual a 200 m. ¿Qué medición es más exacta?

11 Determinar la cantidad de cifras exactas que tiene el número

$$x = 2,3752,$$

al litiva del mismo es 1 %.

48. Ill mimero

$$x = 12,125$$

mana de la conctas. Calcular el error relativo de este número.

11 la lados de un rectángulo son iguales a

$$x = 2.50 \text{ cm} \pm 0.01 \text{ cm},$$

 $y = 4.00 \text{ cm} \pm 0.02 \text{ cm}.$

- limites está comprendida el área S de este rectángulo?

 I crror absoluto Δ y el error relativo δ del área del

 i o toman por lados sus valores medios?
- One of the control $p = 12,59 g \pm 0,01 g$ y so volumes $\nu = 3,2$. Calcular el peso específico del cuerpo y acotar los montro y relativo del peso específico, si por peso del cuerpo y mana los valores medios.
 - In the words an circulo es igual a

- o la composition de la composition del composition de la composition della composition de la composition de la composition della compositi
 - Illa la medidas de un paralelepípedo rectangular son:

$$x = 24.7 \text{ m} \pm 0.2 \text{ m},$$

 $y = 6.5 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m},$
 $z = 1.2 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}.$

- timotes está comprendido el volumen y de este paralelepípea má errores absoluto y relativo puede determinarse el voluparalelepípedo, si por medidas del mismo se toman sus
- ton que error absoluto se debe medir el lado de un cuadrado x, mande el mande el área del medir el áre
- ton que errores absolutos Δ es suficiente medir los lados x e y con una exactitud hasta de la lados no miden más de unos 10 m, aproximadamente?

40. Sean δ (x) y δ (y) los errores relativos de los números x e y, y sea δ (xy) el error relativo del número xy.

Demostrar que

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§ 2. Teoría de las sucesiones

1.º Concepto de límite de una sucesión. Se dice que el límite de la sucesión $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ es el número a (o abreviadamente, que converge hacia a), es decir,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $N = N(\epsilon)$ tal, que

$$|x_n-a| < \epsilon \text{ para } n > N$$
.

En particular, x_n se llama infinitamente pequeño, o infinitésimo, si

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

Una sucesión que carece de límite se llama divergente. 2.º Criterios de existencia de límite.

 $u_n \leq x_n \leq z_n$

У

动

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=c_1$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c.$$

2) Una sucesión monótona y acotada tiene límite.

3) Criterio de Cauchy. Para la existencia de límite de una sucesión $\{x_n\}$, es necesario y suficiente que, para cualquier *>0, exista un número N=N (*), tal que

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

para cualesquiera n > N y p > 0.

3.º Teoremas fundamentales de los límites de las sucesiones. Suponiendo que existen los límites

se tiene:

- 1) si $x_n \le y_n$, entonces $\lim_{n \to \infty} x_n \le \lim_{n \to \infty} y_n$
- $2) \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$
- 3) $\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$;
- 4) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$, si $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.
- 4.º El número e. La sucesión

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
 $(n=1, 2, ...)$

tiene un limite finito

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,718 \ 281 \ 8284 \dots$$

5.º Límite infinito. La expresión simbólica

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

denota que, cualquiera que sea el número E>0, existe un número $N=N\left(E\right) ,$ tal que

$$|x_n| > \mathbb{E}$$
 para $n > N$.

6.º Punto de acumulación. El número ξ (o el símbolo ∞) se llama límite parcial (o punto de acumulación) de una sucesión x_n (n = 1, 2, ...), si existe una subsucesión (o sucesión parcial)

$$\label{eq:p1} \begin{subarray}{l} \begin{sub$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_A} = \xi.$$

Toda sucesión acotada tiene al menos un límite parcial finito (principio de Bolzano-Weierstrass). Si este límite parcial es único, entonces, éste es el límite finito de la sucesión dada,

El límite parcial mínimo (finito o infinito) de la sucesión x_n

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

se llama límite inferior, y el límite parcial máximo

límite superior. La igualdad

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

es condición necesaria y suficiente para la existencia de límite (finito o infinito) de la sucesión x_n .

Problemas:

41. Sea

$$x_n = \frac{n}{n+1}$$
 (n = 1, 2, ...).

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

hallando para cada $\epsilon > 0$ un número $N = N(\epsilon)$, tal que

$$|x_n-1| < \varepsilon_1$$
 para $n > N$.

Rellenar la tabla siguiente:

Ė	0,1	0,0.1	0,001	0,0001	
N					

42. Demostrar que x_n (n = 1, 2, ...) es infinitamente pequeña (o seu que tiene límite, igual a 0), indicando, para cualquier $\epsilon > 0$, un número N = N (c) tal que sea $|x_n| < \epsilon$ para n > N, si

a)
$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
; c) $x_n = \frac{1}{n!}$;

b)
$$x_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$$
; d) $x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n$.

i abla que se da a continuación en cada uno de estos casos;

8	0,1	0.001	0,0001	
N				

I mustrar que las sucesiones

• " (-1)" n, b)
$$x_n = 2^{V_n}$$
, c) $x_n = |g| (|g|n) (n \ge 2)$

 i' infinito cuando n → ∞ (o sea, que son infinitamente infin tas), hallando, para cualquier E>0, un número Here we sea $|x_n| > E$ para n > N.

. In libla que se da a continuación en cada uno de estos casos:

1 1	10	100	1000	Ó 090	
1 1		1			

an que

$$x_n \rightarrow n^{(n-1)^n} \quad \langle n-1, 2, \ldots \rangle$$

. . Ind., a pesar de que no es infinitamente grande cuando

to the the mediante designaldades, las signientes afirmaciones.

$$0 \lim_{n \to \infty} x_n = \infty; \quad b) \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty; \quad c) \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty.$$

to par n recorre la sucesión natural de números, calcular It's guientes expresiones

48.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin nt}{n+1}$$
.
49. $\lim_{n \to \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

$$= (1 + 1 - \sqrt{n}).$$

49.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+2}}$$

51.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$
.

51.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$
.
52. $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right|$.

53.
$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^n}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^n}{n^n} \right]$$
.

$$54. \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1^3}{n^2} + \frac{3^3}{n^2} + \cdots + \frac{(2n-1)^3}{n^3} \right].$$

55.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^n} + \frac{5}{2^n} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$$
.

56.
$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$
.

57.
$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2}, ... \sqrt[3^n]{2}).$$

Demostrar las siguientes igualdades.

$$58. \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

58.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$
. 63. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$). 59. $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. 64. $\lim_{n \to \infty} \frac{\log_n n}{n} = 0$ ($a > 1$).

59.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

64.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log_n n}{n} = 0 \ (a > 1)$$

60.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{a^n} = 0 \ (a > 1)$$
; 65. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
61. $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. 66. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

65. .im
$$\sqrt[n]{n} = 1$$

$$61. \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

66.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n/n!} = 0$$

62.
$$\lim_{n\to\infty} nq^n = 0$$
, si $|q| < 1$.

67. ¿Qué expresión es mayor para valores suficientemente grandes de n

68. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

Indicación, Véase el ejercicio 10.

69. Demostrar que la sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, ...)$$

2 TEORIA DE LAS SUCESIONES

nonótona creciente y está acotada superiormente, mientras que la

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, ...)$$

monôtona decreciente y está acotada inferiormente. Deducir de esto e estas sucesiones tienen un límite común

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = e.$$

nd.cación Formar las razones $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ y aplicar la desigualdad

70. Demostrar que

$$0 < e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} (n = 1, 2, ...)$$

ra qué valores del exponente n la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diferirá del

1. Sea p_n (n-1, 2, ...) una sucesión arbitrana de números que ie hacia $+\infty$, y sea q_n (n-1, 2, ...) una sucesión arbitraria de eros que tiende hacia $\infty(p_n, q_n \in [-1, 0])$ Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\rho_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

2. Sabiendo que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

ostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{n1}\right) = e.$$

educir de aquí la fórmula

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$$

 $\varepsilon \ 0 < \theta_n < 1$, y calcular el número e con una exactitud hasta

- Demostrar que el número ε es irracional.
- . Demostrar la desigualdad

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < v \left(\frac{n}{2}\right)^n$$
.

75. Demostrar las desigualdades:

a)
$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$
,

donde n es un número natural arbitrario:

b)
$$1 + \alpha < e^{\alpha}$$
,

donde \alpha es un número real, distinto de cero.

76. Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \qquad (a > 0),$$

donde în a es el logaritmo del número a de base e = 2,718...

Aplicando el teorema de la existencia de límite de una sucesión monótona y acotada, demostrar la convergencia de las siguientes suce-

77.
$$x_n = p_0 + \frac{\rho_1}{10} + \dots + \frac{\rho_n}{10^n}$$
 $(n = 1, 2, \dots),$

donde p_i (i = 0, 1, 2, ...) son números enteros no negativos, no superiores a 9, comenzando desde p_1 .

78.
$$x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3}, \quad \frac{n+9}{2n-1}.$$

79.
$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right), \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

80
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

81.
$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}, \dots$$

Aplicando el criterio de Cauchy, demostrar la convergencia de las signientes sucesiones.

82.
$$x_n = a_0 + a_1 q + ... + a_n q^n$$
,

donde

$$_{i}a_{k}[< M(k=0, 1, 2, ...) y |q| < 1.$$

83.
$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$$
.

84.
$$x_n = \frac{\cos 11}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 21}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$$
.

85,
$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^n} + \dots + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}$$

. 1 . 1. Aplicar la designaldad

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
 $(n = 2, 3, ...)$

 x_n (n=1, 2, ...) se dice que es de variación acotatr an número C tal que

$$|x_n - x_n| + |x_n - x_n| + \dots + |x_n - x_{n-1}| < C \quad (n = 2, 3, \dots).$$

 que una sucesión de variación acotada es convergente. remplo de una sucesión convergente que no sea de variación

1 e n e qué significa que para una sucesión dada no se venfica · · · · le Cauchy.

v, houndo el criterio de Cauchy, demostrar que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

1, 1 1 1

1) It is the que, si una succesión x_n (n = 1, 2, ...) es convergente, nalquier subsucesión de la misma x_{p_n} también es convergente sur limite

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

- 1) indrar que una sucesión monótona es convergente, si es ilgana subsucesión de la misma.
- O D jostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

at ., +a, ¿qué se puede afirmar respecto del límite

- 11 1) : matrar que una sucesión numérica convergente es acotada.
- 1 conntrar que una sucesión numérica convergente, o bien alcanquu o, o bien alcanza el ínfimo, o bien el uno y el otro Dar I a concesiones de los tres tipos.
- 15 mustrar que una sucesión numérica x_n (n = 1, 2, ...) que tien-. . ., necesariamente alcanza el infimo.

Hallar el término máximo de la sucesión x_n (n = 1, 2, ...), si

96.
$$x_n = \frac{n^2}{\sqrt{n}}$$
. 97. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}$. 98. $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

Hallar el térm no mínimo de la sucesión x_n (n = 1, 2, ...), si

99.
$$x_n = n^2 - 9n - 100$$
. 100 . $x_n = n + \frac{100}{n}$.

Para la sucesión x_n (n = 1, 2, ...), hallar inf x_n , sup x_n

$$\lim_{n\to\infty}x_n \quad \text{y} \quad \overline{\lim} \ x_n \quad \text{si:} \quad$$

101.
$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$
.

102.
$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$
.

101 1.
$$x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$$
.

103.
$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$
.

104.
$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
.

.05.
$$x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$$
. 108. $x_n = n^{(-1)^q}$.

108.
$$x_n = n^{(-1)^q}$$

$$106. x_n = (-1)^n n$$

106.
$$x_n = (-1)^n n$$
 109. $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$.

107
$$x_n = n[2 + (-1)^n]$$
 110 $x_n = \frac{1}{n-10.2}$.

110
$$x_n = \frac{1}{n-10.2}$$

Hallar

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} x_n,$$

51.

111.
$$x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}$$
. 114. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n-1/2}}$.

114.
$$x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot 1^n}$$

112
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$$
, 115. $x_n = \cos^n\frac{2n\pi}{3}$.

113.
$$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}$$
.

Hallar los límites parciales de las siguientes sucesiones:

116.
$$\frac{1}{2}$$
, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, $\frac{2^n}{2^n}$, ...

117. 1,
$$\frac{1}{2}$$
, $1 + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $1 + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $1 + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ..., $\frac{1}{n}$, $1 + \frac{1}{n}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, ..., $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, ...

$$118, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \dots$$

119.
$$x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$$
.

120.
$$z_n = \frac{1}{2} [(a+b) + (-1)^n (a-b)].$$

121 Dar un ejemplo de una sucesión numérica cuyos límites parciales sean unos números dados

$$a_1, a_3, \ldots, a_p$$

122 Dar un ejemplo de una sucesión numérica para la cual, todos los términos de una sucesión numérica dada

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \dots, \ \alpha_n \ \dots$$

sean sus límites parciales. ¿Qué límites parciales más tiene necesariamente la sucesión construida?

123. Dar un ejemplo de sucesión que.

a) no tenga limites parciales finitos;

b) tenga un tímite parcial finito único, pero que no sea convergente,

c) tenga un conjunto infinito de límites parciales;

d) tenga como límite parcial cualquier número real

124. Demostrar que las sucesiones x_n e $y_n = x_n \sqrt{n}$ (n = 1, 2, ...) tienen unos mismos límites parciales.

125. Demostrar que de una sucesión acotada x_n (n=1, 2, ...) siempre se puede extraer una subsucesión convergente x_{p_n} (n=1, 2, ...).

126. Demostrar que, si una sucesión x_n (n = 1, 2, ...) no está acotada, entonces existe una subsucesión x_{p_n} tal, que

$$\lim_{n\to\infty}x_{p_n}=\infty.$$

127. Supongamos que la sucesión x_n (n=1, 2, ...) es convergente y que la sucesión y_n (n=1, 2, ...) es divergente. Qué se puede afirmar respecto de la convergencia de las sucesiones

a)
$$x_n + y_n$$
; b) $x_n y_n$?

Poner ejemplos correspondientes.

128. Supongamos que las sucesiones $x_n \in y_n$ (n = 1, 2, ...) son divergentes. ¿Se puede afirmar que las sucesiones

a)
$$x_n + y_n$$
; b) $x_n y_n$

también son divergentes?

Poner ejemplos correspondientes.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

y sea y_n (n=1, 2, ...) una sucesión arbitraria. ¿Se puede afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0?$$

Poner ejemplos correspondientes.

130. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Les deduce de aquí que, o bien $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, o bien $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$? Examinar el ejemplo: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ (n=1, 2, ...).

131. Demostrar que

У

a)
$$\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

Poner ejemplos para los cuales en estas relaciones se venfiquen las desigualdades estrictas.

132. Supongamos que $x_n \ge 0$ e $y_n \ge 0$ (n = 1, 2, ...). Demostrar que

a)
$$\lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} y_n \le \lim_{n \to \infty} (x_n)_n \le \lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} y_n$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

Poner ejemplos para los cuales en estas relaciones se venfiquen las desigualdades estrictas.

133. Demostrar que, si existe $\lim_{n\to\infty} x_n$, entonces, para cualquier sucesión y_n (n=1, 2, ...), se tiene

a)
$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

b)
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_ny_n) := \lim_{n\to\infty}x_n\cdot \overline{\lim}_{n\to\infty}y_n(x_n\geqslant 0).$$

114 Demostrar que, si para una sucesión x_n (n-1, 2, ...) y para injuier sucesión y_n (n-1, 2, ...), se venifica al menos una de las a dades:

a)
$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

1 1293

b)
$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \quad (x_n \ge 0),$$

csióπ x_n es convergente.

1.15. Demostrar que, si $x_n > 0$ (n = 1, 2, ...) y

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

un estón xn es convergente.

1 so. Demostrar que, si la sucesión x_n (n = 1, 2.) está acotada y

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0,$$

n ces los límites parciales de esta sucesión están situados densamen-

$$l = \lim_{n \to \infty} x_n$$
 y $L = \lim_{n \to \infty} x_n$

n Jada número del segmento [l, L] es un límite parcial de la

147 Supongamos que la sucesión numérica x_1, x_2, \dots, x_n , ... cumple n luión

$$0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, ...).$$

• I restrar que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ •

Demostrar que, si la sucesión x_n (n = 1, 2, ...) es convergente, la non de las medias aritméticas

$$\xi_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

born es convergente y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

o te, spioco no es justo. Poner un ejemplo.

139. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. Demostrar que, si la sucesión x_n (n-1, 2, ...) es convergente y $x_n > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

141. Demostrar que, si $x_n > 0$ (n = 1, 2, ...), entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n},$$

suponiendo que el límite que figura en el segundo miembro existe.

142. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

143. Demostrar el teorema de Stolz: si

a)
$$y_{n+1} > y_n (n=1, 2, ...);$$
 b) $\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$,

c) existe
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$
.

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

144. Calcular

a)
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{a^n} (a > 1)$$
; b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lg n}{n}$.

145. Demostrar que, si p es un número natural, se tiene

a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$
.

b)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}$$
,

c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}$$
.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

es convergente

Por lo tanto, se venfica la fórmula

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_m$$

donde C = 0,577216... es la llamada constante de Euler y $s_n \to 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

147. Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

148. La sucesión de números x_n (n = 1, 2, ...) se determina por las siguientes fórmulas:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$
 $(n = 3, 4, ...)$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

149. Sea v_n (n+1, 2, ...) una succesión de números, detir da por la siguiente fórmula

$$x_0 > 0$$
 $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} \frac{1}{x_n}$ $x_n = 0, 1, 1, \dots, n$

Den ostrar que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

150. Demostrar que las sucesiones $x_n \in y_n$ (n = 1, 2, ...), definidas por las siguientes fórmulas

$$x_1 = a$$
, $y_1 = b$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$,

tienen un limite común

$$\mu (a, b) = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n$$

(la media aritmético-geomètrica de los números a y b).

To Concepto de función. La vanable y se ilama función uniforme f de la variable x en un campo dado de variación $X = \{x \in S | x \in S \}$ valor $x \in X$ se ha puesto en correspondencia un valor real determinado y = f(x), perteneciente a cierto conjunto $Y = \{y\}$.

El conjunto X se denomina campo de definición o campo de existen cia de la función f(x), Y se llama conjunto de valores de esta i income En os casos más simples, el conjunto X representa o un intervablento (intervalo) (a, b) a < x < b, o los intervalos semiablentos (a, b) a < x < b, o un intervalo cerrado (segmento) [a, b] $a \le x \le b$, donde $a \ y \ b$ son unos números reales o bien, los simbolo $-\infty y + \infty$ (en este caso se excluyen las igualdades).

 S_1 a cada valor x de X le corresponde uno o varios valores de y = f(x), entonces y se llama función multiforme de x.

2° l'unción inversa. Si se entiende por x cualquier valor que satisfia ga a la ecuación

$$f(x) = y$$
,

donde y es un número fijo, perteneciente al conjunto de valores Y de la función f(x), entonces, generalmente, esta correspondencia determina en el conjunto Y, una función multiforme

$$x = f^{-1}(y),$$

denominade with confrespecto a la función f(x). Si la función y = f(x) es michotor a en sentido estricto, es decir, $f(x_0) > f(x_1)$ (o, respectivamente, $f(x_0) < f(x_1)$) para $x_0 > x_1$, entonces la función inversa $x = f^{-1}$ (y) es uniforme y monótona en el mismo sentido.

Problemas:

Determinar los campos de existencia de las siguientes funciones:

151.
$$y = \frac{x^2}{1 + x}$$
.

152.
$$y = \sqrt{3x - x^3}$$
.

153.
$$y = (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
.

154. a)
$$y = \log(x^2 - 4)$$
;

b)
$$y = \log(x+2) + \log(x-2)$$
.

155.
$$y = V \sin(\sqrt{x})$$
.

156.
$$y = \sqrt{\cos x^2}$$
.

157.
$$y = \lg \left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$
.

$$158. \ y = \frac{\sqrt{x}}{\sin xx}.$$

159.
$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$$
.

160.
$$y = \arccos(2 \sin x)$$
.

161.
$$y = \lg [\cos (\lg x)].$$

162.
$$y=(x+|x|)\sqrt{x \sin^2 nx}$$
.

163.
$$y = \operatorname{cig} \pi x + \operatorname{arccos}(2^{x})$$

165. y = (2x)

165.3. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ $166.1. y = \log_{2} \log_{3} \log_{4} x_{1}$

Determinar los campos de existencia y los conjuntos de valores de las quientes funciones

168.
$$y = \sqrt{2 + x - x^2}$$
.

169.
$$y = \arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$$
.

.67.
$$y = 1g(1 - 2\cos x)$$

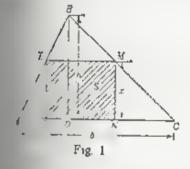
170.
$$y = (-1)^x$$

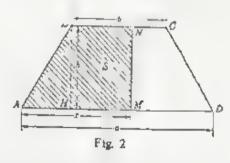
168.
$$y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$$
.

171. En el triángulo ABC (fig. 1), cuya base AC=b y su altura 111 - h, está insento un rectángulo KLMN, cuya altura es NM - x. 1 1/16 ml el perímetro P del rectángulo KLMN y su área S en función de

onstruir las gráficas de las funciones P = P(x) y S = S(x).

172. En el triángulo ABC, el lado AB = 6 cm, el lado AC = 8 cm y el 1... BAC = x. Expresar BC = a y el area ABC = S en función de la . ble x. Construir las gráficas de las funciones a = a(x) y S = S(x).





71. En un trapecio isósceles ABCD (fig. 2), cuyas bases son AD = a $b \ (a > b)$, y .a altura es HB = h, está trazada una recta $MN \parallel HB$ usa a la distancia AM = x del vértice A Expresar el área S de la u ABNMA en función de la variable x Construir la gráfica de " neión S = S(x).

1 '4. En el segmento $0 \le x \le 1$ del eje 0x está distribuída uniforme-. ... Ina masa, igual a 2 g, y en los puntos x = 2 y x = 3 de este eje un atuadas masas concentradas de 1 g cada una. Formar la expresión i lica de la función m=m(x) $(-\infty < x < +\infty)$, cuyo valor numéris igual a la masa situada en el intervalo (- - x), y construir la i a de esta función.

175. La función y = sgn x se define del modo siguiente.

$$sgn x = \begin{cases} -1, s_1 x < 0; \\ 0, s_1 x = 0; \\ 1, s_1 x > 0. \end{cases}$$

Construir la gráfica de esta función. Venficar que

$$|x| = x \operatorname{sgn} x$$
.

176. La función y = [x] (la parte entera del número x) se define del modo sigu ente:

Si x = n + r, donde n es un número entero y $0 \le r < 1$, entonces

Construir la gráfica de esta función

177. Supongamos que

$$y = \pi(x)$$
 $(x \ge 0)$

denota la cantidad de números primos que no son superiores al número x. Construir la gráfica de esta función para los valores del argumento $0 \le x \le 20$.

¿En qué conjunto E_y transforma la función y = f(x) el conjunto E_x .

178.
$$y = x^2$$
, $E_x = \{-1 \le x \le 2\}$.
179. $y = \lg x$, $E_x = \{10 < x < 1000\}$.

180.
$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcetg} x$$
, $E_x = \{-\infty < x < -\infty\}$.

181.
$$y = \text{ctg} \frac{\pi x}{4}$$
, $E_x = \{0 < x \} < 1\}$

182.
$$y = |x|$$
, $E_x = \{1 \le x, \le 2\}$.

La variable x recorre el intervalo 0 < x < 1. ¿Qué conjunto recorre la variable v. si

183.
$$y = a + (b - a)x$$
, 186. $y = \sqrt{x - x^2}$.

184.
$$y = \frac{1}{1-x}$$
. 187. $y = \cos \pi x$.

185.
$$y = \frac{x}{2x - 1}$$
. 188. $y = x + [2x]$.

189. Calcular
$$f(0)$$
, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, so
$$f(x) = x^4 - 6x^4 + 11x^4 - 6x$$
,

191. Calc at f(0,9), f(0,99), f(0,999), f(1), si f(x) = 1 + [x].

192. Calcular $f \leftarrow 2$, $f \leftarrow 1$, f (0), f (1), f (2), si

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{para } -\infty < x \le 0, \\ 2^x & \text{para } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

193. Calcular f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, $f(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{f(x)}$,

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

194. Hallarios valores de x, para los cuales: 1) f(x) = 0; 2) f(x) > 0;

a)
$$f(x) = x - x^{4}$$
; b) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$; c) $f(x) = (x + |x|) (1 - x)$.

195. Hallar

sì

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

St a) f(x) = ax + b; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = a^x$. 196. Sea

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Verificar que

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x) \equiv 0.$$

197. Hallar una función lineal entera

$$f(x) = ax + b$$

sif(0) - 2 y f(3) = 5

¿A qué son iguales f(1) y f(2) (interpolación lineal)?

198. Haliar una función racional entera de segundo grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + \varepsilon,$$

5)

$$f(-2)=0$$
, $f(0)=1$, $f(1)=5$.

 $_{6}$ A qué son iguales f(-1) y f(0,5) (interpolación cuadrática)?

199. Hall run the mortasional enter de te er grado

$$f(x)=ax^{n}-bx^{n}\mid_{[0,1,\dots,n]}$$

Sİ

$$f(-1)=0$$
, $f(0)=2$, $f(1)=3$, $f(2)=5$.

200. Hallar una función de la forma

$$f(x) = a + bc^x$$

si

$$f(0) = 15$$
, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

201. Demostrar que, si para una función lineal

$$f(x) = ax + b$$

los valores del argumento $x = x_n$ (n = 1, 2, ...) forman una progresión aritmética, entonces los valores correspondientes de la función $y_n = f(x_n)$ (n = 1, 2, ...) también forman una progresión aritmética.

202. Demostrar que, si para la función exponencial

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

los idores del argumento $x = x_n$ (n = 1, 2, ...) forman una progresión aratriética, entonces los valores correspondientes de la funcion \mathcal{D}_n $f(x_n)$ (n = 1, 2, ...) forman una progresión geométrica.

233. Sea f(u) una función definida para 0 < u < 1. Hallar los campos de definición de las funciones:

a)
$$f(\sin x)$$
; b) $f(\ln x)$; c) $f(\frac{(x)}{x})$.

204. Sea.

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$$
 $(a > 0).$

Verificar que

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x) f(y)$$

205. Supongamos que

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

Determinar z, si

a)
$$f(x) = ax$$
; c) $f(x) = arctg x$ (|x|<1);

b)
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
; d) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$.

Hallar $\varphi[\varphi(x)], \psi[\psi(x)], \varphi[\psi(x)] y \psi[\varphi(x)]$, si 206. $\varphi(x) = x^2 y \psi(x) = 2^x$.

(1)
$$(x) = \operatorname{sgn} x y \psi(x) = \frac{1}{x}$$
.

Hadar f(f(x)), $f\{f(f(x))\}$, si

$$f(x) = \frac{1}{1 - x},$$

RF Sca

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdot, f(x)))}_{n \text{ veces}}.$$

of a office (t), SI

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f(x+1)=x^2-3x+2$$

f' Hullar f(x), si

$$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2} \ (x \ge 2).$$

11 Hallar f(x), si

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2} \quad (x > 0).$$

"11.1. Haliar f(x), si

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^3,$$

strar que las funciones que siguen a continuación, son monóto-. , icutes en los intervalos indicados

$$J \mid 1 \mid f(x) = x^2$$

$$HS \quad f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \sin x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

Alto,
$$f(x) = \lg x$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

117.
$$f(x) = 2x + \sin x$$

I' mostrar que las funciones que siguen a continuación, son monótocon les recientes en los intervalos indicados.

218.
$$f(x) = x^3 (-\infty < x \le 0)$$
. 219. $f(x) = \cos x (0 \le x \le \pi)$.

219.
$$f(x) = \cos x (0 \le x \le \pi)$$

120.
$$f(x) = \operatorname{ctg} x$$
 (0 < $x < \pi$).

221. Avenguar si son monétonas las siguientes funciones:

a)
$$f(x) = ax + b$$

a)
$$f(x) = ax + b$$
; d) $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$;

b)
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
, e) $f(x) = a^x$ (a > 0).

e)
$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

c)
$$f(x) = x^3$$
;

222. ¿Es posible pasar a logantmos en una desigualdad?

223. Sean $\phi(x)$, $\psi(x)$ y f(x) unas funciones monótonas crecientes. Demostrar que, si

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

entonces

$$\varphi \left[\varphi \left(x\right) \right] \leqslant f\left[f(x)\right] \leqslant \psi \left[\psi \left(x\right) \right] .$$

Determinar la función inversa $x = \varphi(y)$ y su campo de existencia, si

224.
$$y=2x+3 \ (-\infty < x < +\infty)$$
.

225.
$$v = x^2$$

225.
$$y=x^2$$
; a) $-\infty < x \le 0$; b) $0 \le x < +\infty$.

$$0 \le x < +\infty$$

226.
$$y = \frac{1-x}{1-x}$$
 $(x \neq -1)$.

227.
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$
; a) $-1 \le x \le 0$; b) $0 \le x \le 1$.

$$a) -1 \leqslant x \leqslant 0;$$

$$) \ 0 \le x \le 1.$$

228.
$$y = \sinh x$$
, donde $\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ $(-\infty < x < +\infty)$.

229.
$$y = \text{th } x$$
, donde th $x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

230.

$$y = \begin{cases} x_1 & \text{si} & -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{si} & 1 \le x \le 4; \\ 2^x, & \text{si} & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. Una función f(x), definida en un intervalo simétrico (-1, 1), se Llama par, 51

$$f(-x) = f(x)$$

e impar, si

$$f(-x) = -f(x).$$

Determinar cuáles de las funciones dadas f (x) son pares y cuáles son impares.

a)
$$f(x) = 3x - x^4$$
;

d)
$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$
;

b)
$$f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2 + \sqrt[9]{(1+x)^9}}$$
; e) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^8})$.

e)
$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

c)
$$f(x) = a^x + a^{-x}$$
 $(a > 0)$:

232. Demostrar que toda función f(x), definida en un intervalo simétrico (- 1, 1), puede expresarse como la suma de una función par y una función impar.

233. Una función f(x), definida en un conjunto E, se llama periódica, si existe un número T>0 (período de la función, en sentido amplio) tal que

$$f(x \pm T) = f(x)$$
 para $x \in E$.

Avenguar cuales de las funciones dadas son periódicas, y hallar sus períodos mín.mos. si

- a) $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$;
- b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 3x$
- c) $f(x) = 2 \lg \frac{x}{2} 3 \lg \frac{x}{3}$; f) $f(x) = \sqrt{\lg x}$

- d) $f(x) = \sin^2 x$; g) $f(x) = \tan^2 x$;
- c) $f(x) = \sin x^2$
- h) $f(x) = \sin x + \sin (x \sqrt{2})$.
- 234, Demostrar que la función de Dirichiet

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

qualquier número racional es un período.

235. Demostrar que la suma y el producto de dos funciones periódicas, que están definidas en un conjunto común y cuyos períodos son conmensurables, también son funciones penódicas.

235.1. Una función f(x) se llama antipenódica, si

$$f(x+T) \equiv -f(x)$$
 $(T>0)$.

Demostrar que f(x) es periódica, de período 2I.

236. Demostrar que, si para una función f(x) $(-\infty < x < +\infty)$ se venfica la igualdad f(x + T) = kf(x), donde k y T son constantes positivas, entonces $f(x) = a^x \varphi(x)$, donde a es una constante y $\varphi(x)$ es una función penódica de período T.

§ 4. Representación gráfica de las funciones

1,° Para la construcción de la gráfica de una función y = f(x) se procede del modo siguiente: 1) se determina el campo de existencia de la función X = {x}; 2) se toma en X una red suficientemente densa de valores del argumento $x_1, x_2, ..., x_n$ y se forma la tabla de los valores correspondientes de la función

$$y_i = f(x_i)$$
 $(i = 1, 2, ..., n)$

3) se marcan los puntos $M_i(x_i, y_i)$ (i = 1, 2, ..., n) en el plano de coordenadas Oxy y se unen éstos mediante líneas, de modo que su comportamiento concuerde con la posición de los puntos intermedios.

2.º Para obtener una gráfica perfecta de la función, se deben estudiar

las propiedades generales de la misma,

En primer lugar, es necesario 1) una vez resuelta la ecuación f(x) = 0, hay que hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje Ox (los ceros de la función); 2) determ.nar las regiones de variación del argumento, en las cuales la función sea positiva o negativa, 3) si es posible, averiguar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función (en los cuales la función es morótona), 4) estudiar el comportamiento de la funcion cuando el argumento se aproxima indefinidamente a los puntos de la frontera del campo de existencia de la función.

En este párrafo se supone que el lector conoce las propiedades de las funciones elementales más simples la función potencial, expenencial,

funciones trigonometricas, etc.

Aplicando estas propiedades se puede obtener inmediatamente el diseño de la gráfica para muchas funciones, sin tener que realizar para ello grandes cálculos. A veces se consigue reducir otras graficas a combinaciones (suma o producto, etc.) de estas gráficas elementales.

Problemas:

237. Construir la gráfica de la función lineal homogénea

para
$$a=0; \frac{1}{2}; 1, 2, -1$$

238. Construir la gráfica de la función lineal

$$y=x+b$$

para b = 0, 1, 2, -1.

239. Construir las gráficas de las funciones lineales:

a)
$$y=2x+3$$
; b) $y=2-0.1x$; c) $y=-\frac{x}{2}-1$.

240. El coeficiente térmico de dilatación lineal del hierro es α = 1,2 · 10 °. Construir en una escala conveniente la gráfica de la función ,

$$l = f(T)$$
 $(-40^{\circ} \leqslant T \leqslant 100^{\circ}), :$

4. REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES

1 • T es la temperatura en grados y l es a longitud de la vanilla de l • a la temperatura T, si l = 100 cm para $T = 0^{\circ}$.

141. Sobre el eje numérico se mueven dos puntos materiales. En el numero de contente el primer punto estaba situado a 20 m a la izquierda del m en de coordenadas y llevaba la velocidad $v_1 = 10 \text{ m/s}$; en el mismo mate t = 0, el segundo punto estaba situado a 30 m a la derecha del 0 y llevaba la velocidad $v_2 = -20 \text{ m/s}$. Construir las gráficas de cuaciones de los movimientos de estos puntos y hallar el tiempo y pur de su encuentro.

'42. Construir las gráficas de las funciones racionales enteras de 2º do (parábolas):

$$a + ax^2$$
 para $a = 1, \frac{1}{2}, 2, 1,$

$$1 + v = x - x_0)^2 \operatorname{para} x_0 = 0, 1, 2, -1,$$

$$x + x^{\varepsilon} + c$$
 para $\epsilon = 0, 1, 2, -1$

213 Construir la gráfica del trinomio cuadrático

$$y = ax^2 + bc + c$$

I ir ndolo a la forma

$$y = y_0 + a (x - x_0)^2$$

Los unar los ejemplos

$$y = -x^2 + 2x + 1$$
,
 $y = -x^2 + 2x + 1$,
 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

'44. Un punto material ha sido lanzado bajo el ángulo $\alpha = 45^{\circ}$ ' o del plano del horizonte y con la velocidad inicial $\nu_0 = 600$ m/s. nulr la gráfica de la trayectoria del movimiento y calcular la altura y el alcance horizontal (considerar aproximadamente 0 m/s^2 ; se desprecia la resistencia del aire).

nstruir las gráficas de las funciones racionales enteras de grado

2.5.
$$y = x^3 + 1$$
.
2.6. $y = x^4 - x^4$
2.6. $y = (1 - x^3)(2 + x)$.
2.7. $y = x^4 - x^4$
2.8. $y = x(a - x)^3(a + x)^3(a > 0)$.

 struir las gráficas de las funciones lineales fraccionarias (funcionomográficas; hipérbolas);

110.
$$y = \frac{1}{x}$$
. 250. $y = \frac{1-x}{1+x}$.

251. Construir la gráfica de la función homográfica

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad - bc \neq 0, c \neq 0),$$

reduciéndola a la forma

$$y = y_+ + \frac{m}{x - x_0}.$$

Examinar el ejemplo

$$y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$$
.

252. Un gas a la presión $p_0 = 1$ atm ocupa un volumen $v_0 = 12 \text{ m}^3$. Construir la gráfica de la variación del volumen v del gas en función de la presión p, si la temperatura del gas permanece constante (ley de Boyle-Manotte).

Construir las gráficas de las funciones racionales fraccionarias:

253.
$$y = x + \frac{1}{x}$$
 (hipérbola).

254.
$$y = x^4 + \frac{1}{x}$$
 (Tridente de Newton).

255.
$$y=x+\frac{1}{x^2}$$
. 256. $y=\frac{1}{1+x^3}$ (curva de Agnesi).

257.
$$y = \frac{2x}{1 + x^2}$$
 (serpenting de Newton)

258.
$$y = \frac{1}{1-x^2}$$
.
261. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{1-x}$.
262. $y = \frac{x+1(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

260.
$$y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}$$

263. Construir el diseño de la gráfica de la funcion

$$y = \frac{ax^{2} + bx + c}{a_{1}x + b_{3}} \quad (a_{1} \neq 0),$$

reduciéndola a la forma

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}$$

Examinar el ejemplo

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

264. Construir la gráfica del valor absoluto de la fuerza de atracción F de un punto material que está situado a la distancia x del centro de atracción, si F = 10 kg para x = 1 m (ley de Newton).

265. Según la ley de Van der Waals, el volumen v de un gas real y su presión p, a una temperatura constante, están ligados por la relación

$$\left(\rho - \frac{a}{1-\frac{a}{a^2}}\right) (a - b) = \varepsilon.$$

Construir la gráfica de la función p = p(v), si a = 2, b = 0,1 y c = 10. Construir las gráficas de las funciones irracionales

266.
$$y = \pm \sqrt{-x-2}$$
 (parábola).

267.
$$y = \pm x \sqrt{x}$$
 (parábola de Neil).

268.
$$y = \pm \frac{1}{2} V 100 - x^*$$
 (elipse).

269,
$$y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$
 (hipérbola).

270.
$$y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
 271. $y = \pm x \sqrt{100-x^2}$.

272.
$$y = \pm z \sqrt{\frac{z}{1-z}}$$
 (cisoide).

273.
$$y = + \sqrt{(x^2 - 1)(9 - x^2)}$$
.

274. Construir la gráfica de la función potencial

$$y = x^a$$

para: a) n = 1, 3, 5; b) n = 2, 4, 6.

275. Construir la gráfica de la función potencial

$$y = x^n$$

para: a)
$$n = -1$$
, -3 ; b) $n \approx -2$, -4 .

276. Construir la gráfica del radical

$$y = \sqrt[n]{x}$$

para: a) m = 2, 4; b) m = 3, 5,

277. Construir la gráfica del radical

si a)
$$m=2, k=1$$
; e) $m=3, k=4$;

b)
$$m=2, k=3;$$
 f) $m=4, k=2;$

c)
$$m = 3$$
, $k = 1$; g) $m = 4$, $k = 3$; d) $m = 3$, $k = 2$;

278. Construir la gráfica de la función exponencial

para $a = \frac{1}{2}$, 1, 2, a_1 10.

4 REPRESENTACION GRAFICA DE LAS FUNCIONES

279. Construir la gráfica de la función exponencial compuesta $y = e^{y_1}$.

si:

(a)
$$y_1 = x^2$$
; (b) $y_1 = \frac{1}{x}$; (c) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$;

b)
$$y_1 = -x^2$$
; d) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; f) $y_2 = \frac{2x}{1-x^2}$.

280. Construir la gráfica de la función logarítmica $y = \log_a x$

281. Construir las gráficas de las funciones:

a)
$$y = \ln(-x)$$
; b) $y = -\ln x$

$$y = -\ln x$$

282. Construir la gráfica de la función logarítmica compuesta $y = \ln y_0$

Ster

a)
$$y_1 = 1 + x^2$$
; b) $y_1 = (x-1)(x-2)^3(x-3)^3$;

c)
$$y_1 = \frac{1}{1} - \frac{x}{-x}$$
; d) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; e) $y_1 = 1 + e^x$,

$$=\frac{1}{2}$$
; e) $y_1=1+e^x$

283. Construir la gráfica de la función $v = \log_{\nu} 2$.

284. Construir la arafica de la función y = A sin x

285. Construir la gráfica de la función $y = \sin(x - x_n)$

$$x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} = \pi.$$

286. Construir la gráfica de la función $y = \sin nx_i$

si
$$n=1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

287. Construir la gráfica de la función $y = a \cos x + b \sin x$

reduciéndola a la forma

$$y = A \sin(x - X_0)$$

Examenar el ejemplo: $y = 6\cos x + 8\sin x$,

1 or their las gráficas de las funciones trigonométricas.

293.
$$y = \sin^2 x$$

294.
$$y = 5 n^3 x^3$$

$$t = 0$$
, $t = 0$ ig x .

295,
$$y = c \lg^2 x$$

296.
$$y = 5 \text{ n.s.} \cdot \sin 3x$$

$$10 L_{\rm bol} = \csc x$$

1 matrua las gráficas de las funciones

vip.
$$I = 8.0 X_g$$

304.
$$y = \frac{\sin x}{x}$$

$$I(10) \Rightarrow 4 \sin \frac{1}{x}.$$

305.
$$y = e^{x} \cos x$$
.

(a),
$$v = \cos \frac{\pi}{x}$$
.

308.
$$y = \pm 2^{-\kappa} \sqrt{\frac{1}{510 \text{ At } x}}$$

$$\mathbf{n} + \mathbf{1} + \mathbf{3} = \sin x, \quad \sin \frac{\mathbf{1}}{x}.$$

307.
$$y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$$
.

101.
$$y = \lg \frac{\pi}{x}$$
.

308.
$$y = \ln(\cos x)$$
.

$$101.1 \text{ sec} \frac{1}{x}$$

309.
$$y = \cos(\pi x)$$
.

$$|W2-1|=X\left(2+\frac{1}{4}\sin\frac{1}{x}\right),$$

310.
$$v = e^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\sin t t = \pm \sqrt{1 - x^2} \sin \frac{\pi}{x}$$
.

instruir las gráficas de las funciones circulares inversas:

817.
$$y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$$
.

$$(12) y = \arccos x$$
.

318.
$$y = \arcsin(\sin x)$$
.

III.
$$y = \operatorname{arctg} x$$

319.
$$y = \arcsin(\cos x)$$

III.
$$y = \operatorname{arcctg} x$$
.

320.
$$y = \arccos(\cos x)$$
.

118
$$y = arcs n \frac{x}{y}$$
.

321.
$$y = arctg(tg x)$$
.

In
$$y = \arccos \frac{1}{x}$$
.

😲 t. Construir la gráfica de la función

$$y = \arcsin y_1$$

मो

a)
$$y_1 = 1 - \frac{x}{6}$$

a)
$$y_1 = 1 - \frac{x}{2}$$
; c) $y_1 = \frac{1 - x}{1 + x}$;

b)
$$y_1 = \frac{2x}{1 + x^2}$$
; d) $y_1 = e^x$.

$$d)_{j_1} = e^{a_j}$$

324. Construir la gráfica de la función

$$y = \operatorname{arctg} y_{y_0}$$

510

a)
$$y_1 = x^2$$
; b) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; c) $y_1 = \ln x$; d) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

324.1. Construir las graficas de las funciones

a)
$$y = x^3 - 3x + 2$$
;

b)
$$y = \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^3}$$
;

c)
$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$
,

d)
$$y = \sqrt{x(1-x^2)}$$
;

e)
$$y = 3 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4}\right)$$
;

f)
$$y = \epsilon \lg \frac{\pi x}{1 + x^2}$$
,

g)
$$y = \frac{1}{\frac{\pi}{1-x}}$$
,

h)
$$y = ig(x^2 - 3x + 2);$$

1)
$$y = \arcsin n' \frac{1}{2} \sin x$$
;

$$y = \arctan\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right),$$

1)
$$y = (\sin x)^{\operatorname{rig} x}$$
.

325. Conociendo la gráfica de la función y = f(x), construir las gráficas de las funciones

a)
$$y = -f(x)$$
; b) $y = f(-x)$; c) $y = -f(-x)$.

326. Conociendo la gráfica de la función y = f(x), construir las gráficas de las funciones:

a)
$$y = f(x - x_0)$$
;

c)
$$y = f(2x)$$
;

b)
$$y = y_0 + f(x - x_0)$$
, d) $y = f(kx + b)$ $(k \neq 0)$.

$$(k \neq 0)$$
.

326.1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| & \text{si} \quad |x| < 1; \\ 0 & \text{si} \quad |x > 1. \end{cases}$$

Construir las gráficas de las funciones

$$y = \frac{1}{2} [f(x-t) + f(x+t)]$$

para
$$t=0$$
, $t=1$ y $t=2$.

327. Construir las graficas de las funciones:

a)
$$y = 2 + \sqrt{1 - x}$$
; d) $y = -\arcsin(1 + x)$;

b)
$$y = 1 - e^{-x}$$
; e) $y - 3 + 2\cos 3x$.

c)
$$y = \ln(1 + x)$$
,

328. Conceendo la gráfica de la función y = f(x), construir las gráficas de las funciones

a)
$$y = f(x)$$
; b) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$; c) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

329. Conociendo la gráfica de la función y = f(x), construir las gráficas de las funciones.

a)
$$y = f^{+}(x)$$
,

d)
$$y = f(f(x))$$
.

$$0) y = V / (x)$$

a)
$$y = f'(x)$$
,
b) $y = \sqrt{f(x)}$;
c) $y = \ln f(x)$,
d) $y = f(f(x))$,
e) $y = \operatorname{sgn} f(x)$;
f) $y = [f(x)]$

c)
$$y = \ln f(x)$$

329.1. Sea

$$f(x) = (x - a)(b - x) \quad (a < b),$$

Construir las gráficas de las funciones

a)
$$y = f(x)$$
; e) $y = e^{f(x)}$;

b)
$$y = f^{2}(x_{0}, y) + \lg f(x)$$

b)
$$y = f^{2}(x)$$
, f) $y = \lg f(x)$;
c) $y = \frac{1}{f(x)}$, g) $y := \operatorname{arcetg} f(x)$.

d)
$$y = V/(\bar{x})$$

329.2. Construir las gráficas de las funciones

- a) $y = \arcsin[\sin f(x)];$ d) $y = \arccos[\cos f(x)];$
- b) $y = \arcsin [\cos f(x)]; e) y = \arctan [\lg f(x)],$
- c) $y = \arccos \left[\sin f(x) \right]$

econs 1) $f(x, = x^x, 2) f(x) = x^x$.

330. Conociendo las gráficas de las funciones y = f(x) e y = g(x), construir las gráficas de las funciones.

a)
$$y = f(x) - g(x)$$
; b) $y = f(x)g(x)$; c) $y = f(g(x))$

Aplicando la regla de la suma de las gráficas, construir las gráficas de las siguientes funciones

331.
$$y = 1 + x + e^x$$

331.
$$y = 1 + x + e^{x}$$
.
332. $y = (x + 1)^{-2} + (x - 1)^{-3}$.
335. $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x$.
337. $y = \sin^{4} x + \cos^{4} x$.

332.
$$y = (x+1)^{-1} + (x-1)^{-1}$$

337.
$$y = \sin^4 x + \cos^4 x$$
.

338.
$$y = (1-x) + (1+x)$$

333.
$$y = x + \sin x$$
.
334. $y = x + \arctan x$.
336. $y = (1 - x) + (1 + x)$.
337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.
338. $y = (1 - x) + (1 + x)$.
339. $y = (1 - x) + (1 + x)$.

340. Construir las gráficas de las funciones hiperbólicas:

a)
$$y = \operatorname{ch} x_i$$
 donde $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x});$

b)
$$y = \sin x$$
, dende $\sin x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$;

c)
$$y = th x$$
, dende $th x = \frac{5h x}{ch x}$.

Aplicando la regla del producto de las gráficas, construir las graficas de las funciones

341.
$$y = x \sin x$$
.

345.
$$v = e^{-x^4} \cos 2x$$
.

342.
$$y = x \cos x$$
.

346.
$$y = x \, \text{sgn} \, (\sin x)$$
.

343.
$$y = x^1 \sin^3 x$$
.

347.
$$y = [x] |\sin \pi x|$$
.

344.
$$y = \frac{\sin x}{1 + x^2}$$
.

848.
$$y = \cos x \cdot \operatorname{sgn} (\sin x)$$
.

349. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \le 1; \\ 0, & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Construir la gráfica de la función

$$y = f(x) f(a - x)$$

Si

a)
$$a = 0$$
; b) $a = 1$; c) $a = 2$.

350. Construir la gráfica de la función

$$v = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$$
.

Construir las gráficas de las funciones

$$y = \frac{1}{f(\lambda)}$$
.

SL

351.
$$f(x) = x^x (1 - x^2)$$
.

354.
$$f(x) = \ln x$$
.

352.
$$f(x) = x(1-x)^{x}$$
.

355.
$$f(x) = e^x \sin x$$
.

353.
$$f(x) \Longrightarrow \sin^{2} x$$
.

356. Construir la gráfica de la función compuesta

$$y == f(u)$$

donde $u = 2\sin x \sin x$

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\infty < u < -1; \\ u & \text{para } -1 < u < 1; \\ 1 & \text{para } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

117 Sea

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \ y \ \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0; \\ x^2, & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

(o struir las gráficas de las funciones:

a)
$$y = \phi[\phi(x)];$$
 c) $y = \psi[\phi(x)];$
b) $y = \phi[\psi(x)];$ d) $y = \psi[\psi(x)].$

158 Sea.

$$\varphi(x) = \begin{cases} I_1 & \text{si } |x| \le 1; \\ 0, & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si } |x_1 \le 2; \\ 2, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

4 - estruir las gráficas de las funciones:

a)
$$y = \psi [\varphi (x)];$$
 c) $y = \psi [\varphi (x)];$
b) $y = \varphi [\psi (x)];$ d) $y = \psi [\psi (x)].$

Frolongar a la región negativa x < 0, la función f(x) definida i chión positiva x > 0, de modo que la función que se obtenga sea: to Jimpar, si:

a)
$$f(x) = 1 - x_i$$
 d) $f(x) = s_{i,0} x^i$
b) $f(x) = 2x - x^2$, e) $f(x) = e^x$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$; f) $f(x) = \ln x$.

druir las gráficas correspondientes de las funciones.

(1411) Avenguar, respecto de qué ejes verticales son simétricas las . . e c las funciones.

..
$$ax^2 + bx + c$$
; c) $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}$ $(0 < a < b)$;
1. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(1 - x)^2}$; d) $y = a + b \cos x$.

in! Avenguar, respecto de qué centros son simétricas las gráficas de . tone ones.

$$(1) y = ax + b;$$

d)
$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$
;

$$y = \frac{ax + b}{cx + d};$$

e)
$$y=1+\sqrt{x-2}$$

()
$$y = ax^3 + bx^3 + cx + d$$
;

362. Construir las gráficas de las funciones periódicas:

a)
$$y = |\sin x|$$
; b) $y = \operatorname{sgn} \cos x$; c) $y = f(x)$.

donde
$$f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l} \right)$$
, si $0 \le x \le 2l$ y $f(x + 2l) = f(x)$;
d) $y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2} \right]$;

e) y = (x), donde (x) es la distancia del número x hasta el número entero más próximo a él.

363. Demostrar que, si la gráfica de una función y = f(x) $(-\infty < x < +\infty)$ es simétrica respecto de dos ejes verticales x = a y x = b (b > a), entonces la función f(x) es penódica.

364. Demostrar que, si la gráfica de una función y = f(x) $(-\infty < x < +\infty)$ es simétrica respecto de dos puntos $A(a, y_0)$ y $B(b, y_1)$ (b>a), entonces la función f(x) es la suma de una función lineal y una función periódica. En particular, si $y_0 = y_1$, la función f(x)es periódica.

365. Demostrar que, si la gráfica de una función y = f(x) $(-\infty < x < +\infty)$ es simétrica respecto del punto $A(a, v_0)$ y de la recta x = b ($b \neq a$), la función f(x) es periódica.

366. Construir la gráfica de la función y = f(x) (-∞ < x < +∞) si</p> $f(x+1) = 2f(x) y f(x) - x (1-x) para 0 \le x \le 1$.

367. Construir la gráfica de la función

$$y = f(x)$$
 $(-\infty < x < +\infty)$

51

$$f(x+\pi)=f(x)+\sin x$$
 y $f(x)=0$, para $0 \le x \le \pi$.

368. Construir la gráfica de la función y = y(x), si:

a)
$$x = y - y^{0}$$
; c) $x = y - \ln y$;

b)
$$x = \frac{1 - y}{1 + y^2}$$
; d) $x^2 = \sin y$.

369. Construir las gráficas de las funciones y = y(x), dadas en forma paramétrica, si:

a)
$$x = 1 - t$$
, $y = 1 - t^2$

b)
$$x = t + \frac{1}{t}$$
, $y = t + \frac{1}{t^2}$

 $v = \sin t$ (elipse): c) $x = 10 \cos t$.

d)
$$x = cht$$
, $y = sht$ (hipérbola);

e)
$$x = 5 \cos^2 t$$
, $y = 3 \sin^2 t$;

f)
$$x = 2(t - \sin t)$$
, $y = 2(1 - \cos t)$ (cicloide):

g)
$$x = t + 1/t$$
, $y = \sqrt{t+1}$, $(t > 0)$

370. Construir las gráficas de las funciones implicitas.

a)
$$x^* - xy + y^* = 1$$
 (elipse);

e)
$$\sin x = \sin y$$
;

b)
$$x^3 + y^3 - 8xy = 0$$
 (hoja de Descartes), f) $\cos(\pi x^3) = \cos(\pi y)$;

), f)
$$\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$$
;

c)
$$\sqrt{x+\gamma_y}=1$$
 (parábola);

g)
$$x^y = y^x (x > 0, y > 0);$$

d)
$$x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = 4$$
 (astroide);

h)
$$x - |x| = y - y|$$
.

370.1. Construir las gráficas de las funciones implícitas:

a)
$$min(x, y) = 1$$
;

a)
$$\min(x, y) = 1$$
; c) $\max(|x|, |y|) = 1$;

b)
$$\max(x, y) = 1$$
;

b)
$$\max(x, y) = 1$$
; d) $\min(x^2, y) = 1$.

371. Construir las gráficas de las funciones $r=r(\varphi)$ en un sistema polar de coordenadas (r, \varphi), si

a)
$$r = \varphi$$
 (espiral de Arquímedes);

b)
$$r = \frac{\pi}{\varphi}$$
 (espiral hiperbólica);

c)
$$r = \frac{\varphi}{\varphi + 1} (0 \le \varphi < +\infty);$$

d)
$$r = 2^{\frac{n}{n}}$$
 (espiral logaritmica);

e)
$$r=2(1+\cos\varphi)$$
 (cardioide);

f)
$$r = 10 \sin 3\varphi$$
 (rosa de tres pétalos);

h)
$$\varphi = \frac{r}{r-1} (r > 1);$$

i)
$$\varphi = 2\pi \sin r$$
.

371.1. Construir en coordenadas polares r y o las gráficas de las siguientes funciones

a)
$$\phi = 4r - r^{2}$$
; c) $r^{2} + \phi^{2} = 100$,

c)
$$r^{3} + \varphi^{3} = 100$$

b)
$$\varphi = \frac{12r}{1 + r^2}$$
;

371.1. Construir en coordenadas polares r y \varphi las gráficas de las funciones dadas en forma paramétrica ($t \ge 0$ es el parámetro)

a)
$$\varphi = t \cos^2 t$$
,
 $t = t \sin^2 t$

a)
$$\varphi = t \cos^{3} t$$
, b) $\varphi = 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2}$, $r = 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2}$.

$$r = 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2}$$
.

372. Resolver aproximadamente la ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$
,

construyendo para ello la gráfica de la función $y = x^* - 3x + 1$.

Resolver graficamente las siguientes ecuaciones:

373.
$$x^3 - 4x - 1 = 0$$
. 376. $\lg x = 0,1x$.

374.
$$x^4 - 4x + 1 = 0$$
. 377. $10^x = x^2$.

876.
$$x=2^{-x}$$
. 878. ig $x=x$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

Resolver graficamente los sistemas de ecuaciones

379.
$$x+y^2=1$$
, $16x^2+y=4$.

380.
$$x^2 + y^2 = 100$$
, $y = 10(x^2 - x - 2)$.

§ 5. Límite de una función

1.º Funciones acotadas. Una función f (x) se llama acotada en un intervalo dado (a, b), si existen unos números m y M tales que

$$m \le f(x) \le M$$

para $x \in (a, b)$.

El número $m_0 = \inf \{f(x)\}\$ se llama ínfimo de la función f(x),

y el número $M_0 = \sup_{x \in \{a, b\}} \{f(x)\}$ supremo de la función en el intervalo

considerado (a, b). La diferencia $M_0 - m_0$ se llama oscilación de la función en el intervalo (a, b).

2,º Limite de una función en un punto. Supongamos que la función f(x) está definida en un conjunto $X = \{x\}$ que tiene un punto de acumulación a. La expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{1}$$

denota que, para cualquier número e > 0, existe un número $\delta = \delta(z) > 0$ tal que, para todos los valores de x, para los cuales f(x)tiene sentido y cumplen la condición $0 < |x - a| < \delta$, se ventica la desigualdad

$$|f(x) - A|_{\epsilon} < \epsilon$$

Para la existencia del límite (1) de la función, es necesario y suficiente que para cada sucesion $x_n \longrightarrow a$, $x_n \neq a$ (n - 1, 2, ...) se cumpla la igualdad $(x_n \in X)$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Subsisten los dos límites notables

1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
, 2) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Criterio de Cauchy. El l'imite de la función f (x) en el punto a existe

olo, y sólo cuando, para cualquier a > 0 existe un número

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

... $t' - a! < \delta y 0 < |x'' - a| < \delta$, donde x' y x'' son dos puntos el sei iera del campo de definición de la función f(x).

. I mites laterales. El número A' se llama límite a la izquierda de

$$A' = \lim_{x \to a \to 0} f(x) = f(a + 0),$$

$$A'-f(x)$$
 < e para $0 < a-x < \delta(\epsilon)$.

Viole gamente, el número A'' se llama límite a la derecha de la time in f(x) en el punto a:

$$A'' = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0),$$

$$A''-f(x)$$
| < e para $0 < x-a < \delta(e)$.

Para la existencia del límite de la función f(x) en el punto a, es

$$f(a-0) = f(a+0)$$
.

. Limite infinito. La expresión simbólica

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

I. . I que para cualquier E>0 se verifica la desigualdad

$$f(x) > E$$
, si $0 < |x-a| < \delta(E)$.

Timite parcial. Si para alguna sucesión $x_n \longrightarrow a \ (x_n \neq a)$ se

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta_n$$

III ·mero B (o el símbolo ∞) se llama límite parcial (finito o infinito, i ··· tivamente) de la función f(x) en el punto a.

I ··· Ilmites parciales mínimo y máximo se denotan mediante

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \mathbf{y} \quad \lim_{x\to a} f(x)$$

. We doman limite inferior y limite superior, respectivamente, de la $\frac{1}{2}$ La gualdad

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

es condición necesaria y suficiente para la existencia del límite (finito o infinito, respectivamente) de la función f(x) en el punto α

Problemas.

381. Comprobar que la función, definida por las condiciones:

$$f(x) = n$$
, si $x = \frac{m}{n}$,

donde m y n son números enteros, primos entre sí, y n > 0, y

$$f(x)=0$$
, so x es oracional,

es finita, pero no está acotada en cada punto x (es decir, no está acotada en cualquier entorno de este punto).

382. Una función f(x), definida y localmente acotada en cada punto: a) de un intervalo, b) de un segmento, ¿estará acotada en el intervalo dado o en el segmento dado, respectivamente?

383. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^4}$$

está acotada en el intervalo - ∞ < x < + ∞.

384. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

no está acotada en todo entorno del punto x = 0, sin embargo, no es infinitamente grande cuando $x \longrightarrow 0$.

385. Avenguar și la función

$$f(x) := \ln x \cdot \sin^x \frac{\pi}{x}$$

está acotada o no en el intervalo $0 < x < \varepsilon$.

386. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

tiene en la región $0 \le x < +\infty$ el infimo m = 0 y el supremo M = 1.

387. Una función f(x) está definida y es monótona creciente en el segmento [a, b]. ¿A qué son iguales el ínfimo y el supremo de dicha función en este segmento?

Determinar el ínfimo y el supremo para las funciones:

388.
$$f(x) = x^2$$
 en $[-2, 5]$.

389.
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
 en $(-\infty, +\infty)$.

390.
$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^3}$$
 en $\{0, +\infty\}$.

391.
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$
 en $(0, +\infty)$.

392.
$$f(x) = \sin x \text{ en } (0, +\infty).$$

393.
$$f(x) = \sin x + \cos x$$
 en $[0, 2\pi]$.

394.
$$f(x)=2^x$$
 en $(-1, 2)$

395.
$$f(x) = [x]$$
: a) on (0, 2) y b) on [0, 2].

396.
$$f(x) = x - [x]$$
 en $[0, 1]$.

397. Calcular la oscilación de la función

$$f(x) = x^2$$

en los intervalos: a) (1; 3), b) (1,9; 2,1); c) (1,99; 2,01); d) (1,999;

398. Calcular la oscilación de la función

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

en los intervalos: a) (-1; 1); b) (-0,1; 0,1); c) (-0,01; 0,01); d)

399. Sean m[f] y M[f] el anfimo y el supremo, respectivamente, de la función f(x) en el intervalo (a, b).

Demostrar que, si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son furtiones definidas en (a, b), entonces

$$m[f_1+f_2] \geqslant m[f_1]+m[f_2]$$

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

Construir ejemplos de funciones f_1 (x) y f_2 (x), para las cuales en las últimas relaciones se verifica a) la igualdad y b) la desigualdad.

400. Sea f(x) una función definida en la región $[a, +\infty)$ y acotada en cada segmento [a, b].

Hagamos.

У

$$m(x) \Longrightarrow \inf_{\alpha \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi)$$

$$M(x) = \sup_{\alpha \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi).$$

Construir las gráficas de las funciones y = m(x) e y = M(x) si

a)
$$f(x) = \sin x$$
 y b) $f(x) = \cos x$.

$$\lim_{x\to x} x^2 = 4. \quad .$$

Rellenar la tabla siguiente:

E	0,1	0,01	0,001	0,0001	
ð					

402. Empleando el vocabulario $(E - \delta n)$, demostrar que

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^n}=+\infty.$$

Relienar la tabla siguiente

E	10	100	1000	.0 000	
ð					

403. Formular, mediante desigualdades, las siguientes afirmaciones:

a)
$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$
; b) $\lim_{x\to a=0} f(x) = b$; c) $\lim_{x\to a+0} f(x) = b$.

Dar ejemplos correspondientes.

Formular, mediante desigualdades, las siguientes afirmaciones y dar ejemplos correspondientes:

404. a)
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$
; b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$; c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$.

405. a)
$$\lim f(x) = \infty$$
;

405. a)
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$
; f) $\lim_{x \to a \to 0} f(x) = +\infty$;

b)
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$
;

b)
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
; g) $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$;

c)
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$
; h) $\lim_{x \to a + 0} f(x) = -\infty$;

h)
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$
;

d)
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

d)
$$\lim_{x\to a\to 0} f(x) = \infty$$
; i) $\lim_{x\to a\to 0} f(x) = +\infty$.

$$e) \lim_{x=a\to 0} f(x) = -\infty;$$

У

1) (1) I INTRODUCCION AL ANALISIS

(06. ii)
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$= \infty; \qquad \text{f)} \lim_{x \to -\infty} f(x) = + \infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty;$$

g)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty;$$

b)
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$
; g) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$;
c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; h) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$; i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d)
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$
;

i)
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

e)
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
;

107 Sea y = f(x). Formular mediante designaldades el significado · les expresiones siguientes:

$$0 \rightarrow b = 0 \text{ cuando } x \rightarrow x_i$$

g)
$$y \rightarrow b = 0$$
 cuando $x \rightarrow \infty$;

1)
$$b = 0$$
 cuando $x \to a = 0$;
h) $y \to b = 0$ cuando $x \to -\infty$;

h)
$$y \rightarrow b = 0$$
 cuando $x \rightarrow -\infty$

$$0 + b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow a + 0;$$

$$1) y \rightarrow b - 0 \text{ cuando } x \rightarrow + \infty;$$

$$1) y \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow a + 0;$$

$$1) y \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

$$1) y \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

$$1) y \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

$$1) y \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

$$1) y \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

$$1) y \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

$$2 \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

$$3 \rightarrow b + 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty;$$

k)
$$x \rightarrow b + 0$$
 cuando $x \rightarrow -\infty$

$$1 \rightarrow 0 + 0$$
 cuando $x \rightarrow a + 0$;

1)
$$y \rightarrow b + 0$$
 cuando $x \rightarrow + \infty$.

r ejemplos correspondientes.

10%, Sea

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

 t, (t = 0, 1, ..., n) son números reales. 1 istrar que

$$\lim_{x\to\infty} P(x) | = +\infty.$$

109 Sea

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_2 x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

 $a + a_0 \neq 0 \text{ y } b_0 \neq 0.$

Di stranque

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{si} \quad n = m; \\ 0, & \text{si} \quad n < m. \end{cases}$$

410. Sea

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

 $\operatorname{de} P(x) \setminus Q(x)$ son polinomies en x, y

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

¿Qué valores puede tener la expresión

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}?$$

Hallar los valores de las siguientes expresiones

411. a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$
; b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{2x^2-x-1}$; c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-1}{2x^2-x-1}$.

412.
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$$

413.
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^b - (1+5x)}{x^2+x^5}$$
.

414.
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$
 (m y n son números naturales).

415.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

416.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{20}}{(2x+1)^{20}}$$
.

417.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)(x^n+1)...(x^n+1)}{(nx)^n+1!}$$
.

418.
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x + 6}{x^3 - 8x + 15}$$

419.
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 + 4x + 3}.$$

420.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

421.
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$$
.

422.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 2x - 1}{x^4 - 2x - 1}$$
.

428.
$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^3-x-2)^{36}}{(x^3-12x+16)^{13}}$$
.

424.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$
.

424.1.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{166}-2x+1}{x^{16}-2x+1}$$

- 425. $\lim_{x^n \to 1} \frac{x^n + 1}{x^n + 1}$ (m y n son números naturales).
- 426. $\lim_{x \to a} \frac{(x^n a^n) na^{n-1}(x a)}{(x a)^n}$ (*n* es un número natural).
- 427. $\lim_{(x \to 1)^2} \frac{x^{n+1} + (n+1)x + n}{(x \to 1)^2}$ (n es un número natural)
- 428. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 x^m} \frac{n}{1 x^n} \right)$ (m y n son números naturales).

429.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right].$$

430.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \dots + \left(x + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right].$$
Indicaction, Véass et aux

Indicación. Véase el ejercicio 2.

431.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^n+3^2+\dots+(2n-1)^2}{2^n+4^2+\dots+(2n)^2}$$
.

432.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^2} - \frac{n}{4} \right)$$
.

Indicación. Véase el ejercicio 3

433.
$$\lim_{r \to \infty} \frac{1^3 + 4^2 + 7^3 + \dots + (3n - 2)^3}{1^3 + 1 + 7 + \dots + (3n - n)^3}$$

434. Calcular el área del tnángulo mixtilíneo QAM (fig. 3), limitado por la parábola $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{a}$, el eje Ox y la recta x = a, considerándola

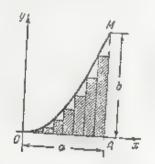


Fig. 3

como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos de base $\frac{\alpha}{n}$, donde $n \longrightarrow \infty$

435.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[4]{x+1}}$$
. 440. $\lim_{x \to x} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt[4]{x+1}}{x^2-9}$.

436.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$$
, 441. $\lim_{x \to -x} \sqrt[3]{x-6+2}$

437.
$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$
, 442. $\lim_{x \to 1a} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

438.
$$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$
. 443. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-4}$.

439.
$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$
 $(a > 0)$

444.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x-1}}{x}$$
 (n es un número entero).

445.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2-(1+x)}}{x}$$
 449. $\lim_{x \to 7} \sqrt{x+2-\sqrt{x+20}}$.

449.
$$\lim_{x \to 7} \sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 20}$$

446.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{x + x^2}$$
.

446.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 + 3x - x^2 - 2}{x + x^3}$$
.
447. $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 27 + x}{x + 2 \frac{\pi}{2} / x^4}$.
450. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{3}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$.

447.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x + 2\sqrt{x^4}}{x + 2\sqrt{x^4}}$$

448.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{-x}-\sqrt{1-x}}{1+x-\sqrt{1-x}}$$
, 451. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{1+5x}-(1+x)}$.

(452)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$$
 (m y n son números enteros).

453.
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[m]{\frac{1+cx}{1+cx}} \sqrt[n]{1+\beta x} = 1$$
 (m y n son números enteros).

454. Sea
$$P(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$
 y sea m un número entero.

Demostrar que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x} = \frac{a_1}{m}$$
.

Calcular los límites:

455.
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x-1}}{\sqrt[n]{x-1}}$$
 (m y n son números enteros).

455.1.
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[4]{x}} \right)$$
.

456.
$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)-\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$$

457. $\lim_{x \to +\infty} \{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \}.$

458. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$

459. $\lim_{x \to +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x).$

 $(460) \lim_{x \to +0} \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{x}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{x}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{x}} - \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{x}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{x}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{x}} \right).$

461. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[8]{x^3+x^2+1} - \sqrt[8]{x^3-x^2+1}).$

462. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[4]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$

463. $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right]$

464. $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

465. $\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[n]{(x + a_1) \dots (x + a_n)} - x \right].$

466. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$

(n es un número natural).

467. $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n - (\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

(n es un número natural).

- 468. Estudiar el comportamiento de las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, si el coeficiente a tiende a cero, intentras que los coeficientes b y c son constantes, siendo $b \neq 0$.
 - 469. Hallar las constantes a y b de la condición

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+1}{x+1} - ax - b \right) = 0.$$

470. Hallar las constantes $a_i y b_i$ (i = 1, 2) de las condiciones

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-x+1}-a,x-b_1)=0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1 x - b_1) = 0,$$

Calcular los limites.

471. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

472. 13.m sin x x

(473. lim sin mx 1

(m y n son números enteros)

474. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 474. $\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x}$ 474. $\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x}$

475.) I m $\frac{\log x - \sin x}{\sin^4 x}$.

 $(476) \lim_{x\to a} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$

 $(477. \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$

478. $\lim_{x\to 0} \frac{+\sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$

 $479. \lim_{x \to \frac{x}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$

 $\lim_{x\to 1} (1-x) \lg \frac{\pi x}{2} ,$

481. Demostrar las igualdades

a) $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$; b) $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$;

c) $\lim_{x \to a} \lg x = \lg a \quad \left(a \neq \frac{2n-1}{2} \pi, \ n = 0, \pm 1, -2, \ldots \right)$.

Calcular los límites.

482. $\lim_{x\to a} \frac{\sin x + \sin a}{x + a} .$

490. $\lim_{x \to 0} \frac{\log a + 2x - 2\log (a + x) + \log a}{x^2}$.

483. $\lim_{x\to a}\frac{\cos x + \cos a}{x-a}.$

491. $\lim_{x \to a} \frac{\log_1 a + 2x + 2 \log_1 (a + x) + \log_1 a}{x^4}.$

484. Let $\lim_{z \to a} \frac{\log z}{z} = \frac{\log a}{a}$.

492. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(a + x) \sin(a + 2x) - \sin^3 a}{x}$

485. $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{cig} x - \operatorname{cig} a}{x - a}.$

493. Inm $\frac{2\sin^3 x + \sin x - 1}{2\sin^3 x - 3\sin x + 1}$

486. $\lim_{x\to a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$

494. $\lim_{x \to x} \frac{1 + \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 + \cos x}$

487. $\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{covec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}$.

488. hm $\frac{\sin a + 2x - 2\sin(a + x) + \sin a}{x^2}$.

489. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(a + 2x) - 2\cos(a + x) + \cos a}{x^4}$.

$$\underbrace{95}_{n\to\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x-\frac{n}{3}\right)}{1-2\cos x},$$

$$(496) \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\lg^3 x - 3\lg x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

497. Im
$$z = \frac{z(a + x + c + a + x) + z^2}{x^2}$$

498.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^{x} x}{2 + \operatorname{ctg}^{x} x + \operatorname{ctg}^{x} x}$$

499.
$$m \frac{\sqrt{1 + 42x} - \sqrt{1 + 92x}}{x^2}$$

506. a)
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-y}{1-x}}$$
.

b)
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{x-x}}$$
;

507.
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 2}{2x - 1} \right)^{x^2}$$
.

508. If
$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 - x + 1}$$
, $\frac{x^3}{1 - x}$.

$$510. \lim_{\substack{t=0\\ t\neq 0}} \left[tg\left(\frac{\pi}{8}+\kappa\right)\right]^{tg2x}.$$

511.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \stackrel{x}{=} \frac{1}{1}$$
.

512
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \Big|_{x}^{x^2}$$
.

513.
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x + 2} \right)^{\frac{1}{6}}$$
.

514.
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$$
.

515.
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$
.

501.
$$\lim_{x \to \infty} V \xrightarrow{\widehat{c}_{(S,X)} = \frac{3}{3}} \widehat{c}_{(S,X)}.$$

$$(502) \lim_{x \to 6} \frac{V}{1 + \frac{c + 5}{c + 5} x^3},$$

503.
$$\lim_{z\to 0} \frac{1-|y|^{-ns/z}}{1-\cos(|y|/z|)}$$
.

505
$$\lim_{x \to +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

c)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pm x^{\sqrt{1-y_x^2}}}{2+x}.$$

516.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_1 x + b_2 x}{a_1 x + b_2}$$

 $(a_1 > 0, a_2 > 0).$

517.
$$\lim_{x\to 0} (1 + x^2)^{c} x^{c} x$$

$$\begin{array}{c|c}
\hline
619 & \lim_{x \to 0} & \frac{1 - {}^{t}g \, x}{1 - z} \, \frac{1}{z}
\end{array}$$

520.
$$\lim_{x \to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$
.

521.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)_{x^{1}}.$$

522.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$$
.

523.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\log x}$$
.

524.
$$\lim_{x\to 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x}$$

525.
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^2$$
.

527.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-x}{n-1}\right)^n.$$

528.
$$\lim_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt[n]{n}}$$
.

529.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$
.

530.
$$\lim_{x \to +\infty} x [\ln(x+1) - \ln x].$$

531.
$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} (a > 0).$$

532.
$$\lim_{x \to +\infty} [\sin \ln(x+1) + \sinh x]$$

533.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$

534.
$$\lim_{k\to\infty}\Bigl(\lg\,\frac{100+z^k}{1+100x^k}\Bigr).$$

535.
$$\lim_{z \mapsto +\infty} \frac{\ln(2+e^{2z})}{\ln(3+e^{2z})}$$

536.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt{x})}{\ln(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x})}$$

537.
$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) + 2\log x}{h^2} (x > 0).$$

540.
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} \right)$$

549.1.
$$\inf_{x=0} \frac{\ln(\pi x + \sqrt{1 - x^2}x)}{\ln(x + \sqrt{1 - x^2})}$$

541.
$$\lim_{x \to a} \frac{a^x - 1}{x} (a > 0)$$

542,
$$\lim_{x \to a} \frac{a^x - x^2}{x - a}$$
 $(a > 0)$.

543.
$$\max_{x \to a} \frac{x^x - a^2}{x} (a > 0)$$
.

544.
$$\lim_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$$
.

550.
$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} + a^{x+h}}{h^x} \stackrel{\cdot 2a^x}{\longrightarrow} (a > 0).$$

551.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2X+a+b}}$$
.

583.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$
.

535,
$$\lim_{\varepsilon \mapsto +\infty} \frac{\ln (2+\varepsilon^{2\varepsilon})}{\ln (3+\varepsilon^{2\varepsilon})}$$
.

536.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})}{\ln(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x})}$$

545.
$$\lim_{x \to 0} \frac{1+x-2^{x}}{1+x-3^{x}}$$

$$545.1. \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x\cos \pi x}{1+\sin x\cos \beta x} \right)^{c} e^{ax}$$

545.2.
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x^3)}{\sin(\pi x^3)}.$$

545.3.
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi \cdot 2^x)]}.$$

546.
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n}\right)$$
.

547.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{xx} - e^{3x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$$

548,
$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^3} (a > 0)$$
.

549.
$$\lim_{x\to b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \ (a > 0).$$

$$\widehat{552} \lim_{n \to \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1) (x > 0).$$

553.
$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \frac{n+1}{\sqrt[n]{x}} \right) \quad (x > 0).$$

554,
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n (a>0, b>0).$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n (a > 0, b > 0).$$

558.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$
 (a > 0, b > 0, c > 0).

557.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a+b+c} \right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, \ b > 0, \ c > 0).$$

558.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, b > 0).$$

559.
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^2 - b^2)^2} (a > 0, b > 0).$$
 560. $\lim_{x\to a} \frac{a^{a^2} - a^{x^2}}{a^2 - x^2} (a > 0)$

561. a)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$$
; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)}$.

562.
$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1+2^x) \ln(1+\frac{3}{x})$$
 563. $\lim_{x \to 1} (1-x) \log_x 2$

564. Demostrar que

$$\lim_{x \to \pm \infty} \frac{x^n}{a^n} = 0 \quad (a > 1, n > 0),$$

165. Demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^2}=0 \quad (a>1, \ \epsilon>0).$$

Calcular los límites

568. a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 + e^{x})}{\ln x^4 + e^{2x}}$$
; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^4 - e^{x})}{\ln(x^4 - e^{2x})}$.

$$667. \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+1/1+x^2)}.$$

508.
$$\lim_{x \to +\infty} [(x+2) \ln (x+2) - 2(x+1) \ln (x+1) + x \ln x].$$

Fig.
$$\lim_{x \to +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$$

570.
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^3 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x + 1}{x - 1} \right).$$

671.
$$\lim_{x\to p} \frac{\sqrt{1+x\sin x-1}}{x^2-1}$$
.

572.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^2}.$$

573.
$$\lim_{x\to 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$$
. 574. $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\frac{x^2}{x}}$

575.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{x}} \frac{1 - \sin^{x} + 3x}{\sqrt{(1 - \sin^{2} x) \cdot (1 - \sin^{2} x)}}$$
 $(\alpha > 0, \beta > 0).$

576. a)
$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x}{x}$$
; b) $\lim_{x\to a} \frac{\cot x + 1}{x^2}$;

c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x}$$
 (véase el ejercicio 340)

576.1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2 x}{\ln \sinh 3x}$$
 (véase el ejercicio 340)

877.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sinh \sqrt{x^2 + x} \to \sinh \sqrt{x^2 - x}}{\cosh x}$$
.

577.1. a)
$$\lim_{x\to a} \frac{\sinh x - \sinh a}{x + a}$$
; b) $\lim_{x\to a} \frac{\cosh x - \cosh a}{x - a}$.

577.2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cot x}{\ln \cos x}$$
.

578.
$$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln \cot x)$$
. 582. $\lim_{x \to +\infty} \arccos (\sqrt{x^1 + x} - x)$.

579.
$$\lim_{x\to x} \frac{e^{\sin xx} - e^{\sin x}}{\tan x}$$
. 589. $\lim_{x\to x} \frac{x-4}{(x-2)^2}$.

580.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cot\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$$
 584. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arcetg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

581.
$$\lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$$
. 585. $\lim_{h\to\infty} \frac{\arctan(x+h)-\arctan(y+h)}{h}$.

586.
$$\lim_{x \to 0} \frac{n \frac{1+x}{1-x}}{\arcsin(1+x) - \arctan(1-x)}$$

587.
$$\lim_{n\to\infty} \left[\operatorname{naicig}_{\frac{n}{4}(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{n}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right] \cdot$$

APITULO 1 INTRODUCCIÓN AL ANALISIS

588.
$$\lim_{x \to \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arcig} \frac{x}{x+1} \right)$$
.

589.
$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
.

590.
$$\lim_{n\to\infty} \left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}\left(n|V|_{2n+n^2}\right)}.$$

591.
$$\lim_{x\to s} \frac{1}{x^{-0s}} e^{-\frac{1}{x^{2s}}}$$
. 592. $\lim_{x\to +\infty} x \ln x$.

692.
$$\lim_{x \to +\infty} x \ln x$$
.

593. a)
$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$
; b) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

594. a)
$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$$

b)
$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x+x^3} - \sqrt{1-x+x^3}).$$

594.1. Calcular

$$h := \lim_{x \to -\infty} f(x) - \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

\$1

$$f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + b^2}}.$$

595, a, m arrig
$$\frac{1}{1-x}$$
; b) him arrig $\frac{1}{1-x}$.

b)
$$\lim_{x\to 1=0}$$
 and $g(\frac{1}{1+x})$

596 a)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + e^{x}}$$
; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{x}}$.

597. 2)
$$\lim_{\varepsilon \to -\infty} \frac{n(1+\varepsilon^x)}{x}$$
; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\varepsilon^x)}{x}$.

b) I'm
$$\frac{|n(1+e^x)|}{x}$$

598. Demostrar que

a)
$$\frac{2\pi}{1+x} \rightarrow 2+0$$
 cuando $x \rightarrow -\infty$:

b)
$$\frac{2\pi}{1+x} \rightarrow 2-0$$
 cuando $x \rightarrow +\infty$.

599. Demostrar que

a)
$$2^x \rightarrow 1 \rightarrow 0$$
 cuando $x \rightarrow -0$;

b)
$$2^x \rightarrow 1 + 0$$
 cuando $x \rightarrow + 0$.

600. Calcular
$$f(1)$$
, $f(1-9)$, $f(1+9)$, si $f(x) = x + [x^2]$.

601. Calcular f(n), f(n-0), f(n+0) $(n=0, \pm 1, ...)$, si $f(x) = sgn (sin \pi x).$

Calcular

602.
$$\lim_{x \to 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$$
. 605. $\lim_{n \to \infty} \sin^2(n \sqrt{n^2 + n})$.

603.
$$\lim_{x\to 0} x \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$
 606. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin x}$

604.
$$\lim_{n\to\infty} \sin(n\sqrt{n^2+1})$$
.

607. Si $\lim \varphi(x) = A$ y $\lim \psi(x) = B$, as deduce de aquí que

$$\lim_{x\to a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Examinar el ejempio: $\varphi(x) = \frac{1}{a}$ si $x = \frac{p}{a}$, donde p y q son números enteros, primos entre sf, y $\varphi(x) = 0$ si x es irracional; $\psi(x) = 1$ si $x \neq 0$ $y \psi(x) = 0$ so x = 0 $y x \longrightarrow 0$.

608. Demostrar los teoremas de Cauchy: si una función f(x) está definida en el intervalo (a, +∞) y está acotada en todo intervalo finito (a, b), entonces

a)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)];$$

b)
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$$
 $(f(x) \ge C > 0)$.

suponiendo que existen los límites de los segundos miembros de las igualdades.

609. Demostrar que, si: a) la función f (x) está definida en la región x > a; b) está acotada en toda región finita a < x < b; c) $\lim_{x \to \infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$, entonces.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$

610. Demostrar que, si: 1) la función f (x) está definida en la región x > a, 2) está acotada en toda región finita a < x < b, 3) para un número natural a existe el línute finito o infinito

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int (x+1) - \int (x)}{x^n} = t_1$$

entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{x^{n+1}} (x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

611. Demostrar que

a)
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^{x_n}$$
 b) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + x + \frac{x^n}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^{x_n}$

612. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\left(2\pi en!\right)=2\pi.$$

Indicación. Utilizar la fórmula (*) del ejercicio 72. Construir las gráficas de las funciones:

613. a)
$$y = 1 - x^{100}$$
; b) $y = \lim_{n \to \infty} (1 - x^{2n}) (-1 \le x \le 1)$.

614. a)
$$y = \frac{x^{100}}{1 + x^{100}} (x \ge 0)$$
; b) $y = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} (x \ge 0)$.

615.
$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$$

616.
$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$
.

617.
$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^n} \quad (x \ge 0).$$

618.
$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \ge 0).$$

619.
$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{y^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \ge 0).$$

620. a)
$$y = \sin^{1000} \tau$$
; b) $y = \lim_{n \to \infty} \sin^{2n} x$

621.
$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln (2^n + x^n)}{n} \quad (x \ge 0).$$

622.
$$y = \lim_{n \to \infty} (x-1) \operatorname{arcig} x^n$$
, **624.** $y = \lim_{t \to \pm \infty} \frac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$.

623.
$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}$$
 625. $y = \lim_{t \to x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x} (x > 0)$.

625.1.
$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{x \cdot \lg^{nn} \frac{nx}{4} + \sqrt{x}}{\frac{tg^{3n} \frac{nx}{4} + 1}{tg^{3n} \frac{nx}{4} + 1}} \quad (x \ge 0).$$

625.2.
$$y = \lim_{n \to \infty} x \operatorname{sgn} |\sin^2(n! \pi x)|$$

625.3. Construir la curva

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1.$$

626. Se llama asíntota (oblicua) de una curva y = f(x) la recta y = kx + b, para la cual,

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Unizando esta relación, deducir las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de asíntotas.

627. Hallar las asíntotas y construir las siguientes curvas:

a)
$$y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$$
;

d)
$$y = \sum_{n=1}^{x^{n}} (1-x^n)^n$$

a)
$$y = \sqrt{x^2 + x}$$

e)
$$y = \ln(1 + e^x)$$
;

c)
$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^5}$$
;

f)
$$y = x + \arccos \frac{1}{x}$$
.

Calcular los límites que siguen.

628.
$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \right|^{\frac{1}{2}} \dots + \frac{x^{2^n}}{(2n)!} \right|$$

629.
$$\lim_{n\to\infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})], \quad \text{si} \quad |x|<1.$$

630.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}...\cos\frac{x}{2^n}\right)$$
.

631. Sea

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} == 1,$$

donde $\psi(x) > 0$ y $\alpha_{mn} \rightrightarrows 0$ (m=1, 2, ...) cuando $n \longrightarrow \infty$, es decir, $|\alpha_{mn}| < \epsilon$ para m=1, 2, ... y $n > N(\epsilon)$.
Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} [\varphi(\alpha_{1n}) + \varphi(\alpha_{2n}) + \dots + \varphi(\alpha_{nn})] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \dots + \psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

supomendo que existe el límite del segundo miembro de la igualdad (1). Aplicando el teorema anterior, calcular

632.
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} {3 \choose 1 + \frac{k}{n^2}} = 1$$
, 634. $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} {n \choose 2} = 1$ $(a > 0)$.

693.
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{ka}{n^3} \right)$$
. 635. $\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^3} \right)$.

$$63\theta_* \lim_{n \to \infty} \prod_{k \to 1}^n \cos \frac{k\alpha}{n \sqrt[k]{n}}.$$

637. La sucesión x_n viene dada por las igualdades:

$$z_1 = \sqrt{a}, x_n = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}, \dots (a > 0)}.$$
Calcular $\lim_{n \to \infty} x_n$.

637.1. La sucesión x_n viene dada del modo siguiente:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1,$$

 $x_n = \frac{1}{2} (x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, ...).$

Calcular $\lim x_n$.

637.2. La sucesión y_n se define mediante la sucesión x_n por las relaciones

$$y_0 = x_0, \quad y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, ...),$$

$$donde \mid \alpha \mid < 1. \text{ Calcular } \lim_{n \to \infty} x_n, \text{ si } \lim_{n \to \infty} y_n - b.$$

637.3. La sucesión x_n se define del modo siguiente:

$$x_0 = 1$$
, $x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}$ $(n = 1, 2, ...)$

Calcular $\lim x_n$.

Indicación. Examinar la diferencia entre x_n y las raíces de la ecua $ción z = \frac{1}{1+z}.$

638. La sucesión de funciones

$$y_n = y_n(x)$$
 $(0 \le x \le 1)$

se define del modo siguiente:

$$y_1 = \frac{x}{2}$$
, $y_n = \frac{x}{2} - \frac{g_{n-1}^1}{2}$ $(n = 2, 3, ...,)$

Calcular $\lim y_n$.

639. La sucesión de funciones $y_n = y_n(x)$ (0 $\leq x \leq 1$) se define del modo siguiente:

And the second s

$$y_1 - \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^1}{2}$$
 $(n = 2, 3, ...).$

Calcular $\lim y_n$. FI HE GO

639.1. Seà x > 0 e $y_n = y_{n-1} (2 - xy_{n-1}) (n = 1, 2, ...)$. Demostrar que, si $y_i > 0$ (i = 0, 1), la succesión y_n es donvergente y

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{x}.$$

Indicación. Estudiar la diferencia

$$\frac{1}{x} - y_0$$

639.2. Para calcular $y = \sqrt{x}$, donde x > 0, se aplica el siguiente proceso: $y_0 > 0$ es arbitrario,

$$y_n = \frac{1}{2} \left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}} \right) \quad (n = 1, 2, ...).$$

Demostrar oue

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\sqrt{x}.$$

Indicación, Aplicar la fórmula

$$\frac{y_n + 1/x}{y_n + \sqrt{x}} = \frac{y_{n-1} + 1/x}{y_{n-1} + 1/x} \quad (n \ge 1),$$

640. Para la resolución aproximada de a ecuación de Kepler

$$x - \epsilon \sin x = m \quad (0 < \epsilon < 1) \tag{1}$$

se hace

$$x_0 = m, x_1 = m + \epsilon \sin x_0 \dots, x_n = m - \epsilon \sin x_{n-1}, \dots$$

(método de aproximaciones sucesivas).

Demostrar que existe $\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$ y que ξ es la única raíz de la ecuación (1).

641. Si $\omega_h |f|$ es la oscilación de la función f(x) en el segmento $|x-\xi| \le h \ (h > 0)$, el número

$$\omega_0[f] = \lim_{h \to 0} \omega_h[f]$$

se llama oscilación de la función f(x) en el punto ξ .

Determinar la osculación de la función f(x) en el punto x = 0, si:

a)
$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$
;

e)
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
,

b)
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x}$$

b)
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x}$$
; () $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

c)
$$f(x) = x (2 + \sin \frac{1}{x});$$

g)
$$f(x) = (1 + |x|)^{n}$$

Demostrar que, cualquiera que sea el número α que satisfaga la condición $1 \le \alpha \le 1$, se puede elegir una sucesion $x_n \longrightarrow 0$ (n = 1, 2, ...) tal, que

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha.$$

643. Calcular

$$l = \lim_{x \to 0} f(x)$$
 y $L = \lim_{x \to 0} f(x)$,

SI

a)
$$f(x) = \sin^{2}\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \arg \frac{1}{x}$$
;

b)
$$f(x) = (2-x^{\frac{1}{2}})\cos\frac{1}{x}$$
; c) $f(x) = \left(1 + \cos^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

644. Calcular

$$l = \lim_{x \to \infty} f(x)$$
 y $L = \lim_{x \to \infty} f(x)$,

\$1

a)
$$f(x) = \sin x$$
,

c)
$$f(x) = 2^{\sin x^2}$$
;

b)
$$f(x) = x^{3} \cos^{2} x$$
,

d)
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$$
 $(x \ge 0)$.

§ 6. Orden infinitesimal

y orden de crecimiento de una función

O-simbolismo

1.º La expresión

$$\phi(x) = O(\phi(x))$$
 para $x \in X$

denota que existe una constante A, tal que

$$|\varphi(x)| \leq A |\psi(x)| \text{ para } x \in X,$$
 (1)

Análogamente, se escribe

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ para } x \mapsto a,$$
 (2)

si la desigualdad (1) se verifica en un entorno U_a del punto a $(x \neq a)$. En particular, si $\psi(x) \neq 0$ para $x \in U_a$, $(x \neq a)$, se verifica la relación (2) si existe y es finito el límite $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. En este caso escribiremos: $\varphi(x) = 0^* (\psi(x))$.

Si

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^{p}} = k \neq 0 \ \langle p > 0 \rangle,$$

se dice que $\varphi(x)$ es un infinitésimo de orden p respecto del infinitésimo x. De un modo similar, si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x^p}=k\neq0\quad (p>0),$$

se dice que ψ (x) es un infinito de orden p respecto del infinito x. 2.° La expresión

$$\varphi(x) = o(\varphi(x))$$
 cuando $x \mapsto a$

denota que

$$\varphi(x) = \alpha(x) \, \psi(x) \qquad (x \in U_a, \, x \neq a), \tag{3}$$

donde $\alpha(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$. Si $\psi(x) \neq 0$ para $x \in U_a$, $x \neq a$, la muldad (3) equivale a afirmar que

$$\lim_{x \to a} \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = 0.$$

3. Las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se llaman equivalentes $(\varphi(x) \sim \psi(x))$ cuando $x \longrightarrow a$, si

$$\varphi(x) \sim \psi(x) = o(\psi(x))$$
 Cuando $x \to a$. (4)

 $S_1 \psi(x) \neq 0$ para $x \in U_a$, $x \neq a$, entonces, de (4) se tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$$

Cuando $x \to 0$ se verifican las siguientes relaciones de equivalencia: $\sin x \sim x$; $\tan x$

En general,

$$\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x).$$

Al calcular el límite de la razón de dos funciones infinitésimas (o infinitas) cuando $x \longrightarrow a$, las funciones dadas se puec a, den sustituir por sus equivalentes.



Problemas:

645. Considerando que el ángulo central AOB = x (fig. 4) es un infinitésimo de 1.^{ex} orden, determinar el orden infinitesimal de las siguientes magnitudes: a) de la cuerda AB, b) de la sagita CD, c) del área del sector AOB; d) del área del triángulo ABC; e) del área del triapecio ABB_1A_1 ; f) del área del segmento ABC.

646. Sea o(f(x)) una función arbitraria que tenga un orden de crecimiento menor que la función f(x) cuando $x \rightarrow a$, y sea O(f(x)) una función cualquiera que tenga el mismo orden de crecimiento que la función f(x) cuando $x \rightarrow a$, donde f(x) > 0.

Comprobar que

- a) o(o(f(x))) = o(f(x));
- d) O(O(f(x))) = O(f(x));
- b) O(o(f(x))) = o(f(x)),
- e) O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).
- c) o(O(f(x))) = o(f(x));
- 647. Supongamos que $x \rightarrow 0$ y que n > 0. Comprobar que
- a) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ es una constante);
- b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ (n < m);
- c) $O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m})$.

5. ORDEN INFINITESIMAL Y ORDEN DE CRECIMIENTO DE UNA FUNCION

648. Supongamos que $x \to +\infty$ y que n > 0. Comprobar que

- a) $CO(x^n) = O(x^n)$.
- b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ (n > m):
- c) $O(x^n) O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Demostrar que el símbolo ~ posee las propiedades: 1) reflexiva: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) simetria: si $\varphi(x) \sim \psi(x)$, entonces $\psi(x) \sim \varphi(x)$, 3) transitiva: si $\varphi(x) - \psi(x) y \psi(x) \sim \chi(x)$, entonces $\varphi(x) \sim \chi(x)$

650. Supongamos que $x \rightarrow 0$. Demostrar las signientes igualdades:

- a) $2x x^2 = 0$ (x); e) $\sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}} \sim \sqrt[5]{x}$:
- b) $x \sin \sqrt{x} = O((x^{\frac{1}{2}});$ f) $\arcsin \frac{1}{x} = O(1);$
- c) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|);$ g) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x).$
- d) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad (z > 0);$

651. Supongamos que $x \rightarrow +\infty$. Demostrar las siguientes igualda-

- a) $2x^3 3x^2 + 1 = O(x^3);$ e) an $x = o(x^3)$ ($\epsilon > 0$);
- b) $\frac{x+1}{x^2+1} \Longrightarrow O\left(\frac{1}{x}\right);$ f) $x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right);$
- c) $x + x^2 \sin x = O(x^2)$; g) 1/x + 1/x 1/x
- d) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^4}\right);$
- h) $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^3$.

652. Demostrar que para x suficientemente grande se venfican las desigualdades.

- a) $x^2 + 10x + 100 < 0.001 x^2$; c) $x^{10}e^x < e^{2x}$.

b) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$:

652.1. Demostrar la fórmula asintótica

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O(\frac{1}{x})$$

cuando x -+ + 00.

653. Supongamos que $x \rightarrow 0$. Hallar el término principal de la forma Cxn (C es una constante) y determinar el orden infinitesimal respecto de la variable x para las funciones signientes.

- c) $\sqrt{1-2x}-\frac{3}{1}\sqrt{1-3x}$;
- a) $2x 3x^{4} + x^{5}$; c) $\sqrt{1 2x}$ b) $\sqrt{1 + x} \sqrt{1 x}$; d) $\lg x \sin x$,

654. Supongamos que $x \longrightarrow 0$. Comprobar que las funciones infinitésamas

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

son incomparables con la función x^n (n > 0), cualquiera que sea n, es decir. nunca se verifica la igualdad $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x^n} = k$, donde k es una constante, distinta de cero, y n es arbitrario

655. Supongamos que $x \rightarrow 1$. Hallar el término principal de la forma C(x - 1)" y determinar el orden nfinitesimal respecto de la función infinitésima x-1 para las funciones signientes:

- a) $x^{4} = 3x + 2$; c) in x; e) $x^{4} = 1$.
- b) 3/1 1/1 d) e= -e;

656. Supongamos que x → + ∞. Hallar el término principal de la forma Cxn y determinar el orden de crecimiento respecto de la función infinita x para las funciones siguientes

- a) $x^{3} + 100x + 10000$; c) $\sqrt[3]{x^{3} x} + \sqrt{x}$, b) $\frac{2x^{3}}{x^{3} 6x + 1}$; d) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

657. Supongamos que x → + ∞. Hallar el término principal de la forma $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ y determinar el orden infinitesimal respecto de la función infinitésima 🔓 pa a las funciones siguientes

- a) $\frac{1}{x} = \frac{1}{1}$, c) $1/x + \frac{2}{2} 2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}$;
- b) $\sqrt{z+1} \sqrt{x}$, d) $\sqrt{\sin \frac{1}{x}}$.

658. Supongamos que $x \rightarrow 1$. Hallar el término principal de la forma $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ y determinar el orden de crecimiento respecto de la función infinita 🔭 para las funciones siguientes.

- a) $\frac{x^3}{x^2-1}$; c) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; e) $\frac{\ln x}{(1-x)^3}$.
- b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ d) $\frac{1+x}{\sin \pi x}$;
- 659. Supongamos que $x \to + \infty$ y que $f_n(x) = x^n$ (n = 1, 2 ...). Demostrar que 1) cada una de las funciones $f_n(x)$ crece más rápidamente que la precedente $f_{n-1}(x)$; 2) la función e^x crece más rápidamente que cada una de las funciones f_n (x) (n = 1, 2, ...).

660. Supongamos que $x \rightarrow + \infty$ y que

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x}$$
 $(n = 1, 2, \ldots),$

Demostrar que: 1) cada una de las funciones $f_n(x)$ crece más lentamente que la precedente $f_{n-1}(x)$; 2) la función $f(x) = \ln x$ crece más lentamente que cada una de las funciones $f_n(x)$ (n=1, 2, ...).

661. Demostrar que, cualquiera que sea la sucesión de funciones

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots (x_0 < x < +\infty),$$

siempre se puede construir una función f(x) que crezca más rápidamente que cada una de las funciones $f_n(x)$ (n=1, 2, ...) cuando $x \to \infty$

§ 7. Continuidad de una función

... Continuidad de una función. Una función f(x) se llama continua para $x = x_0$ (o en el punto x_0), si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) == f(x_0), \quad$$

es decir, si la función f(x) está definida en $x = x_0$ y para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta$ $(\epsilon, x_0) > 0$ tal que, siendo $|x - x_0| < \delta$, para todos los valores f(x) que tienen sentido se verifica la designaldad

$$1/(x) + f(x_0)_0 < \epsilon_0$$

Una función f(x) se llama continua en un conjunto dado $X = \{x\}$ (en un intervalo, en un segmento, etc.), si esta función es continua en cada punto del comunto X.

Si, para cierto valor $x = x_0$, perteneciente al campo de definición $X = \{x\}$ de la función f(x) o que sea un punto de acumulación de este conjunto, no se cumple la igualdad (1) (es decir, o bien (a) no existe el número $f(x_0)$, o sea, la función no está definida en el punto $x = x_0$, o bien (b) no existe el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$, o bien (c) ambos miembros de la igualdad (1) tienen sentido, pero no se verifica la igualdad), entonces x_0 se llama punto de discontinuidad de la función f(x).

Se distinguen 1) puntos x_0 de discontinuidad de primera especie, para los cuales existen límites laterales finitos:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - \frac{1}{2}} f(x) \quad \mathbf{y} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

y 2) puntos de discontinuidad de segunda especie, que son todos los demás. La diferencia

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

se lama salto de la función en el punto xo.

$$I(x_n + 0) = I(x_1 + 0),$$

el punto de discontinuidad x_0 se llama evitable. Si al menos uno de los límites laterales $f(x_0 - 0)$ o $f(x_0 + 0)$ es igual a ∞ , entonces x_0 se llama punto de discontinuidad infinita.

Si se venfica la igualdad

$$f(x_0 - 0) = f(x_0)$$
 (a bien $f(x_0 + 0) = f(x_0)$).

se dice que la función f(x) es continua en el punto x_0 a la izquierda (a la derecha). Para la continuidad de la función f(x) en el punto x_0 es necesario y suficiente la igualdad de los tres números

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2.° Continuidad de las funciones elementales. Si las funciones f(x) y g(x) son continuas para $x = x_0$, las funciones

a)
$$f(x) \pm g(x)$$
; b) $f(x) g(x)$; c) $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$

también son continuas para $x = x_0$.

En particular: a) la función racional entera

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

es continua para cualquier x, b) la función racional fraccionaria

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

es continua para todos los valores x que no anulan al denominador

En general, las funciones elementales principales x^n , sen x, cos x, tg x, a^x , $\log_a x$, arcsen x, arccos x, arctg x, ..., son continuas en todos sus puntos de definición.

Un resultado más general es el siguiente si la función f(x) es continua para $x = x_0$ y la función g(y) es continua para $y = f(x_0)$, la función g(f(x)) es continua para $x = x_0$.

3. Teoremas fundamentales sobre las funciones continuas. Si la función f(x) es continua en el segmento [a,b], entonces. 1) f(x) está acotada en este segmento, 2) alcanza en el mismo el finfimo m y el supremo M (teorema de Weierstrass), 3) toma en cada intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ todos los valores intermed.os entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ (teorema de Cauchy). En particular, si $f(\alpha)f(\beta) < 0$, existe un valor γ ($\alpha < \gamma < \beta$) tal que $f(\gamma) = 0$.

Problemas.

- 662. Se da la gráfica de una función continua y = f(x). Para un punto fijado a y un número $\varepsilon > 0$, indicar geométricamente un número $\delta > 0$ tal que sea $|f(x) f(a)| < \varepsilon$ para $|x a| < \delta$.
- 663. Se necesita hacer una placa metál.ca cuadrada de lado $x_0 = 10$ cm. ¿Entre qué límites se puede alterar el lado x de esta placa, si su área $y = x^2$ puede diferenciarse de la proyectada $y_0 = 100$ cm² no más de. a) ± 1 cm², b) ± 0 , l cm²; c) ± 0.01 cm²; d) $\pm e$ cm²?
- 664. El ansta de un cubo está comprendida entre 2 m y 3 m. ¿Con qué error absoluto Δ está permutido medir el área x de este cubo para que pueda calcularse su volumen y con un error absoluto no superior a e m³, si. a) e=0.1 m³; b) e=0.01 m³; c) e=0.001 m³?
- 665. ¿En qué entorno máximo del punto $x_0 = 100$ la ordenada de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ se diferencia de la ordenada $y_0 = 10$ en una cantidad menor que $e = 10^{-n}$ $(n \ge 0)$? Calcular la amplitud de este entorno para n = 0, 1, 2, 3.
- 666. Mediante razonamientos (($\epsilon \delta$)), demostrar que la función $f(x) = x^2$ es continua para x = 5.

Rellenar la signiente tabla.

E	1	0,1	0,01	100,0	1.
8					

667. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ y z = 0.001. Para les valores $x_0 = 0.1$; 0.01; 0.001; ..., hallar les númeres positives más grandes $\delta = \delta$ (ε , x_0), tales que de la designaldad $|x - x_0| < \delta$ se deduzca la designaldad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

"Es posible, para el número dado s = 0.001, elegir un $\delta > 0$ que surva para todos los valores x_0 del intervalo (0, 1), es decir, tal que, si $|x - x_0| < \delta$, sea $|f(x)| |f(x_0)| < \delta$ cualquiera que sea el valor $x_0 \in (0, 1)$?

- 668. Formular en términos de $(s \delta)$, en sentido positivo, la afirmación siguiente la función f(x), definida en el punto x_0 , no es continua en este punto
- 669. Supongamos que para ciertos números $\varepsilon > 0$ se pueden hallar los números correspondientes $\delta = \delta$ $(\varepsilon, x_0) > 0$, tales que $f(x) f(x_0)$; $\langle \varepsilon \sin | x x_0 | < \delta$.

Se puede afirmar que la función f(x) es continua en el punto x_0 , si:

a) los números e forman un conjunto finito, b) los números e forman un conjunto infinito de fracciones binarias $s=\frac{1}{2^n}$ (n=1,2,...).

670. Sea dada la función

$$f(x) = x + 0.001 [x],$$

Comprobar que para cada $\epsilon > 0.001$ se puede hallar un número $\delta = \delta$ (ϵ , x) > 0, tal que $|f(x') - f(x)| < \epsilon$ si $|x' - x| < \delta$, mientras que para $0 < \epsilon \le 0.001$ no se puede hacer esto para todos los valores de x. En qué puntos deja de ser continua esta función?

671, Supongamos que para cada número $\delta > 0$, suficientemente pequeño, existe un número ϵ e $(\delta, x_0) > 0$, tal que se verifica la designaldad $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Se deduce de aquí que la función f(x) es continua para $x = x_0$? Qué propiedad de la función f(x) se describe por las designaldades dadas?

672. Supongamos que para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta$ (ϵ , x_0) > 0 tal que, si $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se tiene $|x| |x_0| < \delta$. Se deduce de aqui que la función f(x) es continua para el valor $x = x_0$? Qué propiedad de la función se describe por estas desigualdades?

673 Supongamos que para cada número $\delta > 0$ existe un número $\epsilon = \epsilon (\delta_{x}x_{0}) > 0$ tal que, si $|f(x) - f(x_{0})| < \epsilon$ se tiene $|x - x_{0}| < \delta$. Se deduce de aqui que la función f(x) es continua para $x = x_{0}$? Qué propiedad de la función f(x) se describe por las designaldades dadas?

Examinar el ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \arctan g(x), & \text{si } x \text{ es racional}, \\ \pi = \operatorname{ard} g(x), & \text{si } x \text{ es irracional}. \end{cases}$$

674. Aplicando razonamientos $(e - \delta)$, demostrar que las funciones que siguen son continuas: a) ax + b, b) x^2 ; c) x^3 ; d) \sqrt{x} ; e) $\sqrt[3]{x}$; f) sen x, g) $\cos x$; h) $\arcsin x$.

Estudiar la continuidad y representar gráficamente las funciones siguientes.

675.
$$f(x) = |x|$$

876.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x \neq 2; \\ x - 2, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

677.
$$f(x) \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^5}$$
, si $x \neq -1$ y $f(-1)$ es arbitrario

678. a)
$$f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$$
, si $x \neq 0$ y $f_1(0) = 1$.

b)
$$f_{x}(x) = \frac{\sin x}{|x|}$$
, so $x \neq 0$ y $f_{x}(0) = 1$

679. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y f(0) as arbitrario

680. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y f(0) = 0.

681. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, so $x \neq 0$ y f(0) = 0

682. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{x-1}}$, $s_1 x \ne 1$ y f(1) es arbitrano.

683, $f(x) = x \ln x^2$, so $x \neq 0$ y f(0) = a.

684. f(x) = sgn x.

685. f(x) = [x].

686. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

Hallar los puntos de discontinuidad y estudiar el carácter de estos puntos, st.

687.
$$y = \frac{x}{11 + xl^3}$$

687.
$$y = \frac{x}{(x + x)^3}$$
. 694. $y = sgn(sin \frac{\pi}{x})$.

688
$$y = \frac{1+x}{1+x^3}$$

658
$$y = \frac{1+x}{1+x^3}$$
. 695, $y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}$.

689.
$$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$$
.

696.
$$y = arctg \frac{1}{4}$$
.

690
$$y = \frac{x^2 - x + 1}{\frac{1}{x^2 - 1}}$$
.
697. $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.
698. $y = e^{x + \frac{1}{x}}$.

697.
$$y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

691.
$$y = \frac{x}{\sin x}$$
.

$$699. y = \frac{1}{\ln x}.$$

$$700. y = \frac{1}{-c^{\frac{x}{1-c}}}.$$

Estudiar la continuidad y dibujar los diseños de las gráficas de las signientes funciones:

701.
$$y = \operatorname{sgn}(\sin x)$$
.

703.
$$y = x[x]$$
.

702.
$$y = x - |x|$$
.

704.
$$y = [x] \sin \pi x$$
.

706.
$$y = x^2 - (x^2)$$
.
709. $y = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} \end{bmatrix} sgr(sn\frac{\pi}{x})$.
710. $y = cig \frac{\pi}{x}$.

707.
$$y = x \left[\frac{1}{x} \right]$$
. 711. $y = \sec^2 \frac{1}{x}$.

708.
$$y = sgn\left(cos\frac{1}{x}\right)$$
. 712. $y = (-1)^{\frac{1}{x^2-1}}$

713.
$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$$
.

714.
$$y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}$$
 717. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

715.
$$y = \frac{1}{\sin(x^2)}$$
. 718. $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$

716.
$$y = \ln \frac{x^4}{(x+1)(x-3)}$$
. 719. $y = th \frac{2x}{1-x^4}$

Estudiar la continuidad y construir las gráficas de las siguientes functiones.

720.
$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + x^n} (x \ge 0)$$
. 725. $y = \lim_{n \to \infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)]$.
721. $y = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$. 726. $y = \lim_{n \to \infty} \frac{x + x^4 e^{0x}}{1 + e^{0x}}$.

725.
$$y = \lim_{n \to \infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)]$$

721.
$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$$

726.
$$y = \int_{0}^{\infty} \frac{x + x^4 e^{0x}}{1 + e^{0x}}$$

722.
$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$$
.

722.
$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$$
. 727. $y = \lim_{l \to +\infty} \frac{\ln (1 + e^{xl})}{\ln (1 + e^{l})}$.

723.
$$y = \lim_{n \to \infty} \cos^{n} x$$
. 728. $y = \lim_{n \to +\infty} (1 + x) \ln nx$.

724.
$$y = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{nn}}$$
.

729. Es continua la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

730. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0, \\ a + x, & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

¿Cómo se debe elegir el número a para que la función f(x) sea continua?

731. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones y establecer el caracter de los puntos de discontinuidad, si:

a)
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{para } 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{para } 1 < x \le 2; \end{cases}$$
b)
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x | \le 1, \\ 1 & \text{para } |x| > 1; \end{cases}$$
c)
$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{para } |x| \le 1, \\ |x-1| & \text{para } |x| > 1, \end{cases}$$
d)
$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \pi x & \text{para } x \text{ no entero,} \\ 0 & \text{para } x \text{ entero;} \end{cases}$$
e)
$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{para } x \text{ racional,} \\ 0 & \text{para } x \text{ irracional,} \end{cases}$$

732. La función d = d(x) representa la distancia mínima del punto x, del eje namérico Ox, al conjunto de sus puntos que está formado por los segmentos $0 \le x \le 1$ y $2 \le x \le 3$. Hallar la expresión analítica de la función d, construir su gráfica y estudiar su continuidad,

733 La figura E está formada por un triángulo de base 1 y altura 1 y por dos rectangulos de base 1 cada uno y de alturas 2 y 3 (fig. 5). La función S = S(y) $(0 \le y < +\infty)$ representa el área de la parte de la figura E que está compren-

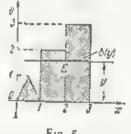


Fig. 5

d da entre las rectas paralelas Y = 0 e Y = y; la función b = b(y) $(0 \le 1 < +\infty)$ es la longitud de la sección de la figura E por la recta Y-y. Hallar las expresiones analíticas de las funciones S y b, construir sus gráficas y estudiar la continuidad.

734. Demostrar que la función de Dirichlet

$$\chi(x) = \lim_{m \to \infty} \left\{ \lim_{n \to \infty} \cos^n(\pi m! x) \right\}$$

es discontinua para cada valor x.

735. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = x\chi(x)$$

donde x (x) es la función de Dirichlet (véase el problema anterior). Construir el diseño de la gráfica de esta función.

736. Demostrar que la función de Riemann

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n}, \text{ dende } m \text{ y } n \text{ son números primos entre si,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

es discontinua para cada valor racional de x y es continua para cada valor irracional de x. Construir el diseño de la gráfica de esta función

737. Estudiar la continuidad de la función f(x), dada del modo siguiente.

$$f(x) = \frac{nx}{n+1},$$

 $\mathbf{x} \mathbf{x}$ es una fracción racional irreducible $\frac{m}{n} (n \ge 1)$, y

$$f(x) = |x|,$$

si x es un número arracional. Construir el diseño de la gráfica de esta función.

738. La función $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ está definida para todos los valores del argumento x, a excepción de x = 0 . Que valor debe asignarse a la función f(x) en el punto x = 0, para que sea continua para x = 0?

739. Comprobar que, cualquiera que sea la elección del número f(1), la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ siempre será discontinua para x = 1.

740. La función f(x) carece de sentido para x = 0. Determinar el número f(0) de tal modo que f(x) sea continua para x = 0, si.

a)
$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$$
;
b) $f(x) = \frac{(g 2x)}{x}$;
c) $f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}$;
d) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$;
e) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$;
f) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$;
g) $f(x) = x \ln^2 x$

741. "Es obligatoriamente discontinua en un punto dado x_0 la suma de dos funciones f(x) + g(x), si a) la función f(x) es continua y la función g(x) es discontinua para $x = x_0$; b) ambas funciones f(x) y g(x) son discontinuas para $x = x_0^{-\alpha}$

742. Es obligatoriamente discontinua en un punto dado xo el producto de dos funciones f(x)g(x), si a) la función f(x), es continua y la función g(x) es discontinua en este punto, b) ambas funciones f(x) y g(x) son discontinuas para $x = x_0$? Construir los ejemplos correspondientes,

743. ¿Se puede afirmar que el cuadrado de una función discontínua es también una función discontinua?

Construir un ejemplo de una función que sea discontinua en todos los puntos y cuyo cuadrado sea una función continua.

744. Estud, ar la continuidad de las funciones f[g(x)]yg[f(x)], si

- a) $f(x) = \operatorname{sgn} x \ y \ g(x) = 1 + x^2$:
- b) $f(x) = \operatorname{sgn} x \ y \ g(x) = x(1-x^{*});$
- c) $f(x) = \operatorname{sgn} x \ y \ g(x) = 1 + x [x]$,

745. Estudiar la continuidad de la función compuesta y = f(u), donde $u = \varphi(x)$, si

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{para } 0 < u \le 1; \\ 2 - u & \text{para } 1 < u < 2 \end{cases}$$

У

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \text{ racional,} \\ 2 - x & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

(0 < x < 1)

746. Demostrar que, si f(x) es una función continua, la función

$$F(x) \Longrightarrow |f(x)|$$

también es continua.

747. Demostrar que, si la función f(x) es continua, también lo es la función

$$f_{c}(x) = \begin{cases} -c, & \text{si} \quad f(x) < -c; \\ f(x), & \text{si} \quad f(x) \mid \leq c; \\ s, & \text{si} \quad f(x) > c. \end{cases}$$

donde e es un número positivo arbitrario.

748. Demostrar que, si la función f(x) es continua en el segmento [a, b], las funciones

$$m\left(x\right) = \inf_{\alpha \leqslant \xi \leqslant x} \left\{ \left/ \left(\xi\right)\right. \right\} \quad \text{y} \quad M\left(x\right) = \sup_{\alpha \leqslant \xi \leqslant x} \left\{ \left/ \left(\xi\right)\right. \right\}$$

también son continuas en a, b.

749. Demostrar que, si las funciones f(x) y g(x) son continuas, las funciones

$$\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\}\ y \ \psi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

tembién lo son.

750. Supongamos que la función f(x) está definida y acotada en el segmento [a, b]. Demostrar que las funciones

$$m(x) := \inf_{\alpha \le \xi < x} \{ (f(\xi)) \mid y \mid M(x) := \sup_{\alpha \le \xi < x} \{ f(\xi) \}$$

son continuas a la izquierda en el segmento [a, b].

751. Demostrar que, si la función f(x) es continua en el intervalo $a \le x < +\infty$ y existe el límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

entonces esta función está acotada en el intervalo dado.

752. Supongamos que la función f(x) es continua y está acotada en el intervalo $(x_0, +\infty)$ Demostrar que, cualquiera que sea el número T, existe una sucesión $x_n \mapsto +\infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

753. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones continuas periódicas, definidas para $-\infty < x < +\infty$, y

$$\lim_{x \to \pm \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Demostrar que

$$\varphi\left(x\right) \Longrightarrow \psi\left(x\right) .$$

754. Demostrar que todos los puntos de discontinuidad de una función monótona acotada son puntos de discontinuidad de 1º especie.

755. Demostrar que, si la función f(x) posee las propiedades siguientes. 1) está definida y es monótona en el segmento [a, b] 2) toma todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b), entonces esta función es continua en [a, b].

756. Comprobar que la función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$, si $x \neq a$ y f(a) = 0, toma en cualquier segmento [a, b] todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b), sin embargo, no es continua en [a, b].

757. Demostrar que, si la función f(x) es continua en el intervalo (a, b) y $x_1, x_2, ..., x_n$ son valores arbitrarios de este intervalo, entonces, entre ellos, siempre existe un número E tal que

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_i) + f(x_k) + \dots + f(x_n)].$$

758. Sea f(x) continua en el intervalo (a, b) y

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$
 y $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Demostrar que, cualquiera que sea el número λ , donde $l \leq \lambda \leq L$, existe una sucesión $x_n \longrightarrow a \ (n = 1, 2, ...)$, tal que

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)\to\lambda.$$

§ 8. Función inversa. Funciones en forma paramétrica

1º Existencia y continuidad de la función inversa, Si la función y = f(x) posee las siguientes propiedades. 1) está definida y es continua en el intervalo (a, b); 2) es monótona en sentido estricto en este intervalo, entonces existe una función inversa uniforme $x = f^{-1}(y)$, definida, continua y, respectivamente, monótona en sentido estricto en el intervalo (A, B), donde $A = \lim_{x \to a} f(x)$ y $B = \lim_{x \to b} f(x)$

Se entiende por rama uniforme continua de la función multiforme inversa de una función continua dada y = f(x), cualquier función uniforme continua x = g(y), definida en la region máxima de su existencia y que satisfaga en esta región a la ecuación f[g(y)] = y.

2.º Continuidad de una función dada en forma paramétrica. Si las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ están definidas y son continuas en el intervalo (α, β) y la funcion $\varphi(t)$ es estrictamente monôtona en este intervalo, el sistema de ecuaciones

$$x = \phi(t), \quad y = \phi(t)$$

determina a y como función uniforme y continua de x

$$y = \psi (\varphi^{-1}(x)),$$

en el intervalo (a, b), donde $a = \lim_{t \to a+b} \varphi(t)$ y $b = \lim_{t \to b+a} \varphi(t)$.

Problemas.

759. Hallar la función inversa de la función homográfica

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

¿En qué caso la función inversa coincide con la función dada?

760. Hallar la función inversa x = x(y), si

$$y = x + [x]$$
.

761. Comprobar que existe una función continua única y = y(x)(-∞ <x < + ∞) que satisface a la eci ación de Kepler

$$y = e \sin y = x \quad (0 \le e < 1).$$

762. Comprobar que la ecuación

$$\operatorname{ctg} x = kx$$

para cada número real k ($\sim < k < + \infty$) tiene en el intervalo $0 < x < \pi$ una raiz continua ûn.ca x = x (k).

763. "Puede tener función inversa uniforme una función no monó tona $y = f(x) (-\infty < x < +\infty)$? Examinar el ejemplo:

$$y = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ -x, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

764, ¿En qué caso la función y = f(x) y la función inversa $x = f^{-1}(y)$ representan una misma función?

765. Comprobar que la función inversa de la función discontínua

$$y = (1 + x^i) \operatorname{sgn} x$$

es una función continua.

766. Demostrar que, si la función f(x) está definida y es estrictamente monótona en el segmento [a, b] y

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \qquad (a \leqslant x_n \leqslant b),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

Determinar las ramas uniformes continuas de las funciones inversas para las siguientes funciones:

767.
$$y = x^2$$
. 770. $y = s \pi x$. 778. $y = 2x - x^2$. 771. $y = \cos x$.

768.
$$y = 2x - x^2$$
. 771. $y = \cos x$
769. $y = \frac{2x}{x}$. 772. $y = \lg x$.

769.
$$y = \frac{2x}{1+x^2}$$
. 772. $y = \lg x$

773. Comprobar que el conjunto de valores de la función continua

$$y = 1 + \sin x_i$$

correspondientes al intervalo (0 $< x < 2\pi$), es un segmento.

774. Demostrar la igualdad

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Demostrar la igualdad

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \qquad x \neq 0).$$

776. Demostrar el teorema de la suma para los arcos tangentes.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon \pi,$$

donde $t = \varepsilon(x, y)$ es una función que toma uno de los tres valores. 0, 1,

Para qué valores de y, para un valor dado de x, es posible una discontinu dad de la función e? Construir en el piano Oxy las regiones correspondientes de continuidad de la función e y determinar el valor de esta función en cada una de las regiones obtenidas

777 Demostrar el teorema de la suma para los arcos senos

$$\arcsin x + \arcsin y - (-1)^{\frac{1}{2}} \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) + \epsilon.t$$

 $\{|x_1 \leqslant 1, |y_1 \leqslant 1\}, \text{ donde }$

$$\varepsilon = 0$$
, si $xy \le 0$ 6 $x^2 + y^2 \le 1$,

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} x$$
, si $xy > 0$ y $x^2 + y^2 > 1$.

778. Demostrar el teorema de la suma para los arcos cosenos: $\arccos x - \arccos y = (-1)^5 \arccos (xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) + 2\pi s$ $||x| \le 1$, $|y| \le 1$, donde

$$e=0$$
, si $x+y \ge 0$,
 $e=1$, si $x+y < 0$.

779. Construir las gráficas de las funciones:

a)
$$y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1 - x^2}$$
;

b)
$$y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) - 2 \arcsin x$$
,

780. Hallar la función y = y (x), dada por las equaciones:

$$x = \operatorname{arctg} t$$
, $y = \operatorname{arcclg} t$ $(-\infty < t < +\infty)$.

En qué región está definida esta función? 781. Sea

$$x = \cosh t$$
, $y = \sinh t$ $(-\infty < t < +\infty)$.

. En qué regiones de variación del parámetro t se puede considerar la vanable y como función iniforme de la variable x? Hallar las expresiones de y para las diferentes regiones.

782. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema de ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

determine y como función uniforme de x? Examinar el ejemplo: $x = sen^2 t$, $y = cos^2 t$

783. ¿En qué condiciones dos sistemas de ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \quad y = \psi(\chi(\tau)) \quad (a < \tau < \beta)$$

determinan una misma función y = y(x)?

y

784. Supongamos que las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ están definidas y son continuas en el intervalo (a, b) y sean

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

iEn qué caso existe una función uniforme f(x), definida en el intervalo (A, B) y tal oue

$$\psi(x) = f(\varphi(x))$$
 para $\alpha < x < b$?

§ 9 Continuidad uniforme de una función

 1° Definición de continuidad uniforme. Una función f(x) se llama uniformemente continua en un conjunto dado (en un intervalo, segmento, etc.) $X - \{x\}$, si f(x) está definida en X y para cada $\epsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta$ (ϵ) > 0 tal que, para cualesquiera valores x', x" $\in X$, la desigualdad

$$\|x'-x^*\|<\delta$$

implica la desigualdad

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

 Teorema de Cantor. Una función f (x), definida y continua en un segmento acotado [a, b], es uniformemente continua en este segmento.

Problemas:

785. En el taller de una fabrica se producen láminas cuadradas cuyos lados x pueden tomar va,ores de 1 a 10 cm «Con qué tolerancia 8 se pueden faoncar los lados de estas láminas para que, independientemente de sus longitudes (entre los límites indicados), sus areas y se diferencien de la proyectada menos de a? Efectuar el calculo numerico, si

a)
$$e=1 \ cm^2$$
; b) $e=0.01 \ cm^2$; c) $e=0.0001 \ cm^2$

786. Un manguito cilíndrico de anchura ε y longitud δ está sujeto a ia curva $v = \sqrt[3]{x}$ y se desliza sobre ella de modo que su eje permanece paralelo al eje Ox A qué tene que ser igual 6 para que dicho manguito recorra libremente el trozo de la curva determinado por las designaldades $-10 \le x \le 10$, so a) $\epsilon - 1$, b) $\epsilon = 0.1$; c) $\epsilon = 0.01$, d) ϵ cs

787 Formular en terminos de « $\varepsilon - \delta n$, en sentido positivo, la afirmación la función f(x) es continua en c erto conjunto (en un intervalo, segmento, etc.), pero no es uniformemente continua en este conjun-

788. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es continua en el intervalo (0, 1), pero no es uniformemente continua

789. Comprobar que la función

$$f(x) \Longrightarrow \sin \frac{\pi}{x}$$

es continua y está acotada en el intervalo (0, 1), pero no es uniformemente continua en este intervalo.

790. Comprobar que la función

$$f(x) = \sin x^a$$

"s continua y está acotada en el intervalo infin.to $-\infty < x < +\infty$ pero no es uniformemente continua en este intervalo.

791. Demostrar que, si la función f(x) está definida y es continua en la región a ≤x < + ∞ y existe el límite finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

'ntonces f (x) es uniformemente continua en esta región.

792. Comprobar que la función no acotada

$$f(x) = x + \sin x$$

es uniformemente continua en todo el eje $\infty < x < +\infty$

793. Es uniformemente continua la función $f(x) = x^2$ en el intervalo. 1) (- 1/1), donde i es un número positivo cualquiera, arbitrariamente grande, b) en el intervalo (- 00, + 00)?

Estudiar la continuidad uniforme de las funciones que siguen, en las regiones dadas:

794.
$$f(x) = \frac{x}{4-x^2}$$
 $(-1 \le x \le 1)$.

795.
$$f(x) = \ln x$$
 {0 < x < 1).

798.
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$
 (0 < x < π).

797.
$$f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$$
 (0 < x < 1).

798.
$$f(x) \Rightarrow \operatorname{arctg} x$$
 $(-\infty < x < +\infty)$.

799.
$$f(x) = \sqrt{x}$$
 (1 < x < + ∞).

800.
$$f(x) = x \sin x$$
 $(0 \le x < +\infty)$.

801. Comprobar que la función $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ es uniformemente continua en cada intervalo

$$J_1 = (-1 < x < 0)$$
 y $J_2 = (0 < x < 1)$

por separado, pero no es uniformemente continua en su suma

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}.$$

801 1 Demostrar que, s. la función f(x) es uniformemente continua en cada uno de los segmentos [a, c] y [c, b], entonces esta función es umformemente continua en el segmento total [a, b].

802. Para $\varepsilon>0$ hallar $\delta-\delta$ (ε) (uno cualquiera) que satisfaga a las condiciones de continuidad uniforme para la funcion f(x) en el intervalo ndicado, si.

a)
$$f(x) = 5x - 3$$

$$(--\infty < x < +\infty);$$

$$(-2 \le x \le 5);$$

b)
$$f(x) = x^{2} - 2x - 1$$

c) $f(x) = \frac{1}{2}$

$$(0,1 \le x \le 1)$$
;

d)
$$f(x) = 1/x$$

$$(0 \le x < +\infty);$$

d)
$$f(x) = 1/x$$

e) $f(x) = 2 \sin x - \cos x$

f)
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} (x \neq 0)$$
 y $f(0) = 0$ $(0 \le x \le \pi)$.

803 . En cuantos segmentos, aguales entre sí, es suficiente dividir el segmento [1, 10] para que la oscilación de la función $f(x) = x^2$ en cada uno de estos segmentos sea menor que 0,0001?

804. Demostrar que la suma y el producto de un numero acotado de funciones uniformemente continuas en un intervalo (a, b) son uniformemente continuas en este intervalo.

805 Demostrar que, si una función monótona y acotada f(x) es continua en un intervalo finito o infinito (a, b), entonces esta función es uniformemente continua en el intervalo (a, b).

806 Demostrar que, si una función f(x) es uniformemente continua en un intervalo fin.to (a, b), entonces existen los límites

$$A = \lim_{x \to a + b} f(x) \ y \ B = \lim_{x \to b - b} f(x),$$

¿Es válido este teorema para un intervalo infinito (a, b)?

806.1 Demostrar que, para que una función f(x), definida y contrnua en un intervalo finito (a, b), pueda prolongarse continuamente en el segmento [a, b], es necesario y suficiente que la función f(x) sea uniformemente continua en el intervalo (a, b).

807. Se llama módulo de continuidad de una función f(x) en el intervalo (a, b) la función

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_i) - f(x_i)|,$$

donde x_1 y x_2 son puntos arbitrarios de (a, b), ligados por la condición $|x_1 - x_2| \leq \delta$

Demostrar que, para la continuidad uniforme de la función f(x) en el intervalo (a, b), es necesario y suficiente que

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_{f}(\delta) =\!\!\!= 0.$$

808. Obtener una cota para el módulo de continuidad $\omega_f(\delta)$ (véase el problema antenor) de la forma

$$\omega_r(\delta) \leq (\delta^2,$$

donde C y a son constantes, si

a)
$$f(x) = x^{2}$$

$$(0 \le x \le 1)$$

b)
$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x}}$$

b)
$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$
 $(0 \le x \le a) = (a < x < +\infty);$
c) $f(x) = \sin x + \cos x$ $(0 \le x \le a) = (a < x < +\infty);$

c) $f(x) = \sin x + \cos x$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

§ 10. Ecuaciones funcionales

Problemas.

809. Demostrar que la única función continua f(x)(-∞<x<+∞) que satisface a la ecuación

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

para todos los valores reales de x e y, es la función lineal homogénea

$$f(x) = ax$$

donde a = f(1) es una constante arbitraria.

810. Demostrar que una función monótona f(x) que satisfaga a la ecuación (1), es limeal homogénea.

811. Demostrar que una función f(x) que satisfaga a la ecuación (1). v esté acotada en un intervalo (e, e) arbitranamente pequeño, es lineal homogénea.

812. Demostrar que la única función continua f(x)(-∞<x<+∞), no idénticamente nula, que satisface a la ecuación

$$f(x+y) := f(x)f(y), \tag{2}$$

para todos los valores de x e y, es la función exponencial

$$f(x) = a^x$$

donde a = f(1) es una constante positiva.

813. Demostrar que la función f(x), no idénticamente nula, que esta acotada en el intervalo (0, e) y satisface a la ecuación (2), es la función exponencial.

814. Demostrar que la única función continua f(x) $(0 \le x \le +\infty)$, no idénticamente nula, que satisface a la ecuación

$$f(x | y) = f(x) + f(y),$$

para todos los valores positivos x e y, es la función logarítmica

$$f(x) = \log_n x$$

donde a es una constante positiva.

815. Demostrar que la única función continua f(x) $(0 < x < +\infty)$ no idénticamente nula, que satisface a la ecuación

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{3}$$

para todos los valores positivos x e y, es la función potencial

$$f(x) = x^a$$
,

donde a es una constante.

816. Hallar todas las funciones continuas f(x) ($-\infty < x < +\infty$) que satisfacen a la ecuación (3) para todos los valores reales de x e y.

817. Comprobar que la función discontinua

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

satisface a la ecuación (3).

818. Hallar todas las funciones continuas f(x) ($-\infty < x < +\infty$) que satisfacen a la ecuación

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$
.

para todos los valores reales de x e y.

819 Hallar todas las funciones continuas acotadas f(x) y g(x) $(-\infty < x < +\infty)$ que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$f(x + y - f(x) f(y) - g(x)g(y),$$

 $g(x + y) = f(x)g(y) - f(y)g(x),$

para todos los valores reales de x e y, y también a las condiciones de normalización

$$f(0) = 1$$
 y $g(0) = 0$,

Indicación. Examinar la función

$$f'(x) = f^{1}(x) + g^{1}(x)$$
.

820, Sean

y

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta^{s} f(x) == \Delta \{\Delta f(x)\}$$

las diferencias finitas de la función f(x) de primero y segundo órdenes, respectivamente

Demostrar que, si la función f(x) ($-\infty < x < +\infty$) es continua y

$$\Delta^3 f(x) \equiv 0$$
,

entonces esta función es lineal, es decir.

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b son constantes.

Calculo diferencial de las funciones . DE UNA VARIABLE

§ 1. Derivada de una función explícita

1.º Definición de derivada. Si x y $x_1 = x + \Delta x$ son valores de la variable independiente, la diferencia

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

se llama incremento de la función y = f(x) en el segmento $\{x, x_1\}$ La expresión

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1}$$

si tiene sentido, se llama derivada, y la función misma f(x) se llama en este caso derivable.

Geométricamente, el número f'(x) representa el coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función y = f(x) en su punto x (tg $\varphi = f'(x)$) (fig. 6).

2.º Reglas fundamentales de derivación. Si c es una constante y las

functiones u = u(x), v = v(x), w = w(x) son derivables, se tienc



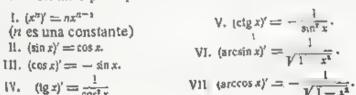
5)
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = u + v + u + v + v = v = 0$$
;

Fig. 6.

6) $(u^n)^n = nu^{n-1}u^n$ (n es una constante);

7) si las funciones y = f(u) y u = (x) son derivables, se tiene $y'_x = y'_x u'_x$.

3.º Fórmulas principales. Si x es la variable independiente, se tiene



VIII.
$$(\operatorname{arclg} x)' = \frac{t}{1 + x^2}$$
.

$$X_{11} (\sinh x)' = \cosh x$$

1X.
$$(arccig x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

XIII.
$$(\cosh x)' \Longrightarrow \sinh x$$
.

$$\frac{X_{+} (a^{X})' = a^{X} \ln a}{(a^{X})' = a^{X}} \ln a \quad (a > 1)$$

XIV.
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$
.

IX.
$$(arccig x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
. XII). $(ch x)' = ch x$.
X. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$; XIV. $(ch x)' = \frac{1}{ch^2 x}$.
XI $(ag_a x) = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0)$; XV. $(ch x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.
 $(ax)' = \frac{1}{x}$.

XV.
$$(\cosh x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$
.

4.º Derivadas laterales, Las expresiones

$$f_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to -a} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to +a} \frac{f(x + \Delta x)}{\Delta x} \quad f(x)$$

se llaman derivada a la izquierda y a la derecha, respectivamente, de la función f(x) en el punto x.

Para la existencia de la derivada f'(x) es necesario y suficiente que

$$f_{+}(x) = f_{+}(x).$$

 $5.^{\circ}$ Derivada infinita. Si la función f(x) es continua en el punto x y

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{I(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

se dice que la función f(x) tiene en el punto x derivada infinita. En este caso, la tangente a la gráfica de la función y = f(x) en el punto x es

Problemas.

- 821. Determinar el incremento Δx del argumento x y el incremento correspondiente Δy de la función $y = \lg x$, si x varía desde 1 hasta
- 822. Determinar el incremento Δx del argumento x y el incremento correspondiente Δy de la funcion $y = \frac{1}{x^2}$, si x varia desde 0,01 hasta
- 823. La variable x obtiene un incremento Δx. Determinar el incremento Ay, si:

a)
$$y = ax + b$$
; b) $y = ax^{4} + bx + c$; c) $y = a^{x}$.

824. Demostrar que:

a) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

b) $\Delta [f(x)g(x)] \approx g(x + \Delta x) \Delta f(x) + f(x) \Delta g(x)$.

825. Por los puntos: A (2, 4) y A' (2 + Δx , 4 + Δy) de la curva $y - x^2$ se ha trazado la secante AA'. Hallar el coeficiente angular de esta

secante, si: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0.1$; c) $\Delta x = 0.01$; d) Δx es arbitranamente pequeño.

¿A qué es gual el coeficiente angular de la tangente a la curva dada

en el punto A?

826. El segmento $1 \le x \le 1 + h$ del eje Ox se aplica sobre el eje Oymudiante la función $y = x^3$. Determinar el coeficiente medio de dilatación y efectuar el cálculo numérico, si-

a)
$$h = 0.1$$
; b) $h = 0.01$; c) $h = 0.001$.

¿A que es igual el coeficiente de dilatación de esta aplicación en el punto x = 1?

827. La ley del movimiento de un punto sobre el eje Ox viene dada por la fórmula $x = 10t + 5t^2$.

donde t es el tiempo en segundos y x es la distancia en metros. Hailar la velocidad media en el intervalo de tiempo 20 ≤ t ≤ 20 + Δt y efectuar el calculo numenco, si a) $\Delta t = 1$, b) $\Delta t = 0.1$, c) $\Delta t = 0.01$. Cual es la velocidad del movamiento en el instante t = 20?

828. Partiendo de la definición de derivada, hallar directamente las derivadas de las siguientes funciones a) τ^2 , b) τ^3 c) $\frac{1}{\tau}$, d) $\sqrt{\tau}$ e) $\sqrt[3]{\tau}$ f) tg x; g)etg x; h) arcsen x; i) arccos x, j) arctg x.

Calcular f' (1), f' (2) y f' (3), si

$$f(x) := (x-1)(x-2)^{x}(x-3)^{x}$$

830. Calcular f' (2), si

$$f(x) := x^* \sin(x - 2).$$

831. Calcular f'(1), si

$$f(x) = x + (x - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x + 1}}.$$

832. Hailar

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

si la función f(x) es derivable en el punto a

833. Demostrar que, si la función f(x) es derivable y n es un número natural, se tiene

 $\lim_{n \to \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] \Longrightarrow f'(x).$,1)

Reciprocamente, si para la función f(x) existe el límite (1), ¿se puede afirmar que esta función admite denvada? Examinar el ejemplo de la funcion de Dirichlet (véase el cap. I, problema 734),

Utilizando la tabla de denvadas, hallar las derivadas de las siguientes

functiones:

834.
$$y=2+x-x^{2}$$

[A qué es igual
$$y'(0)$$
; $y'(\frac{1}{2})$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835.
$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - 2x$$
.

Para qué valores de x: a) y'(x) = 0; b) y'(x) = -2, c) y'(x) = 10?

836.
$$y=a^a+5a^ax^a-x^a$$
. 838. $y=(x-a)(x-b)$.

838.
$$y = (x - a)(x - b)$$

837.
$$y = \frac{ax + b}{ax + b}$$
.

837.
$$y = \frac{ax + b}{a + b}$$
.
839. $y = (x + 1)(x + 2)^{3}(x + 3)^{3}$.

840.
$$y = (x \sin \alpha + \cos \alpha) (x \cos \alpha - \sin \alpha)$$
.

841.
$$y = (1 + nx^n)(1 + mx^n)$$
.

842.
$$y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^2)^3$$

842.1.
$$y = (5 + 2x)^{10}(3 - 4x)^{10}$$

843.
$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^2}$$
.

$$\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\left(cx + d\right)^{3}$$

Hallar las derivadas de las funciones:

845.
$$y = \frac{2x}{1-x^2}$$

850.
$$y = \frac{x^p + x^{p^2}}{4x^p}$$
.

846.
$$y = \frac{1-x}{1-x+x^2}$$

846.
$$y = \frac{1-x}{1-x+x^2}$$
. 851. $y = x + \sqrt{x+3/x}$.

847.
$$y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^2}$$

847.
$$y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^2}$$
. 852. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1/x} + \frac{1}{x^2/x}$.

848.
$$y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$$
. 853. $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2}}$.

853.
$$y = \sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2}}$$

849.
$$y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$$

849.
$$y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$$
 854. $y = x\sqrt{1-x}$.

855.
$$y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt{3+x^3}$$
, 860. $y = \sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+x^2}}}}$

856.
$$y = \sqrt[n+n]{(1-x)^n (1+x)^n}$$

856.
$$y = {n+n \over (1-x)^n} \frac{1}{(1-x)^n}$$
. 861. $y = \sqrt[3]{1-\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

857.
$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

862.
$$y = \cos 2x - 2 \sin x$$
.

858.
$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{1-x^2}}$$
.

863.
$$y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$
.

859.
$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}(x + \sqrt{1 + x^2})}$$
. 864. $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$.

864.
$$y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$$

865.
$$y = \sin^n x \cos nx$$
.

867.
$$y = \frac{\sin^3 x}{\sin x^2}$$
.

868.
$$y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x}$$
.

870.
$$y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$$
.

869. $y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

874.
$$y = \sec^2 \frac{x}{a} + \csc^2 \frac{x}{a}$$

871.
$$y = \lg \frac{x}{2} - \operatorname{clg} \frac{x}{2}$$
.

875.
$$y = \sin[\cos^2(tg^3 x)]$$
.
876. $y = e^{-x^3}$.

872
$$y = \lg x - \frac{1}{3} \lg^3 x + \frac{1}{5} \lg^5 x$$
. 877. $y = 2^{\lg \frac{1}{x}}$.

877.
$$y = 2^{\log \frac{1}{x}}$$
.

878.
$$y = 4\sqrt[4]{\operatorname{cig}^2 x} + \sqrt[4]{\operatorname{cig}^3 x}$$
 878. $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$.

878.
$$y = e^x (x^2 - 2x + 2)$$
.

879.
$$y = \left[\frac{1-x^3}{2}\sin x - \frac{(1+x)^3}{2}\cos x\right]e^{-x}$$
.

880,
$$y = e^x \left(1 + \text{ctg} \frac{x}{2}\right)$$

880.
$$y = e^{x} \left(1 + \text{ctg} \frac{x}{2}\right)$$
.
882. $y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
883. $y = e^{x} + e^{ax} + e^{ax}$.

681.
$$y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$$

883.
$$y = e^x + e^{e^x} + e^{e^x}$$

884.
$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b$$
.

885.
$$y = x^{a^2} + a^{x^2} + a^{a^2} + a^{a^2}$$
 (a > 0). 887. $y = \ln (\ln (\ln x))$. 888. $y = \ln (\ln^2 (\ln^3 x))$.

$$887. y = 10 (10 (10 x)).$$

186.
$$y = 4g^3 x^2$$
.

און) מו
$$=$$
ע .888

889.
$$y = \frac{1}{2} \ln (1+x) - \frac{1}{4} \ln (1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}$$

890.
$$y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$
.

891.
$$y = \frac{1}{4(1-x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}$$

892.
$$y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$
.

893.
$$y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$$
 (0 < k < 1).

894.
$$y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$$

895.
$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$
.

896.
$$y = x \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$$

897.
$$y = x \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x$$
.

898.
$$y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$
.

889.
$$y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$$
 $(a > 0, b > 0).$

900.
$$y = \frac{2+3x^2}{x^3} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$
.

901.
$$y = \ln \lg \frac{x}{2}$$
.

903.
$$y = \frac{1}{2} \operatorname{cl} g^2 x + \ln \sin x$$
.

902.
$$y = \ln \lg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$
.

902.
$$y = \ln \lg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$
. 904. $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

905.
$$y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}$$
.

906.
$$y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x}$$
 (0 < | a | < | b |).

907.
$$y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$$
.

908.
$$y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} = \frac{1}{16x^4}$$
.

909.
$$y = \frac{3}{2} \left(1 - \sqrt[3]{1+x^2}\right)^2 + 3 \ln \left(1 + \sqrt[3]{1+x^2}\right)$$
.

910.
$$y = \ln \left[\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right]$$
.

911.
$$y = x [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$$
.

912.
$$y = \ln \lg \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \lg x$$
.

916.
$$y = arctg \frac{x^2}{a}$$
.

913.
$$y = \arcsin \frac{x}{2}$$
,

916.
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{2}}{r}$$
.

914.
$$y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$$
.

917.
$$y = \sqrt{\frac{2}{x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{x}}$$

918.
$$y = x + \sqrt{1 - x^2}$$
 arccos x.

919.
$$y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctan \sqrt{x} = \sqrt{x}$$
.

920.
$$y = \arccos \frac{1}{x}$$
.

923.
$$y = \arcsin(\sin x - \cos x)$$
.

921.
$$y = \arcsin(\sin x)$$
.

924.
$$y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$$

922.
$$y = \arccos(\cos^2 x)$$
.

925.
$$y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$$

926.
$$y = \operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$$
.

927.
$$y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \ge 0).$$

928.
$$y = \arcsin \frac{1}{1 + x^2}$$
.

929.
$$y = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}$$

980.
$$y = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan (x^3)$$
.

931.
$$y = \ln (1 + \sin^2 x) - 2 \sin x$$
 arctg (sin x).

932.
$$y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$
.

233.
$$y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}$$
.

934.
$$y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$$
 (a > 0).

935.
$$y = \frac{1}{6} \ln \frac{(s+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

936.
$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x + \sqrt{2} + 1}{x^2 + x + \sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + 1}$$
.

937.
$$y = x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1 - x^2} \arctan x - 2x$$
.

938.
$$y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$$
.

939.
$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2}} = .$$

940.
$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - x}{1 + x}$$

941.
$$y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{1/3}{2x^2 - 1}$$
.

942.
$$y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \operatorname{arcctg} x^6$$
.

943.
$$y = \ln \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 + \sqrt{1 + 2}}}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg}^{-1/2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

944.
$$y = arctg \frac{x}{1+1-1-x^2}$$

945.
$$y = \operatorname{arcctg} \frac{a - 2x}{2 \sqrt[3]{ax} - x^3}$$
 $(a > 0)$.

946.
$$y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2 \arcsin \frac{1+x}{1/2}$$
.

947.
$$y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^2} + x}{\sqrt[4]{1+x^2} - x} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{x}$$

948.
$$y = arcig (tg^2 x)$$
.

949.
$$y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$$

950.
$$y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2$$
.

951.
$$y = \text{In} \left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} \right)$$
. 952. $y = \text{arctg} \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$.

953.
$$y = \arcsin\left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$$
.

954.
$$y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$$
.

955.
$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arclg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}$$

956.
$$y = \frac{x\sqrt[3]{1-x^2}}{1+x^3} = \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \frac{x\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1-x^2}}$$
.

957.
$$y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^4)$$
.

958.
$$y = \arcsin(s \pi x^2) + \arccos(\cos x^3)$$

959.
$$y = e^{\pi \arctan x} \left[\cos \left(m \arcsin x\right) + \sin \left(m \arcsin x\right)\right].$$

960.
$$y = \operatorname{arctg} e^{x} - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}}$$
.

960.1.
$$y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$$

960.2.
$$y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{cig} \frac{1}{x^2}}}}$$
.

960.3.
$$y = \ln^4 (\sec 2^{\frac{3}{2}})^{\frac{\pi}{2}}$$

961.
$$y = x + x^x + x^{x^2}$$
 $(x > 0)$

961.
$$y = x + x^{x} + x^{x^{2}}$$
 $(x > 0)$
962. $y = x^{x^{\alpha}} + x^{\alpha^{\alpha}} + a^{x^{\alpha}}$ $(x > 0)$

963.
$$y = \sqrt[x]{x}$$
 (x > 0).

965.
$$y = ((n x)^{x} \cdot x^{n x})$$

965.1.
$$y = \left[\frac{\arcsin\left(\sin^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}\right]^{\arctan x}$$

968.
$$y - \log_{10} e$$

967.
$$y = \ln (\cosh x) + \frac{3}{2 \cosh^2 x}$$
.

968.
$$y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x} - \ln\left(\operatorname{cth} \frac{x}{2}\right)$$
.

970.
$$y = \arccos\left(\frac{1}{\cot x}\right)$$
.

971.
$$y = \frac{b}{a} \times + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{arclg}\left(\sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{th} \frac{x}{2}\right) \quad (0 \le |b| < a).$$

972. Hallar la derivada de la función

$$y = \ln(\cos^4 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}),$$

introduciendo la variable intermedia $u = \cos^2 x$,

Aplicando el método indicado en el ejercicio 972, hallar las derivadas de las funciones:

978.
$$y = (\arccos x)^{1} \left[\ln^{2} (\sec \cos x) - \ln (\sec \cos x) + \frac{1}{2} \right].$$

974.
$$y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt[4]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \sqrt[4]{1+x^4+1} \sqrt{1+x^4-1}$$

975.
$$y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-xx^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-xx^2}).$$

976.
$$y = \frac{a^x}{1+a^{1x}} - \frac{1-a^{1x}}{1+a^{1x}}$$
 are eig a^{-x} .

977. Hallar las derivadas y construir las gráficas de las funciones y sus derivadas, si.

a)
$$y = |x|$$
; b) $y = x|x|$; c) $y = \ln |x|$.

978. Hallar las denvadas de las siguientes funciones.

a)
$$y = (x-1)^3 (x+1)^3$$
; c) $y = \arccos \frac{1}{x_1}$;

c)
$$y = \arccos \frac{1}{x_1}$$

b)
$$y = |\sin^2 x$$

b)
$$y = |\sin^2 x|$$
 d) $y = (x) \sin^2 \pi x$.

Hailar las denvadas y construir las gráficas de las funciones y sus ierivadas:

lerivadas

979.

$$y = \begin{cases}
1-x & \text{si } -\infty < x < 1; \\
1-x^{1/2}-x & \text{si } 1 \le x \le 2; \\
-(2-x) & \text{si } 2 < x < +\infty.
\end{cases}$$

980.
$$y = \begin{cases}
(x-a)^{2}(x-b)^{3} & \text{si } a \le x \le b; \\
0 & \text{fuera del segmento } [a, b].
\end{cases}$$

981.
$$y = \begin{cases}
x & \text{si } x < 0; \\
\ln(1+x) & \text{si } x \ge 0.
\end{cases}$$

982.
$$y = \begin{cases}
\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{si } |x| \le 1; \\
\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{si } |x| \le 1;
\end{cases}$$

983.
$$y = \begin{cases}
x^{2}e^{-x^{3}} & \text{si } |x| \le 1; \\
\frac{1}{e} & \text{si } |x| \le 1;
\end{cases}$$

980.
$$y = \begin{cases} (x-a)^2 (x-b)^2 & \text{if } a \le x \le b; \\ 0 & \text{fuera del segmento } [a, b]. \end{cases}$$

981.
$$y = \begin{cases} x & \text{si } x < 0. \\ \ln(1+x) & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

982.
$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{si} \ |x| \le 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{si} \ |x| > 1. \end{cases}$$

983.
$$y = \begin{cases} x^* e^{-x^*} & \text{si } |x| > 1 \\ \frac{1}{e} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

984. La derivada del logaritmo de la función dada se llama derivada logarítmica de dicha función:

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Hallar la derivada logarítmica de la función y, si:

a)
$$y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
;

a)
$$y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
; b) $y = (x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}...(x-a_n)^{a_n}$;

c)
$$y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}};$$
 d) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$.

d)
$$y = (x + \sqrt{1 + x^2})^n$$

985. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones derivables de x. Hallar la denvada de la fanción y, si

a)
$$y = \sqrt{\phi^2(x) + \psi^2(x)}$$
; b) $y = \text{arc tg } \frac{\phi(x)}{\psi(x)}$;

c)
$$y = \sqrt[q(x)]{\psi(x)}$$
 $(\varphi(x) \neq 0; \psi(x) > 0);$

d)
$$y = \log_{\Phi(x)} \psi(x)$$
 ($\Phi(x) > 0$; $\psi(x) > 0$)

986. Hallar y', si:

a)
$$y = f(x^2)$$
;

b)
$$y = f(e^x) e^{f(x)}$$

a)
$$y = f(x^2)$$
; b) $y = f(e^x) e^{f(x)}$; c) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$; d) $y = f\{f[f(x)]\}$,

$$y = f\{f[f(x)]\}.$$

donde f (u) es una función derivable.

986.1. Hallar f'(0), si:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-1000)$$

987. Demostrar la siguiente regla de denvación de un determinante de n-ésimo orden

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x)f_{12}(x) \dots f_{1n}(x) \\ f_{k1}(x)f_{k2}(x) \dots f_{kn}(x) \\ \vdots \\ f_{n1}(x)f_{n2}(x) \dots f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x)f_{12}(x) \dots f_{1n}(x) \\ \vdots \\ f_{n1}(x)f_{n2}(x) \dots f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

988. Hallar F'(x), si

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Hallar F'(x), si:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^3 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Se da la grafica de una función. Construir aproximadamente la gráfica de su derivada.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene derivada discontinua.

992. ¿Cuál es la condición para que la función

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x}$$
 $(x \neq 0)$ y $f(0) = 0$

sea: a) continua en x = 0; b) derivable en x = 0; c) admita derivada continua en x = 0?

993. ¿Cuál es la condición para que la función

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} (x \neq 0)$$
 y $f(0) = 0$ $(m > 0)$

admita: a) derivada acotada en un entorno dei origen de coordenadas. b) derivada no acotada en dicho entorno?

994. Hallar f'(a), si

$$f(x) = (x - a) \varphi(x),$$

y la función $\varphi(x)$ es continua en x = a.

995. Comprobat que la función

$$f(x) = {}^{1}x - a_{1}^{1} \varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función continua y $\varphi(a) \neq 0$, no admite derivada en el punto a.

A qué son iguales las derivadas laterales $f'_{-}(a)$ y $f'_{+}(a)^{2}$

996. Construir un ejemplo de una función continua que no tenga derivadas en los puntos dados a, , a2, ..., an.

997. Comprobar que en cualquier entorno del punto x = 0, la función

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|$$
 $(x \neq 0)$ y $f(0) = 0$

tiene puntos en los cuales la función no es derivable, a pesar de que la musma es derivable en el propio punto x = 0.

Construir el diseño de la gráfica de esta función.

998. Comprobar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{2}, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

admite derivada solamente para x = 0

999. Estudiar la dérivabilidad de las signientes funciones

a)
$$y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^8$$

c)
$$y = \pi^2 - x^2 |\sin^2 x_i^2|$$

b)
$$y = |\cos x|$$
;

d)
$$y = \arcsin(\cos x)$$
;

e)
$$y = \begin{cases} \frac{z-1}{4}(x+1)^2 & \text{si} \quad |x| \le 1; \\ |x|-1 & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Para la función f(x), hallar la derívada a la izquierda $f'_{-}(x)$ y la derivada a la derecha $f'_{+}(x)$, si

1000.
$$f(x) = |x|$$
.

1001.
$$f(x) = [x] \sin \pi x$$
.

1002.
$$f(x) = x \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

1003.
$$f(x) = \sqrt{\sin x^2}$$

1004.
$$f(x) = \frac{x}{1+e^{x}}$$
 $(x \neq 0), \quad f(0) = 0.$

1005.
$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$
 1006. $f(x) = |\ln |x|$ $(x \neq 0)$.

1007.
$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$
.

1008.
$$f(x) = (x-2) \arctan \frac{1}{x-2}$$
 ($x \neq 2$), $f(2) = 0$.

1009. Comprobar que la función
$$f(x) - x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{si} x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0$$
,

es continua en x = 0 pero no tiene en este punto derivada a la izquierda y denvada a la derecha.

1009.1. Sea xo un punto de discontinuidad de la especie de la función f(x). Las expresiones

$$f_{-}(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + f)}{h}$$

se llaman derivadas laterales generalizadas (a la izquierda y a la derecha, respectivamente) de la función f(x) en el punto x_0 .

Hallar $f'(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ en los puntos de discontinuidad x_0 de la función f(x), si

a)
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x};$$

a)
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$$
; c) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{x^2}}$.

b)
$$f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1+x}{1-x}$$
;

1010. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^{2}, & \text{si} \quad x < x_{0}; \\ \alpha x + b, & \text{si} \quad x > x_{0}. \end{cases}$$

Cômo se deben elegir los coeficientes a y b para que la función f(x)sea continue y derivable en el punto xo?

1011. Sca.

$$F(x) = \begin{cases} f(x)_1 & \text{si} & x \leq x_0; \\ \alpha x + b_1 & \text{si} & x > x_0. \end{cases}$$

donde la función f(x) es derivable a la izquierda en $x = x_0$. "Chal debe ser la elección de los coeficientes a y b de la función

F(x) para que ésta sea continua y denvable en el punto x_0 ?

1012. Construir en el segmento $a \le x \le b$ la conjugación de dos semirrectas

$$y = k_1(x-a)$$
 $(-\infty < x < a)$ e $y = k_1(x-b)$ $(b < x < +\infty)$

mediante la parábola cúbica

$$y = A(x - c)(x - b)(x - c),$$

donde los parámetros A y c deben ser elegidos adecuadamente.

1013. Completar la parte de la curva $y = \frac{m^2}{|x|} (|x| > c)$ mediante la parábola

$$y = a + bx^{n} \quad (|x| \le \epsilon)$$

(donde a y b son unos parámetros desconocidos), de tal modo que resulte una curva lisa.

1014. "Se puede afirmar que la suma

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

no admite derivada en el punto $x = x_0$, si: a) la función f(x) tiene denvada en el punto xo, y la función g (x) no tiene derivada en este punte; b) ambas funciones f(x) y g(x) no tienen derivada en el punto x_0 ?

1015. ¿Se puede afirmar que el producto

$$F(x) = f(x)g(x)$$

٦.

no admite derivada en el punto x_0 , si a) la función f(x) tiene derivada en el punto x_0 , y la función g(x) no tiene derivada en este punto, b) ambas funciones f(x) y g(x) no tienen derivada en el punto x_0 ?

Examinar los ejemplos a) f(x) = x, g(x) = |x|, b) f(x) = |x|, g(x) = |x|, donde g(x) = 0.

1016. ¿Qué se puede decir de la derivabilidad de la función

$$F(x) := f(g(x))$$

en el punto dado $x=x_0$, su a) la función f(x) tiene derivada en el punto $x=g(x_0)$, y la función g(x) no tiene derivada en el punto $x=x_0$, b) la función no tiene derivada en el punto $x=g(x_0)$, y la función g(x) tiene derivada en el punto $x=x_0$, c) la función f(x) no tiene derivada en el punto $x=g(x_0)$, y la función g(x) no tiene derivada en el punto $x=x_0$?

Examinar los ejemplos.

a)
$$f(x) = x^{x}$$
, $g(x) = x$; b) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^{x}$; c) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x$, donde $x_0 = 0$

1017. ¿En qué puntos la gráfica de la función

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

tiene tangente vertical?

Construir diena gráfica.

1018. ¿Puede tener una función f(x) en un punto de discontinuidad: a) derivada finita; b) derivada infinita? Examinar el ejemplo: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

1019. Si una función f(x) es derivable en un intervalo acotado (a, b)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

¿necesariamente tiene que ser

1)
$$\lim_{x \to a} f'(x) = \infty$$
; 2) $\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$?

Examinar el ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ cuando $x \to 0$.

1020. Si una función f(x) es derivable en un intervalo acotado (a, b)

$$\lim_{x\to a} f'(x) = \infty,$$

inecesanamente tiene que ser

$$\lim_{\kappa\to 0} f(\kappa) := \infty$$
?

Examinar el ejemplo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuando $x \to 0$.

1021. Supongamos que la función f(x) es derivable en el intervalo $(x_0, +\infty)$ y que existe $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Se deduce de esto que existe $\lim_{x\to +\infty} f'(x)$?

Examinar el ejemplo

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}.$$

1022. Supongamos que una función acotada f(x) es denvable en el intervalo $(x_0, +\infty)$ y que existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, ése deduce de esto que existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ finito o infinito?

Examinar el ejemplo

$$f(x) = \cos(\ln x)$$

1023. ¿Se puede denvar término a término una desigualdad entre las funciones?

1024. Deducir las fórmulas para las sumas:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^1 + ... + nx^{n-1}$$

У

$$Q_n = 1^n + 2^n x + 3^n x^n + \dots + n^n x^{n-1}$$

Indicación. Examinar $(x + x^2 + ... + x^n)'$.

1025. Deducir las fórmulas para las sumas

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$$

У

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \dots + n\cos nx.$$

1025 1. Deducir la formula para la suma:

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} 2x + \ldots + n \operatorname{ch} nx$$
.

Indicación. $S_n = (\sinh x + \sinh 2x + \dots + \sinh nx)^n$.

1026. Aplicando la identidad

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

deducir la fórmula para la suma

$$S_n = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \lg \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \lg \frac{x}{2^n}.$$

1027. Demostrar que la derivada de una función derivable par es una función impar, y que la denvada de una función denvable impar es una función par

Dar una interpretación geométrica de este hecho.

1028. Demostrar que la derivada de una función derivable penódica es de nuevo una función periódica del mismo período.

1029. ¿Con qué velocidad aumenta el área de un circulo en el momento en que su radio se hace igual a R = 10 cm, si dicho indio crece uniformemente con la velocidad 2 cm/s?

1030. ¿Con qué velocidad varían el área y la diagonal de un rectángulo en el momento en que uno de sus lados x = 20 m, y otro de sus lados v - 15 m, s. el primer lado disminuye con la velocidad de 1 m/s mientras que el segundo aumenta con la velocidad de 2 m/s?

1031 Desde un mísmo puerto salieron simultáneamente un barco A en dirección norte y un barco B en dirección este ¿Con que velocidad crece la distancia entre ellos, si la velocidad del barco A es igual a 30 km/h y la del barco B es igual a 40 km/h?

1032, Sea

$$f(x) = \begin{cases} x_1 & \text{si } 0 \le x \le 2, \\ 2x & 2, & \text{si } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

y sea S(x) el área de la superficie limitada por la curva y = f(x) el eje Ox y la perpendicular al eje Ox, trazada por el punto $x (x \ge 0)$.

Formar la expresión analítica de la función S(x), hallar la derivada S'(x) y construír la gráfica de la función y = S'(x).

1033. La función S (x) es el área de la superficie limitada por el arco de la circunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, el eje Ox y dos perpendiculares al eje Ox, trazadas por los puntos O y $x (|x| \le a)$.

Formar la expresión analítica de la función S(x), hallar la derivada S' (x) y construir la gráfica de esta derivada.

Derivada de una función dada en forma implicita,

1º Derivada de la función inversa. Una función derivable y = f(x)(a < x < b), con derivada $f'(x) \neq 0$, tiene funcion inversa uniforme y continua $x = f^{-1}(y)$, siendo también la función inversa denvable, y venficándose la formula

$$x_y' = \frac{1}{y_x'},$$

2.º Derivada de una función dada en forma paramétrica. El sistema de ecuaciones

donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son functiones denvables y $\varphi'(t) \neq 0$, determina a y, en cierta región, como función uniforme y derivable de x

$$y = \psi (\varphi^{-1}(x)),$$

la derivada de esta función puede hallarse por la fórmula

$$y_x' = \frac{y_t}{x_t}$$
.

3.º Derivada de una función dada en forma implicita. Si una función derivable y = v(x) satisface a la ecuación

$$F\left(z,\ y\right) =:0,$$

la derivada y' = y'(x) de esta función implicita puede hallarse de la ecuación

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

donde F (x 1) se considera como función compuesta de la variable x (Véase mas detalladamente respecto de las funciones implicitas derivables en la parte II, cap. VI, § 3.)

Problemas:

1034. Comprobar que existe una función uniforme y = y(x), definida por la ecuación y' + 3y = x

y hallar su denvada y'x

1035 Comprobar que existe una función uniforme y = y(x), definda por la ecuación

$$y - \varepsilon \sin y = x$$
 $(0 \le \varepsilon < 1)$

y hallar la derivada y'.

1036. Determinar los campos de existencia de las funciones inversas x = x(y) y hallar sus derivadas, si-

a)
$$y=x+\ln x$$
 ($x>0$); c) $y=\sinh x$;
b) $y=x+e^x$; d) $y=\ln x$.

b)
$$y = x + e^{x}$$

d)
$$y = \ln x$$
,

1037 Separar las ramas uniformes y continuas de las funciones inversas x = x (), halfar sus derivadas y construir las gráficas, si

a)
$$y = 2x^4 - x^4$$
; b) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$; c) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

1038 Construir el diseño de la gráfica de la función y - y(x) y hallar la derivada y(x), si x = -1 + 2t t^2 , $y = 2 - 3t + t^3$. A qué es igual $y_x(x)$ en x=-1? ¿En qué punto M(x,y) la derivada

Hallar las denvadas y'_x (los parámetros son positivos), si

1039.
$$x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t_1}}$$
 $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t_1}}$
1040. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.
1041. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.
1042. $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$.

1043.
$$x = a \cos^2 t$$
, $y = a \sin^2 t$.

1044.
$$x = a(t - \sin t)$$
, $y = a(1 - \cos t)$

1045.
$$x = e^{xt} \cos^2 t$$
, $y = e^{xt} \sin^2 t$.

1046.
$$x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arccos \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

1047. Comprobar que la función y = y(x), definida por el sistema de ecuaciones

$$x=2t+|t|, y=5t^2+4t|t|$$

es derivable para t = 0, a pesar de que su derivada en este punto no puede hallarse por la fórmula ordinaria.

Hallar las denvadas y'_x de las siguientes funciones, dadas en forma implicita

1048:
$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x$$
.
¿A qué es igual y' para $x = 2$ e $y = 4$, y para $x = 2$ e $y = 0$?
1049: $y^2 = 2px$ (parábola).

1050.
$$\frac{x^{0}}{a^{3}} + \frac{y^{2}}{b^{3}} = 1$$
 (elipse).

1051.
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$$
 (parabola).

1052.
$$x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$$
 (astroide).

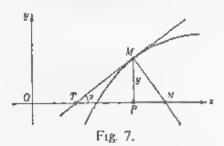
1058, arc ig
$$\frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$
 (espiral logaritmica)

- a) r= aφ (espiral de Arquímedes),
- b) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (cardioide),
- c) $r = ae^{mq}$ (espiral logarithmica),

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\phi = \arctan tg \stackrel{y}{\Rightarrow} son las coordenadas polares.$

§ 3. Significado geométrico de la derivada

1.º Ecclaciones de la tangente y de la normal. Las ecuaciones de la tangente MT y de la normal MV a la gráfica de una función derivable



y = f(x) en su panto M(x, y) (fig. 7), tienen la forma

$$Y = y = y' (X - x)$$

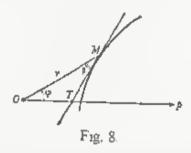
$$Y=y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

respectivamente, donde X, Y son las coordenadas vanables de la tangerte o de la normal e y' = f'(x) es el valor de la derivada en el punto de contacto.

2º Segmentos tangente y normal. Para los segmentos tangente y normal: PT es la subtangente, PN es la subnormal, MT es la tangente, MN es la normal (fig. 7); como tg $\varphi = y'$, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{split} PT &= \left| \begin{array}{c} \frac{g}{g'} \right|, & PN &= \left| \left| yg' \right|, \\ MT &= \left| \begin{array}{c} \frac{g}{g'} \right|, & V\overline{1 + g'^2}, & MN &= \left| g \right| \sqrt{1 + g'^2}. \end{split}$$

3.º Angulo formado por la tangente y el radio-vector en el punto de contacto. Si $r = f(\varphi)$ es la ecuación de la curva en un sistema polar de



coordenadas y β es el ángulo formado por la tangente MT y el radio-vector OM en el punto de contacto M (fig. 8), se tiene

Problemas.

1055. Escubir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

en los puntos a) A (-1, 0); b) B (2, 3); c) C (3, 0).

1056. ¿En qué puntos de la curva

$$y = 2 + x - x^2$$

la tangente a la misma. a) es paralela al eje Ox; b) es paralela a la bisectriz del primer ángulo coordenado?

1057. Demostrar que la parábola

$$y = \alpha (x - x_1) (x - x_2)$$
 $(\alpha \neq 0, x_1 < x_2)$

corta al eje Ox bajo unos ángulos α y β $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, que son iguales entre sí,

1058. Determinar en la curva

$$y = 2 \sin x \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

aquellos trozos en que la pendiente de la curva (o sea, | y |') es superior

1059. Las funciones

$$y = x + 0.01 \sin 1000 \pi x$$

se diferencian entre si no más de 0,01. ¿Qué se puede decir respecto del valor máximo de la diferencia de las derivadas de estas funciones?

Construir las gráficas correspondientes.

1060. "Bajo qué ángulo corta la curva

$$y = \ln x$$

el eje Ox?

1061. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas

$$y = x^x$$
 y $x = y^{1}$?

1062. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas

$$y = \sin x + e \quad y = \cos x$$
?

1063. ¿Cômo debe de elegirse el parâmetro n para que la curva

$$y = arc \lg nx$$
 $(n > 0)$

corte al eje Ox bajo un ángulo mayor que 89°?

1063.1. Comprobar que la curva

$$y = |x|^n$$

a) si 0 < a < 1 es tangente al eje Oy;

1063.2. Comprobar que la curva

$$y = \begin{cases} |x|^{n}, & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

es tangente al eje Oy en el punto A (0, 1).

1064. Determinar el ángulo formado por las tangentes a la izquierda y a la derecha a la curva: a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2 x^2}}$ en el punto x = 0, b) $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ en el punto x = 1

1065. Comprobar que la tangente a la espiral logaritmica

$$I \rightleftharpoons ae^{ia_1}$$

(a y m son constantes) forma un ángulo constante con el radio-vector en el punto de contacto.

1066. Determinar la longitud de la subtangente a la curva

$$y = ax^n$$

e indicar después un método de construcción de la tangente a esta curva.

1067. Demostrar que para la parábola

$$y^3 = 2px$$

a) la subtangente es igual al doble de la abscisa en el punto de contacto, b) la subnormal es constante. Ind car un método de construcción de la tangente a la parábola.

1068. Demostrar que la curva exponencial

$$y = a^x \qquad (a > 0)$$

tiene subtangente constante. Indicar un método de construcción de la tangente a la curva exponencial.

1069. Determinar la longitud de la normal a la catenaria

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

en cualquiera de sus puntos $M(x_0, y_0)$.

1070. Demostrar que, para la astroide

$$x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$$
 (a>0)

la longitud del segmento de la tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, es una cantidad constante.

1071. ¿Qué relación tiene que haber entre los coeficientes a, b y c, para que la parábola

$$y = ax^n + bx + c$$

sea tangente al eje Ox?

$$y=x^{4}+px+q$$

sea tangente al eje Ox?

1073. ¿Para qué valor del parámetro a, la parábola

$$y = ax^{a}$$

es tangente a la curva $y = \ln x^{\gamma}$

1074. Demostrar que las curvas

$$y = f(x) \qquad (f(x) > 0)$$

$$y = f(x) \sin ax$$

donde f(x) es una función derivable, son tangentes entre si en los puntos comunes.

1075. Comprobar que las familias de hipérbolas

$$x^3 - y^3 = a$$

У

У

$$xy = b$$

forman una red ortogonal, es decir, estas curvas se cortan bajo ángulos rectos.

1076. Demostrar que las familias de parábolas

$$y^2 = 4a(a - x)$$
 $(a > 0)$

$$y^2 = 4b(b+x)$$
 $(b>0)$

forman una red ortogonal.

1077. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$x = 2t - t^{4}, y = 3t - t^{4}$$

en los puntos. a) t = 0; b) t = 1.

1078. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva

$$x = \frac{2t + t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^2}.$$

en los puntos: a) t = 0, b) t = 1, c) $t = \infty$.

1079. Escribir la ecuación de la tangente a la cicloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

en un punto arbitrario $t=t_0$. Indicar un método de construcción de la tangente a la cicloide.

1080. Demostrar que, para la tractriz

$$x = a \left(\ln ig \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t \quad (a > 0, \ 0 < t < \pi)$$

el segmento tangente es de longitud constante.

Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal en os puntos dados a las siguientes curvas:

1081,
$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^4}{64} = 1$$
, $M(6; 6,4)$.

1082,
$$xy + \ln y = 1$$
, $M(1; 1)$.

§ 4. Diferencial de una función

1.º Diferencial de una función. Si el incremento de una función = f(x), de la variable independiente x, puede expresarse en la forma

$$\Delta y = A(x) dx + o(dx)$$

Jonde $dx = \Delta x$, entonces, la parte lineal de este incremento se llama diferencial de la función y

$$dy = A x dx$$

Para la existencia de la diferencial de una función y = f(x) es necesano y suficiente que exista derivada fimita y' = f'(x), verificándose la igual-

$$dy = y' dx$$
, (1)

La fórmula (1) conserva su validez también en el caso en que la anable x es una función de una nueva variable independiente (propiead de invariabilidad de la diferencial primera).

2º Acotación de pequeños incrementos de una función. Para calcar pequeños incrementos de una función diferenciable f(x) puede plicarse la fórmula

$$I(x + \Delta x) - I(x) \approx I'(x) \Delta x$$

1yo error relativo es arbitrariamente pequeño para valores suficientetente pequeños de $|\Delta x|$, si $f'(x) \neq 0$

$$\Delta_y = y' \Delta_x$$

$$\Delta_y = | |\ln |y||' | \Delta_x = \left| \frac{y'}{y} \right| \Delta x,$$

Problemas

y

1083. Para la función

$$f(x) = x' - 2x + 1$$

calcular 1) $\Delta f(1)$; 2) df(1) y compararlos entre sí, en los casos: a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = 0.1$, c) $\Delta x = 0.01$.

1084. La ecuación del movimiento viene dada por la fórmula

$$x = 5t^{\circ}$$
,

donde i se mide en segundos y x en metros.

Para el instante t=2 s, calcular Δx , que es el incremento del travecto, y dx, que es la diferencial del trayecto, en los casos:

a)
$$\Delta t = 1$$
 s; b) $\Delta t = 0.1$ s; c) $\Delta t = 0.001$ s.

Hallar la diferencial de la función y, si-

1085.
$$y = \frac{1}{x}$$
. 1088. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$

1088.
$$y = \frac{1}{a} \sec (g \frac{\mu}{a} \quad (a \neq 0).$$
 1089. $y = \arcsin \frac{\pi}{a} \quad (a \neq 0).$

1087.
$$y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$
.

1090. Hallar

e)
$$d(\sqrt{a^3+x^2})$$
:

f)
$$d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
;

c)
$$d\left(\frac{1}{x^4}\right)$$
;

d)
$$d\left(\frac{\ln x}{y/x}\right)$$

h)
$$d\left(\arccos\frac{l}{|x|}\right)$$
;

d)
$$d\left(\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\right)$$
; h) $d\left(\operatorname{arc cos} \frac{l}{|x|}\right)$;
i) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^{4}x} + \frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right)\right]\right]$.

Sean u, v. w funciones diferenciables de v. Hallar la diferencial de la función v. si

1091.
$$y = uvw$$

1094.
$$y = \operatorname{arctg} \frac{u}{u}$$
.

1092.
$$y = \frac{a}{v^2}$$
.

1095.
$$y = \ln \sqrt{u^1 + v^2}$$
.

1093.
$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}}$$
.

1096. Hallar a)
$$\frac{d}{dx^3}(x^2-2x^4-x^3)$$
;

b)
$$\frac{d}{d(x^2)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$
; d) $\frac{d(\log x)}{d(\cos x)}$;

d)
$$\frac{d(\lg x)}{d(\deg x)}$$
:

c)
$$\frac{d (\sin x)}{d (\cos x)}$$
;

c)
$$\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$$
; e) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. En un sector circular, R = 100 cm v el ángulo central $\alpha = 60^{\circ}$ ¿Cuanto variará el área de este sector, si a) se aumenta 1 cm su radio, R. b) se disminuye 30' el ángulo α? Indicar la solución exacta y la solución aproximada.

1098. El período de oscilación del péndulo (en segundos) se determina por la fórmula

$$T=2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}$$
,

donde l es la longitud del péndulo en centimetros y g = 981 cm s² es la aceleración de la fuerza de gravedad.

¿Cuánto se debe alterar la longitud de un péndulo / = 20 cm, para que el período T aumente 0,05 segundos?

Sustituyendo el incremento de la función por la diferencial, hallar aproximadamente los siguientes valores:

1102, arctg 1,05,

1100, sin 29°,

1103, ig 11,

1101, cos 151°.

1104. Demostrar la fórmula de aproximación

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$$
 $(a>0),$

donde $|x| \leqslant a$ (la relación $A \leqslant B$ entre las cantidades positivas $A \neq B$ denota que A es muy pequeño con respecto a B)

Aplicando esta fórmula, calcular aproximadamente

a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{34}$; c) $\sqrt{120}$ y compararlos con los datos de una tabla

1104.1. Demostrar la fórmula

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a} - r$$
 (a>0, x>0),

donde

$$0 < r < \frac{x^k}{8a^k}.$$

1105. Demostrar la fórmula de aproximación

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$$
 $(a > 0),$

donde | x | ≪ a

Aplicando esta fórmula, calcular aproximadamente:

1106. El lado de un cuadrado es x 2,4 m ± 0,05 m. ¿Con qué errores absoluto y relativo limites se puede calcular el área de este cuadrado?

1107. Con qué error relativo se admite medir el radio R de una bola, para que pueda determinarse su volumen con una exactitud de hasta el 1 % 5

1108. Para determinar la aceleración de la fuerza de gravedad mediante las oscilaciones de un péndulo se utiliza la formula

$$g = \frac{4\pi^{t}l}{T^{2}},$$

donde i es la longitud del péndulo y T es el período total de las oscilaciones del mismo. ¿Cómo influirá en el valor de g el error relativo ô al medir: a) la longitud l; b) el período T?

1109. Determinar el error absoluto del logaritmo decimal del númefox (x > 0), si el error relativo de este número es igual a δ .

1110 Demostrar que los ángulos obtenidos en una tabla logarítmica de tangentes se determinan con mayor exactitud que los obtenidos en una tabla logarítmica de senos que tenga el mismo número de cifras decimales.

§ 5. Derivadas y diferenciales de orden superior

1° Definiciones principales. Las derivadas de órdenes superiores de una función y = f(x) se definen sucesivamente por las relaciones (suponiendo que tienen sentido las operaciones correspondientes!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n+n)}(x)\}^r$$
 $(n = 2, 3, ...).$

Si una función f(x) admite derivada continua $f^{(n)}(x)$ en el intervalo (a, b), se escribe abreviadamente $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. En particular, si f(x) admite derivadas continuas de cualquier orden en (a, b), se emplea la expresión $f(x) \in C^{(w)}(a,b)$

Las diferenciales de órdenes superiores de una función y = f(x) se definen sucesivamente por las fórmulas

$$d^n y = d (d^{n-1} y)$$
. $(n = 2, 3, ...)$

donde se ha admitido que $d^1y = dy = y'dx$.

Si x es la variable independiente, se hace.

$$d^3x = d^3x = \dots = 0.$$

En este caso se venfican las fórmulas

$$d^{n}y = y^{(n)} dx^{n}$$
 e $y^{(n)} = \frac{d^{n}y}{dx^{n}}$

2.º Fórmulas fundamentales.

$$\label{eq:lambda} \begin{split} \mathrm{L} & = a^{\pi} | f^{n} = a^{\pi} | \eta^{n} | a = (a > 0), \qquad (\varepsilon^{\pi})^{(n)} = \varepsilon^{\pi}, \end{split}$$

If.
$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
.

III.
$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
.

IV.
$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)...(m-n-\frac{1}{k}1) x^{m-n}$$

$$V_{-}(p|x)^{in} = \frac{(-1)^{h+x}(n-1)!}{x^n}$$

3.º Fórmula de Leibniz. Si las funciones $u = \varphi(x)$ y $v = \psi(x)$ admiten derivadas de n-ésimo orden (son n veces derivables), se tiene

$$(uv)^{(n)} = \sum_{l=0}^{n} C'_{n}u^{(l)}v^{(n-l)},$$

donde $a^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ y C_n^i es el número de combinaciones i-anas de 2 elementos.

Análogamente, para la diferencial d' (uv), resulta-

$$d^n\left(uu\right) := \sum_{m=1}^n C_n^\ell d^{m-j} u d^j v_i$$

donde se ha hecho $d^0u = u y d^0v = v$.

Problemas.

Hallar y", si:

1111.
$$y=x\sqrt{1+x^2}$$
.

1115.
$$y = (1 + x^{t}) \arctan x$$
.

1112.
$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
.

1116.
$$y = \frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1113.
$$y = e^{-x^2}$$

1117.
$$y = x \ln x$$
.

1114.
$$y = \lg x$$
.

1118.
$$y = \ln f(x)$$
.

1119.
$$y = x [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)].$$

$$y = e^{sln x} \cos{(\sin x)}$$
.

Sean $u = \varphi(x)$ y $v = \psi(x)$ funciones que admiten derivadas hasta de segundo orden. Hallar y", si

1121.
$$y = u^2$$
.

1123.
$$y = \sqrt{u^1 + v^1}$$
.

1122.
$$y = \ln \frac{a}{x}$$
.

1124,
$$y = u^a \ \{u > 0\}.$$

Sea f(x) una función que admite derivadas hasta de tercer orden. Hallar y" = y", St

1125.
$$y = f(x^t)$$
.

1127.
$$y = f(e^x)$$
.

1126.
$$y = f\left(\frac{1}{x}\right)$$
.

1128.
$$y = f(\ln x)$$
.

1129. $y = f(\varphi(x))$, donde $\varphi(x)$ es una función derivable una cantidad suficiente de veces. Hallar y'' e y'''.

1130. Hallar d2 y para la función

$$y = e^x$$

en dos casos: a) x es la variable independiente; b) x es un argumento intermedia.

Considerando a x como variable independiente, hallar d^2y , si:

1131.
$$y = \sqrt{1 + x^2}$$
. 1132. $y = \frac{\ln x}{x}$. 1133. $y = x^x$.

1132.
$$y = \frac{\ln x}{x}$$

1183.
$$y = x^x$$
.

Sean u y v funciones de variable x, dos veces derivables. Hallar d^2y ,

1135.
$$y = \frac{u}{v}$$

1136. $y = u^n v^n$ (m y n son constantes).

1137.
$$y = a^a \ (a > 0)$$
.

1139.
$$y = arc \lg \frac{u}{n}$$
.

1138.
$$y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$$
.

Hallar las derivadas y'_x , y''_{x^3} , y'''_{x^3} , de la función y = y (x) dada en forma paramétrica, si

1140.
$$x = 2t - t^2$$
, $y = 3t - t^2$.

$$y = 3t - t^{*}$$
.

1141.
$$x = a \cos t$$
, $y = a \sin t$.

$$y = a \sin t$$
.

1142.
$$x = a(t - \sin t)$$
, $y = a \sin t$.

$$y = a(1 - \cos t)$$

1143.
$$x = e^t \cos t$$
, $y = e^t \sin t$.

$$y = e^t \sin t$$

1144.
$$x = f'(t)$$
.

1144.
$$x = f'(t)$$
. $y = tf'(t) - f(t)$.

1145 Supongamos que la función y = f(x) es derivable una cantidad suficiente de veces. Hallar las derivadas x', x'', x''', x^{1V} de la función inversa $x = f^{-1}(y)$, suponiendo que estas derivadas existen. Hallar y'_x , $y''_{x'}$ e $y'''_{x'}$ de la función y = y(x), dada en forma

implicita.

1146. $x^2 + y^2 = 25$. ¿A qué son iguales y', y'' e y''' en el punto M (3, 4)?

$$1147. y' = 2px$$

1148.
$$x^3 - xy + y^3 = 1$$
.

Hallar $y'_x \in y''_{x^2}$, si

1149.
$$y^4 + 2 \ln y = x^4$$
.

1150.
$$\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{a/c \log \frac{y}{x}}$$
 (a > 0).

1151. Sea f(x) una función definida y diferenciable dos veces para x ≤ x₀. ¿Cómo deben elegirse los coeficientes a, b y c para que la función

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq x_0; \\ a(x - x_0)^3 + b(x - x_0) + \epsilon, & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

sea diferenciable dos veces?

1152. La ley del movimiento rectilfneo de un punto es:

$$s = 10 + 20t - 5t^4$$

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento. ¿A qué son iguales la velocidad y la aceleración en el momento t = 2?

- 1153. El punto M(x, y) se mueve uniformemente sobre una circunferencia $x^2 + y^2 + a^2$, dando una vuelta en T segundos. Hallar la relocidad v y la aceleración / de la proyección del punto M sobre el eje $Q_{\mathbf{r}_{i}}$ a en el momento r=0 el punto ocupaba la posicion M_{0} (a,0).
- 1154. Un punto maternal pesado M (x, y) se ha lanzado en el plano vertical Oxy ba,o un ángulo a respecto del plano del horizonte, con una velocidad micial vo. Formar la ecuación del movimiento (despreciando la resistencia del aire) y determinar la magnitud de la velocidad p y la poeleración /, así como la trayectoria del movimiento. A qué son iguales la altura máxima del punto y el alcance?
 - 1155. Las ecuaciones del movimiento de un punto son

$$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t$$
, $y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$

(ω es una constante).

Determinar la trayectoria del movimiento y la magnitud de la velocidad v de la aceleración

Hallar las denvadas del orden indicado.

1156.
$$y = x(2x-1)^3(x+3)^4$$
; hallar $y^{(1)} \in y^{(2)}$.

1157.
$$y = \frac{a}{2m}$$
; hallar y''' .

1158.
$$y = \sqrt{x}$$
; hadar $y^{(19)}$.

1159.
$$y = \frac{x^2}{1 - x}$$
; hallar $y^{(1)}$.

1160.
$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
, hallar $y^{(186)}$.

1161.
$$y = x^1 e^{1x}$$
; hallar $y^{(x)}$.

1162,
$$y = \frac{e^x}{x}$$
; hallar $y^{(\cdot)}$

1163.
$$y = x \ln x$$
; hallar $y^{(i)}$.

1164.
$$y = \frac{\ln x}{2}$$
, haller y^{-x} .

1165.
$$y = x^{x} \sin 2x^{y}$$
 hallar $y^{(60)}$.

1166.
$$y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$$
; haller y''' .

1167.
$$y = \sin x \sin 2x \sin 3x$$
; hallar $y^{(18)}$

1168.
$$y = x \sin x$$
; hallar $y^{(100)}$.

1169.
$$y = e^x \cos x$$
; hallar y^{tV} .

1170.
$$y = \sin^4 x \ln x$$
; hallar $y^{(6)}$.

En los ejercicios que siguen, hallar las diferenciales del orden indicado, considerando a x como variable independiente.

CAPITULO 2. CALCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1171. $y = x^{i}$;	hallar	d'y.
1172. $y = \frac{1}{\sqrt{x}};$	hallar	$d^{s}y$
1173. $y = x \cos 2x$; 1174. $y = e^x \ln x$;	hallar hadar	
1175. $y = \cos x \cdot \cosh x$	hallar	

En los ejercicios que siguen, hallar las diferenciales del orden indicado, si u es una función de x que es diferenciable una cantidad suficiente

1176, $y = u^2$;	hallar	J10
1177. $y = e^{z}$;	hallar	_
1178. $y = i \pi u$;	hallar	

1179 Hallar d^2y , d^3y y d^4y para la función y = f(x), considerando a x como función de cierta variable independiente.

1180. Expresar las derivadas $y'' \in y'''$ de la función y = f(x) mediante las diferenciales sucesivas de las variables $x \in y$, sin suponer que x sea variable independiente

1181. Comprobar que la función

$$y = C_1 \cos x + C_1 \sin x$$
,

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, satisface a la ecuación

$$y^* + y = 0$$
.

1182. Comprobar que la función

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, satisface a la ecuación

$$y''-y=0$$
.

1183. Comprobar que la función

$$y - C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_3 x}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y λ_1 , λ_2 son constantes, satisface a la ecuación

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$$

1184. Comprobar que la función . .

$$y = x^n [C, \cos(nx) + C, \sin(\ln x)],$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y n es una constante, satisface a la ecuación

$$x^{n}y'' + (1-2n)xy' + (1+n^{2})y = 0.$$

1185. Comprobar que la función

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{x}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{x}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes arbitrarias, satisface a la ecuación

$$y^{\vee} + y = 0$$

1186 Demostrar que, si una función f(x) admite derivada de n-éstmo orden, se tiene

$$[f(ax + b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b).$$

1187. Hallar $P^{(n)}(x)$, si

$$P(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + \dots + a_n$$

Hallar $y^{(n)}$, si

1188.
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$
.
1189. $y = \frac{1}{x(1-x)}$.

Indicación Descomponer la función en fracciones simples.

1191 - v 4	1195. $y = \cos^2 x$.
1191. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2\epsilon}}$.	1197. $y = \sin ax \sin bx$.
1192. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.	1198. $y = \cos ax \cos bx$.
1 + 3	1199. $y = \sin ax \cos bx$.
1193. $y = \sin^2 x$.	1200. $y = \sin^4 ax \cos bx$.
1194. $y = \cos^2 x$,	1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.
1195. $y = \sin^3 x$.	1202. $y == x \cos ax$.

1203. $\psi := x^{\dagger} \sin \alpha x$.

1206. $y = e^x \cos x$.

1204. $y = (x^2 + 2x + 2) e^{-x}$.

1207. $y = e^x \sin x$

1205. $y = \frac{e^x}{2}$. 1208. $y = \ln \frac{a + bx}{a - bx}$.

1209, $y = e^{ax}P(x)$, donde P(x) es un polinomio.

1210, $y = x \sinh x$

Hallar dn y, si

1211. $y = x^a e^{x_a}$

1212. $y = \frac{\ln x}{x}$.

1213. Demostrar las igualdades.

1) $[e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} = e^{ax} (a^{n} + b^{n})^{\frac{a}{n}} \sin(bx + c + n\phi)$

2) $[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^a+b^a)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\phi),$

donde

У

$$\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

1214. Hallar y(n), si.

- a) $y = \cosh ax \cos bx$;
- b) y = ch ax sin bx.
- 1215. Transformando la función $f(x) \approx \sin^{2p} x$, donde p es un número natural, en un polmomio trigonométrico, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos 2kx$, hallar $f^{(n)}(x)$.

Indicación. Hacer sen $x = \frac{1}{2i} (t - l)$, donde $t = \cos x + i \sin x$ y $\bar{t} = \cos x - i \sin x$, y aplicar la fórmula de Moivre.

1216. Hallar $f^{(n)}(x)$, si:

- a) $f(x) = \sin^{xp+1} x^{x}$
- b) $f(x) = \cos^{x/2} x$:
- c) $f(x) = \cos^{xp+1} x$.

donde p es un número entero positivo (véase el problema anterior). Si

$$f(x) = f_x(x) + if_x(x),$$

$$f'(x) = f'_{1}(x) + if'_{2}(x).$$

1217. Aplicando la identidad

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \right| = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$$

demostrar que

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{n}}} \sin\left[(n+1) \operatorname{arcetg} x\right],$$

Indicación. Aplicar la fórmula de Moivre.

1218. Hallar la derivada de n-ésimo orden de la función

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$
.

Hallar $f^{(n)}$ (0), st

1219. a)
$$f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$$
; b) $f(x) = \frac{x}{V(1-x)}$.

1220. (2)
$$f(x) = x^4 e^{6x}$$
; b) $f(x) = \arctan x$; c) $f(x) = \arcsin x$.

1221. a)
$$f(x) = \cos(m \arcsin x)$$
; b) $f(x) = \sin(m \arcsin x)$.

1222. a)
$$f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2$$
; b) $f(x) = (\operatorname{arcsm} x)^2$.

1223. Hallar f(n) (a), si

$$f(x) := (x - a)^n \varphi(x),$$

donde la función φ(x) admite derivada continua de (n – 1)-ésimo orden en un entorno del punto a.

1224. Demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{3n} \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(n es un número natural) admite en el punto x = 0 derivadas hasta de n-ésimo orden inclusive y carece de derivada de (n + 1)-ésimo orden.

1225. Demostrar que la función

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es infinitamente derivable en x = 0.

5. DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Construir la gráfica de esta función.

1226. Demostrar que los polinomios de Chebichev

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m+1}} \cos(m \arccos x)$$
 $(m = 1, 2, ...)$

satisfacen a la ecuación

$$(1-x^{2}) T_{m}^{s}(x) - xT_{m}^{'}(x) + m^{2}T_{m}(x) = 0.$$

1227 Demostrar que los polinomios de Legendre

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^n - 1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, ...)$$

satisfacen a la ecuación

$$(1-x^2)\,P_m''(x)-2x\,P_m'(x)+m\,(m+1)\,P_m(x)=0.$$

Indicación. Derivar m+1 veces la igualdad (x^2-1) u'=2mxu, donde $u=(x^2-1)^m$.

1228. Los polinomios de Chebishev-Laguerre se definen por la fórmula

$$L_m(x) = e^{x} (x^m e^{-x})^{m_1}$$
 $(m = 0, 1, 2 ...).$

Hallar la expresión explícita del polmomio $L_m(x)$. Demostrar que $L_m(x)$ satisface a la ecuación

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL(x) = 0.$$

Indicación. Aplicar la igualdad xu' + (x - m)u = 0, donde

1229. Sean y = f(u) y $u = \varphi(x)$, donde f(u) y $\varphi(x)$ son funciones

Demostrar que

$$\frac{d^{n}y}{dx^{n}} := \sum_{k=1}^{n} A_{k}(x) f^{(k)}(u),$$

donde los coeficientes $A_k(x)$ $(k=0,\ 1,...,\ n)$ no dependen de la función f(u).

1230. Demostrar que para la n-ésima derivada de la función compuesta $y = f(x^2)$ se verifica la fórmula

$$\frac{d^n f}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^n) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-n} f^{(n-n)}(x^n) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-n} f^{(n-n)}(x^n) + \dots$$

1231. Los polinomios de Chebishev-Hermite se definen por la fórmula

$$H_{\alpha}(x) = (-1)^{\alpha} e^{x^{\alpha}} (e^{-x^{\alpha}})^{(\alpha)}$$
 $(m = 0, 1, 2, ...)$

Hallar la expresión explícita de los polinomios H_m (x). Demostrar que H_m (x) satisface a la ecuación

$$H_{m}''(x) = 2xH_{m}'(x) + 2mH_{m}(x) = 0.$$

Indicación. Aplicar la igualdad u' + 2xu = 0, donde $u = e^{-x^2}$ 1232. Demostrar la igualdad

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{n}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{n}}.$$

Ind.cación. Aplicar el método de inducción matemática.

1232.1. Demostrar la fórmula

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (x > 0).$$

1232.2. Demostrar la fórmula

$$\frac{d^{1n}}{dx^{1n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) := \frac{(2n)!}{x^{1n+1}} [C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x]_1$$

donde

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^n}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n}}{(2n)!}$$

y

$$S_n(x) = x - \frac{x^n}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

1233. Sea $\frac{d}{dx} = D$ la notación de la operación de derivación y sea

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k$$

un polmomio diferencial simbólico, dende p_k (x) (k = 0, 1, ..., n) so

Demostrar que

$$f(D)\left\{e^{ix}u\left(x\right)\right\} = e^{ix}f\left(D + \lambda\right)u\left(x\right),$$

donde à es constante

1234. Demostrar que, si en la ecuación

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_k^{(k)} = 0$$

se hace

$$x = e^t$$

donde t es una variable independiente, dicha ecuación toma la forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1) \dots (D-k+1) y=0,$$

donde $D = \frac{d}{dt}$.

§ 6. Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy

1.º Teorema de Rolle. Si 1) la función f(x) está definida y es continua en el segmento [a, b]; 2) f(x) tiene derivada finita f'(x) en el interior de este segmento; 3) f(a) = f(b), entonces existe al menos un número c, perteneciente al intervalo (a, b), tal que

$$f'(c) = 0.$$

2.º Teorema de Lagrange. Si 1) la función f(x) está definida y es continua en el segmento [a, b]; 2) f(x) tiene denvada finita f'(x) en el intervalo (a, b), entonces

$$f(b) \sim f(a) = (b - a) f'(c)$$
, donde $a < c < b$

(fórmula de los incrementos finitos).

3.° Teorema de Cauchy. Si. 1) las funciones f(x) y g(x) están definidas y son continuas en el segmento (a, b, 2) f(x) y g(x) tienen derivadas finitas f'(x) y g'(x) en el intervalo (a, b), 3) $f'^{2}(x) + g'^{2}(x) \neq 0$ para a < x < b; 4) $g(a) \neq g(b)$, entonces

$$\frac{f(b) \rightarrow f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}, \text{ donde } a < c < b.$$

Problemas:

1235. Comprobar que se venfica el teorema de Rolle para la función

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. La función

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

x and a para x = -1 y $x_1 = 1$, sin embargo, $f'(x) \neq 0$ para -1 < x < 1. Explicar con el teorema de Rolle la contradicción aparen-

1237. Supongamos que la función f(x) tiene derivada fin ta f'(x) en cada punto del intervalo finito o infinito (a. b) y que

$$\lim_{x\to x+a} f(x) := \lim_{x\to a+a} f(x).$$

Demostrar que

$$f'(c) = 0,$$

donde c es un punto del intervalo (a, b).

1238. Supongamos que. 1) la función f(x) está definida y tiene denvada continua de (n-1)-ésmo orden $f^{(n-1)}(x)$ en el segmento $[x_0, x_n]$; 2) f(x) tiene derivada de n-ésimo orden $f^{(n)}(x)$ en el intervalo (x_0, x_n) y 3) se venfican las igualdades

$$f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$$
 $(x_0 < x_1 < \dots < x_n).$

Demostrar que en el intervalo (x_0, x_n) existe al menos un punto ξ tal que $f^{(n)}(\xi) = 0.$

1239. Supongamos que 1) la función f(x) está definida y tiene derivada continua de (p+q)-ésimo orden $f^{(p+q)}(x)$ en el segmento [a, b], 2) f(x) tiene derivada de (p+q+1)-ésimo orden $f^{(p+q+1)}(x)$ en el intervalo (a, b); 3) se verifican las igualdades

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0$$

 $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(p)}(b) = 0.$

Demostrar que, entonces,

У

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

donde c es un punto del intervalo (a, b).

1240. Demostrar que, si todas las raíces del polinomio

$$P_n(x) = a_1 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \qquad (a_n \neq 0)$$

de coeficientes reales a_k (k=0, 1, ..., n), son reales, entonces, sus derivadas sucesivas $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, $P''_n(x)$, $P''_n(x)$ también tienen solamente ra ces reales

1241 Demostrar que el polmomio de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

tiene todas las raíces reales y están comprend.das en el interva.o

1242. Demostrar que el polinomio de Chebishev-Laguerre

$$L_n(x) := e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

t ene todas las raíces positivas.

1243. Demostrar que el polinomio de Chebishev-Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

tene todas las raices reales.

1244 Hallar en la curva) x^3 un punto, en el cual la tangente es aralela a la cuerda que une los puntos A(-1, 1) y B(2, 8).

1245. ¿Es válida la fórmula de los incrementos finitos para la fun-

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

t el segmento [a, b], si ab < 0?

1246. Hallar la función $\theta = \theta$ (x, Δx) tal que

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta \Delta x)$$
 $(0<\theta<1)$

a)
$$f(x) = ax^{2} + bx + c$$
 $(a \neq 0)$; c) $f(x) = \frac{1}{x}$;

b)
$$f(x)=x^{s}$$
;

d)
$$f(x) = e^x$$
.

1246.4. Supongamos que $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ y que para cualesquiera x y h se venfica la identidad

$$f(x+h)-f(x) \equiv hf'(x)$$
.

Demostrar que

$$f(x) = ax + b_1$$

donde a y b son constantes.

1246.2. Supongamos que $f(x) \in C^{(2)}$ $(-\infty, +\infty)$ y que para cualesquera x y h se venfica la identidad

$$f(x+h)-f(x) \equiv hf'\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Demostrar que

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde a b, c son constantes.

1247. Demostrar que, si $x \ge 0$, se tiene

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+8(x)}},$$

donde

$$\frac{1}{4} \leqslant 0 (x) \leqslant \frac{1}{2},$$

siendo

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x\to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

1248. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^3}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Determinar el valor intermedio c de la fórmula de los incrementos finitos para la función f(x) en el segmento [0,2]

1249 Sea $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, donde $0 < \xi(x) < x$. Demostrar que, si

$$f(x) = x \sin(\ln x)$$
 si $x > 0$ y $f(0) = 0$,

entonces la función $\xi \mid \xi(x)$ es discontinua en cualquier intervalo arbitrariamente pequeño $(0,\varepsilon)$, donde $\varepsilon>0$.

1250. Supongamos que la función f(x) tiene derivada continua f'(x) en el intervalo (a, b). Es posible indicar, para cualquier punto ξ

de (a, b), dos puntos x_1 y x_2 de este intervalo, de modo que sea

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \qquad (x_1 < \xi < x_2)?$$

Exammar el ejemplo: $f(x) = x^3 \ (-1 \le x \le 1)$, donde $\xi = 0$.

1251. Demostrar las desigualdades:

- a) $\sin x \sin y | \leqslant x y$;
- b) $py^{p-2}(x-y) \le x^p y^p \le px^{p-1}(x-y)$, $\sin 0 < y < x \neq p > 1$;
- c) | arctg a arctg b | $\leq |a b|$;
- d) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, so 0 < b < a.

1252. Explicar por qué no es válida la fórmula de Cauchy para las funciones

$$f(x) = x^3$$
 y $g(x) = x^3$

en el segmento [-1, 1]

1253. Sea f(x) derivable en el segmento $[x_1, x_2]$, siendo $x_1x_2 > 0$ Demostrar que

$$\frac{1}{|x_1 - x_2|} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

donde $x_1 < \xi < x_2$.

1254. Demostrar que, si la función f(x) es derivable pero no está acotada en un intervalo finito (a, b), entonces su derivada f'(x) tampoco está acotada en el intervalo (a, b). El teorema reciproco no es válido (construir un ejemplo).

1255. Demostrar que, si la función f(x) tiene derivada acotada f'(x) en un intervalo fin to o infinito (a, b), entonces f(x) es uniformemente continua en (a, b)

1256. Demostrar que, si la función f(x) es derivable en un intervalo infinito $(x_0, +\infty)$ y

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0,$$

entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

o sea, f(x) = o(x) cuando $x \longrightarrow + \infty$.

1257. Demostrar que, si la función f(x) es derivable en un intervalo infinito $(x_0, +\infty)$ y

$$f(x) = o(x)$$
 cuando $x \to +\infty$

entonces

$$\lim_{x \to +\infty} |f'(x)| = 0.$$

En particular, si existe $\lim_{x\to +\infty} f^i(x) = k$, entonces k = 0.

1258 a) Demostrar que, si 1) la función f(x) está definida y es continua en el segmento $\{x_0, X\}$, 2) f(x) tiene derivada finita f'(x) en el intervalo (x_0, X) , 3) existe el limite finito o infinito

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0 + 0).$$

entonces existe la derivada lateral $f'_+(x_0)$, finita o infinita, respectivamente, y

$$f_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

b) Comprobar que, para la función

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{y} \quad f(1) = 0$$

existe el límite finito

$$\lim_{x\to 1}f'(x).$$

a pesar de que la función f(x) no tiene derivadas laterales $f'_{-}(1)$ y $f'_{-}(1)$.

Dar una interpretación geométrica de este resultado.

1159. Demostrar que, si f'(x) = 0 cuando a < x < b, entonces

$$f(x) = const para a < x < b$$
.

1260. Demostrar que la única función f(x) ($-\infty < x < +\infty$) que tiene derivada constante

$$f'(x) = k_i$$

es la función lineal

$$f(x) = kx + b.$$

1261. ¿Qué se puede afirmar respecto de la función f(x), si

1261 1. Supongamos que $f(x) \in C^{(\infty)}$ (∞ , $+\infty$) y que para cualquier x existe un número natural n_x $(n_x \leqslant n)$ tai que

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Demostrar que la función f(x) es un polinomio.

1262. Demostrar que la única función y = y(x) ($\infty < x < + \infty$) que satisface a la ecuación

$$y' = \lambda y$$
 $(\lambda = const)$

es la función exponencial

$$y = Ce^{\lambda x}$$

donde C es una constante arbitraria Indicación. Examinar (ve- \u03bbx)'

1263. Comprobar que las funciones

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$g(x) = arc tg x$$

nenen derivadas iguales en las regiones.

1)
$$x < 1$$
 y 2) $x > 1$.

Deducir la dependencia entre estas funciones.

1264. Demostrar las identidades:

- a) $2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1 + x^2} = \pi \operatorname{agn} x$ si $|x| \ge 1$;
- b) $3\arccos x \arccos(3x 4x^{1}) = \pi$ si $|x| \le \frac{1}{2}$.
- 1265. Demostrar que, si l) la función f(x) es continua en el egmento $[a \ b]$, 2) tiene derivada finita f'(x) en el interior del mismo,) no es lineal, entonces en el intervalo (a, b) existe al menos un punto

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(0) - f(a)}{b - a} \right|.$$

Dar una interpretación geométrica de este resultado.

1266. Demostrar que si 1) la función f(x) tiene derivada segunda f''(x) en el segmento [a, b] y 2) f'(a) = f'(b) = 0, entonces en el interva o (a, b) existe al menos un punto c tal que

$$|f''(c)| \ge \frac{4}{(b-a)^2} |f(b)-f(a)|.$$

1267. Un automovil, que había comenzado su movimiento en un punto inicial, terminó su camino en t segundos, habiendo recorrido s metros. Demostrar que, en algún instante, el valor absoluto de la eceleración del movimiento del automóvil no era menor que

$$\frac{4s}{t^k} \frac{m}{seg^2}$$
.

§ 7. Crecimiento y decrecimiento de una función Designaldades

1.º Crecimiento y decrecimiento de una función. Una función f (x) se llama creciente (decreciente) en el segmento [a, b], si

$$f(x_i) > f(x_i)$$
 para $a \leqslant x_i < x_i \leqslant b$

(o $f(x_2) < f(x_1)$ para $a \le x_1 < x_2 \le b$, respectivamente) Si una función derivable f(x) es creciente (decreciente) en el segmento [a, b], entonces

$$f'(x) \ge 0$$
 para $a \le x \le b$ (0 $f'(x) \le 0$ para $a \le x \le b$).

2,º Criterio suficiente de crecimiento (decrecimiento) de una función. Si una función f(x) es continua en el segmento [a, b] y en el intenor del mismo tiene derivada positiva (negativa) f'(x), entonces la función f(x) es creciente (decreciente) en [a, b].

Problemas.

Determinar los intervalos de monotonía en sentido estricto (de crecimiento o decrecimiento) de las siguientes funciones:

1268.
$$y = 2 + x - x^{1}$$
.

1268.
$$y = 2 + x - x^3$$
. 1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100} (x \ge 0)$.

1269.
$$y = 3x - x'$$
.

1272.
$$y = x + \sin x$$
.

1270.
$$y = \frac{2x}{1+x^2}$$

1278.
$$y = x + |\sin 2x|$$

1274.
$$y = \cos \frac{\pi}{x}$$

1276.
$$y = x^n e^{-x} (n > 0, x > 0)$$
.

1275.
$$y = \frac{x^9}{2^8}$$
.

1277,
$$y = x^3 - \ln x^3$$
.

1278.
$$f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$$
, so $x > 0$ y $f(0) = 0$.

1279 Demostrar que, al aumentar el número de lados n, crece el serímetro p_n del polígono regular de n lados inscrito en la circunferen-1a y decrece el perímetro P_n del polígono regular de n lados circunscrio en la misma circunferencia. Aplicando esto, demostrar que p_n y P_n ienen un limite común cuando n --- 00.

1280. Demostrar que la función

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}$$

creciente en los intervalos ($-\infty$, -1) y $(0, +\infty)$.

1281. Demostrar que una función racional entera

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad (n \ge 1, \ a_n \ne 0)$$

monótona (en sentido estricto) en los intervalos $(-\infty, x_0)$ y $p, +\infty$), donde x_0 es un número positivo suficientemente grande.

1282. Demostrar que una función racional

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} \qquad (a_n b_m \neq 0),$$

no es idénticamente constante, es monótona (en sentido estricto) los intervalos $(-\infty, -x_0)$ y $(x_0, +\infty)$, donde x_0 es un numero átivo suficientemente grande.

283. ¿Es obligatoriamente monótona la derivada de una función nótona? Examinar el ejemplo: $f(x) = x + \sin x$.

284. Demostrar que, si $\varphi(x)$ es una función monótona creciente y

$$|f'(x)| \le \varphi'(x)$$
 para $x \ge x_0$

mes

$$|f(x)-f(x_0)| \le \varphi(x) - \varphi(x_0)$$
 para $x \ge x_0$

nt una interpretación geométrica de esto.

* CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION DESIGNALDADES

1285. Supongamos que la función f(x) es continua en el intervalo $a \le x \le +\infty$ y que, además, f'(x) > k > 0 para x > a, donde k es una constante.

Demostrar que, si f(a) < 0, la equación f(x) = 0 tiene una raíz real, y sólo una, en el intervalo

$$\left(a, a-\frac{f(a)}{R}\right)$$
.

1286. Una función f(x) se llama creciente en el punto x_0 si en un entomo $|x-x_0| < \delta$ el signo del incremento de la función $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ coincide con el signo del incremento del argumento $\Delta x_0 = x - x_0$

Demostrar que, si f(x) (a < x < b) es creciente en cada punto del intervalo finito o infinito (a, b), entonces también es creciente en este intervalo.

1287. Comprobar que la función

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x}$$
, so $x \neq 0$ y $f(0) = 0$,

es creciente en el punto x=0, pero no es creciente en ningún intervalo $(-\epsilon,\epsilon)$ que encierre este punto, donde $\epsilon>0$ es arbitrariamente peque-

Construir el diseño de la gráfica de esta función,

1288. Demostrar el teorema, si 1) las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son n veces derivables, 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ (k-0, 1, ..., n-1), $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ para $x > x_0$, entonces se venfica la designaldad

$$\varphi(x) > \psi(x)$$
 para $x > x$.

1289. Demostrar las siguientes desigualdades

a)
$$e^{\varepsilon} > 1 + x$$

si
$$x \neq 0$$
,

b)
$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$
 so $x > 0$;

si
$$x > 0$$

c)
$$x - \frac{x^1}{6} < \sin x < x$$

si
$$x > 0$$
;

d)
$$\lg x > x + \frac{x^4}{3}$$

si
$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$
;

e)
$$(x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} > (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}}$$

e)
$$(x^{\alpha} + y^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} > (x^{\alpha} + y^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$$
 si $x > 0, y > 0 \ y \ 0 < \alpha < \beta$.

Dar una interpretación geométrica a las desigualdades a) — e).

1290. Demostrar la desigualdad

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1291. Demostrar que para x > 0, se venfican las desigualdades

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2} < \epsilon < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2+\epsilon}.$$

1292. El número de términos y los términos de los extremos de una progresión aritmética y de una progresión geométrica son respectivanente iguales, y todos los terminos de las progresiones son positivos, Demostrar que, para la progresión aritmética la suma de los terminos es mayor que para la progresión geométrica.

1293. Val.éndose de la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

donde x, a_k , b_k (k=1, ..., n) son reales, demostrar la designaldad de Cauchy.

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^4 \leqslant \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^4.$$

1294. Demostrar que la media antmética de unos números positivos no es superior a la media cuadrática de los mismos números, es decir

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

1295 Demostrar que la media geométrica de unos números positivos to es supenor a la media antmética de los mismos números, es decir,

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \ll \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

Indicación. Aplicar el método de inducción matemática.

1296. Se llama media de orden s de dos números positivos a y b, a la función determinada por la igualdad

$$\Delta_s(a,\ b) := \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad \text{si} \quad s \neq 0,$$

$$\Delta_{\phi}(a, b) := \lim_{\delta \to 0} \Delta_{\delta}(a, b).$$

En particular, se obt ene.

Para s=-1, la media armónica; para s=0, la media geométrica (idemostrarlo!), para s = 1, la media aritmética, para s = 2, la media cuadrática.

Demostrar que.

- 1) $\min\{a, b\} \leq \Delta_s(a, b) \leq \max\{a, b\};$
- 2) la función Δ_i (a, b) para $a \neq b$ es una función creciente de s;
- 3) If $\Delta_x(a, b) = m \cdot n \cdot (a, b)$; $\lim_{z\to +\infty} \Delta_x(a,b) \Longrightarrow \max\{a,b\}.$

Indicación, Examinar

$$\frac{d}{ds} \left[\ln \Delta_s \left(a, b \right) \right],$$

1297. Demostrar las desigualdades:

a)
$$x^{n}-1 > \alpha(x-1)$$
 si $\alpha \ge 2, x > 1$;

b)
$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$$
,

si
$$n > 1$$
, $x > a > 0$;

c)
$$1 + 2 \ln x \le x^2$$
 si $x > 0$.

§ 8. Sentido de la concavidad. Puntos de inflexión

1.º Condiciones suficientes de concavidad. Se dice que la gráfica de una función denvable y -f(x) es cóncava hacia amba (cóncava hacia abajo) en el segmento [a, b], si el segmento de la curva

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

está situado por encima (por debajo, respectivamente) de la tangente trazada en cualquier punto de es e segmento. La condición suficiente para que la gráfica sea cóncava hacia artiba (hacia abajo), suponiendo que existe la denvada segunda f''(x), es que se venfique la desigualdad

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0) \text{ para } a < x < b.$$

8 SENTIDO DE LA CONCAVIDAD PUNTOS DE INFLEXION

2° Condición suficiente para el punto de inflexión. Los puntos en los chales se cambia el sentido de la concavidad de la gráfica de la función, se Laman puntos de inflexion. Un punto x_0 , tal que $f'(x_0) = 0$, o bien no existe $f''(x_0)$, es un punto de inflexion si f''(x)cambia su signo al pasar por el valor xo

el intervalo (a, + oo),

Problemas:

1312. Se dice que una función f(x) es convexa por abaio (por amba) en el intervalo (a, b) si, para cualesquiera puntos x, y x, de este intervalo y para cualesquiera números λ_1 y λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$), se venfica la desigualdad

1298. Avenguar el sentido de la concavidad de la curva

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_3)$$

$$y=1+\frac{3}{r}\sqrt{x}$$

(o la desigualdad inversa

f''(x) < 0 para a < x < b.

en los puntos A(-1, 0), B(1, 2) y C(0, 0).

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_3) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Demostrar que. 1) la función f(x) es convexa por abajo en (a, b), si

f''(x) > 0 para a < x < b, 2) f(x) es convexa por amba en (a, b), s

Hallar los intervalos de concavidad en un sentido determinado y los puntos de inflexión de las siguientes funciones

respectivamente).

1299. $y = 3x^3 - x^3$. 1300. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (a > 0). 1304. $y = e^{-x^2}$

1303. $y = x + \sin x$.

1301. $y-x+x^{\frac{5}{2}}$.

1305. $y = \ln (1 + x^2)$.

1306. $y = x \sin(\ln x)$ (x > 0).

1302. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

1307. $y = x^*$

1308. Comprobar que la curva

$$x^n = (n > 1), \quad e^x, \quad x \ln x$$

$$y \longrightarrow \frac{x+1}{x+1}$$

son convexas por abajo en el intervalo (0, + 10), mientras que las funciones.

tiene tres puntos de inflexión situados en una recta. Construir la gráfica de esta función.

$$x^n = (0 < n < 1)$$
, $\log x$

1309. ¿Cómo debe elegirse el parámetro h de la "curva de probabilidades"

son convexas por amba en el intervalo $(0, +\infty)$.

1313. Comprobar que las funciones

 $y = \frac{h}{V_{\pi}} e^{-h^2 \pi^2} \quad (h > 0)$

1314. Demostrar las desigualdades y establecer su significado geomé-

para que ésta tenga los puntos de inflexión $x = \pm \sigma^{7}$

a)
$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

1310. Averiguar el sentido de la concavidad de la cicloide

$$a \sqrt{2} \times + y \sqrt{2} = 0$$
 $(x > 0, y > 0, x = 0)$

b)
$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$$
 $(x \neq y)$;
c) $|x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x+y}{2}$, si $x > 0$ y $y > 0$.

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0).$$

1314.1. Sea $f''(x) \ge 0$ para $a \le x \le b$. Demostrar que

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} \left[f(x_1) + f(x_2) \right]$$

1311. Supongamos que la función f(x) es dos veces derivable en el intervalo $a \le x < +\infty$, y que: 1) f(a) - A > 0; 2) f'(a) < 0, 3) $f''(x) \leq 0$ para x > a.

para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$.

1315. Demostrar que una función convexa acotada es siempre continua y tiene derivadas laterales a la izquierda y a la derecha.

1316. Sea f(x) una función dos veces derivable en el intervalo (a,b)y tal que $f''(\xi) \neq 0$, donde $a < \xi < b$.

Demostrar que en el intervalo (a, b) hay dos valores x_1 y x_2 , tales aue

$$\frac{f'(x_1) - f'(x_1)}{x_1 - x_2} = f''(\xi).$$

1317. Demostrar que si una función f(x) es dos veces denvable en el intervalo infinito $(x_0, +\infty)$ y

$$\lim_{x \to x_0 + a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

entonces en el intervalo $(x_0, +\infty)$ hay al menos un punto ξ tal que $f^{(i)}(\xi) = 0.$

§ 9. Calculo de límites indeterminados

1.er caso de la regla de L'Hôpital (cálculo de limites indeterminados de la forma $\frac{0}{2}$).

Si: 1) las funciones f(x) y g(x) están definidas y son continuas en un entorno U, 1 del punto a, donde a es un número o es el sunbolo ∞ y cuando $x \rightarrow a$ ambas tienden a cero:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0;$$

2) existen las denvadas f'(x) y g'(x) en un entorno U_i del punto a_i a excepción, posiblemente, del mismo punto a, y éstas no se anular simultaneamente para $x \neq a$; 3) existe el límite finito o infinito

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

entonces, se tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2º caso de la regla de L'Hôpital (cálculo de límites indeterminados de la forma co).

S: 1) las funciones f(x) y g(x) tienden ambas hacia el infinito cuando $x \longrightarrow a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \omega_1$$

donde a es un número o es el símbolo ∞.

2) existen las derivadas f'(x)yg'(x) para todos los x pertenecientes a un entomo U, del punto a y distintos de a, siendo

$$P^{1}(x) + g^{(1)}(x) \neq 0$$
 pare $x \in U_{\alpha} \ y \times \neq c_{1}$

3) existe el límite finito o infinito

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_{-1}x_i}{g_{-1}(x)}.$$

entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

Para los límites laterales son válidas unas reglas semejantes.

El cálculo de los límites indeterminados de las formas 0 • • • • • • • • 1", 0°, etc., se reduce al cálculo de los límites indeterminados de los dos tipos principales

mediante transformaciones algebraicas y logantmación.

Problemas.

Calcular los valores de las siguientes expresiones

1318.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$
.

1322.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{x}} \frac{\lg 3x}{\lg x}.$$

1319.
$$\lim_{x \to x} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$$
.

1323.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{clg}(x-1)}{x^2}$$
.

1320.
$$\lim_{x \to 0} \frac{(g x) - x}{x + \sin x}$$
.

1824.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\lg x} - 1}{2 \sin^3 x - 1}$$

1821,
$$\lim_{x \to x} \frac{3 \lg 4x - 12 \lg x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$$
 1824. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\lg x} - 1}{2 \sin^3 x - 1}$

^{»)} Por entomo U_{i} del punto x se entiende el conjunto de números x que cumplen la designaldad. 1) $\epsilon x = a \, (< \epsilon, \text{ s.t.} a \text{ es un número, y. 2}) \, (x. 1 > \frac{1}{a}, \text{ s.t.} a \text{ es el símbolo } \epsilon_0$

1325.
$$\lim_{x\to a} \frac{x(e^x+1)-2(e^x+1)}{x^4}$$
. 1326. $\lim_{x\to a} \frac{1-\cos x^4}{x^2\sin x^6}$.

1327.
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^{\alpha}}$$
.

1328.
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(V \overline{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{a}} - V \overline{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$$
.

1329.
$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - a \sin x}{x^2}$$
 (a > 0). 1343. $\lim_{x\to a} x^{xx-1}$.

1830.
$$\lim_{x \to x} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right)$$
. 1344. $\lim_{x \to x} (x^{xx} - 1)$.

1344.
$$\lim_{x\to x} (x^{x^n} - 1).$$

1331.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$$
, 1345. $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{x}{1+\ln x}}$

1332.
$$\lim_{x\to b} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$$

1346.
$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

1333.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2}$$
.

1347.
$$\lim_{x \to 1} (2 - x)^{\frac{16}{3}}$$
.

1334.
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\lg x} \right)$$
. 1348. $\lim_{x \to a} (\lg x)^{\lg 2x}$

1348.
$$\lim_{x \to \infty} (\lg x)^{\lg kx}$$

1335.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arsh}(\sin x) - \operatorname{Arsh}(\sin x)}{\sin x - \sin x} \to 1349. \lim_{x\to 0} (\operatorname{cig} x)^{\sin x}.$$

donde Arsh
$$x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$
, $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\sin x}$, 1336. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ (s > 0). $\lim_{x \to +\infty} (\sin \frac{1}{x})^x$.

1350.
$$\lim_{n \to \infty} (\ln \frac{1}{n})^n$$

1336.
$$\lim_{z \to +\infty} \frac{\ln z}{z^{n}}$$
 ($z > 0$). $\lim_{z \to +\infty} \left(\ln \frac{1}{z} \right)$.
1337. $\lim_{z \to +\infty} \frac{z^{n}}{e^{nz}} (a > 0, n > 0)$. 1351. $\lim_{z \to \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{nz}{2z+1} \right)^{\frac{1}{z}}$.

1351.
$$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{nx}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

1352.
$$\lim_{x\to a} \left(\frac{\lg x}{\lg a}\right)^{\operatorname{cig}(x-a)}$$
.

1338.
$$\lim_{x\to a} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{200}}$$
.

1353.
$$\lim_{n\to 0} \left(\frac{a^n - x \ln a}{b^n - x \ln b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

1854.
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$$
.

1340.
$$\lim_{x\to 1-\infty} \ln x \cdot \ln (1-x)$$
, $\lim_{x\to 1-\infty} x^{\epsilon} \ln x \cdot (\epsilon > 0)$.

1855,
$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$
,

1342.
$$\lim_{x\to +a} x^x$$
. 1356. $\lim_{x\to a} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

1357.
$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$$
.

1358.
$$\lim_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$$
 (a>0). 1359. $\lim_{x \to a} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - a}{x}$;

1880.
$$\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^3}$$
 $(a>0)^x = \frac{1363.4}{1363.4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{A_x \sin x}{x}\right)^{\frac{1}{23}}$

1361.
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$$
. donde Arsh $x = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$

1362.
$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^x$$
. 1364. $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1+x)^x}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$.

1363.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arg \sin x}{x}\right)^{\frac{1}{n^2}}$$
 1365.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{n} \arccos x\right)^{\frac{1}{n}}$$

1869. 1.
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$
. 1366. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1363. 2.
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\lg x}{x} \right)^{\frac{1}{2^3}}$$
. 1367. $\lim_{x \to 0} \frac{\eta \cosh x}{\sqrt[n]{\cosh x}}$. 1368. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)^{\cosh x}$.

1363. 8.
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{arc} \lg x}{x} \right)^{\frac{1}{n^2}}$$
. 1368. 1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^n}$

1369.
$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt[3]{x^4 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^4 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

1370.
$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x + a)^{1 + \frac{1}{x}} - x^{1 + \frac{1}{x + a}} \right].$$

1371. Hallar

$$\lim \frac{y}{x}$$
.

si la curva y = f(x) se introduce en el origen de coordenadas (0, 0) cuando $x \to 0$ (lim f(x) = f(0) = 0) bajo un ángulo α .

1372, Demostrar que

$$\lim_{x\to +\infty} x^{l(x)} = 1,$$

si la curva continua y = f(x) se introduce en el origen de coordenadas cuando $x \to +0$ ($\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$) y para $0 < x < \varepsilon$ se mantiene integramente en el interior del ángulo agudo formado por las rectas: y = -kx $b y \approx kx \ (k \neq \infty).$

1373. Demostrar que, si para la función f(x) existe la denvada segunda f" (x), entonces

$$f''(x) \Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

1373.1. Avenguar si es denvable la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \frac{1}{e^x} \frac{1}{-1} & \text{si} \quad x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & , & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

en el punto x = 0.

1373.2. Hallar la asíntota de la curva

$$y = \frac{x^{4+x}}{(1+x)^x}$$
 (x > 0).

1374. Estudiar la posibilidad de la aplicación de la regla de L Hôpital en los siguientes ejercicios:

a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin \frac{x}{x}}{\sin x}$$
; c) $\lim_{x \to \pm \infty} \frac{e^{-2x} (\cos x + 2 \sin x) + e^{-x^3} \sin^2 x}{e^{-x} \cos x + \sin x}$;

b)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x + \sin x}$$
: d) $\lim_{x \to \infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}}$.

1375. Hallar el .ímite de la razón del área de un segmento circular de cuerda b y sagita h. al área del triángulo isósceles inscrito en este segmento, si el arco del segmento tiende a cero manteniéndose constante el radio R. Aplicando el resultado obtenido, deducir la fórmula aproximada para el área del segmento.

$$S \approx \frac{2}{3}bh$$
.

§ 10. Fórmula de Taylor

1.º Fórmula local de Taylor, Si: 1) la función f (x) está definida en un entomo $|x-x_0| < \varepsilon$ del punto x_0 ; 2) f(x) tiene en este entomo derivadas f'(x), ... $f^{(n-1)}(x)$ hasta el orden (n-1) inclusive. 3) en el punto x_0 existe la derivada de n-ésimo orden $f^{(n)}(x_0)$, entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k}(x - x_{0})^{k} + a(x - x_{0})^{n}, \tag{1}$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$
 $(k = 0, 1, ..., n).$

En particular, para $x_0 = 0$, se tiene.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k} + o(x^{n}). \tag{2}$$

En las condiciones indicadas, la representación (1) es única.

Si en el punto x_0 existe la derivada $f^{(n+1)}(x_0)$, el término complementano en la formula (1) se puede tomar en la forma $O((x-x_0)^{n+1})$,

De la formula local de Taylor (2) se obtienen los siguientes cinco desarrollos importantes:

1.
$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \dots + \frac{x^{n}}{n!} + o(x^{n})$$

11.
$$\sin x = x - \frac{x^n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(2n-1)!} + \delta(x^{n}).$$

111 to
$$x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

1V
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^n + \dots$$

$$\dots + \frac{n(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + a(x^n).$$

V.
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^3}{2} + \dots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
.

2.º Fórmula de Taylor. Si 1) la función f(x) está definida en el segmento $[a \ b]$; 2) f(x) tiene en este segmento derivadas continuas f'(x), ..., $f^{(n-1)}(x)$, 3) para a < x < b existe la derivada finita $f^{(n)}(x)$, entonces

$$\{(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \le x \le b),$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(término complementario en forma de Lagrange), o

$$R_n(z) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x - a))}{(a + 1)!} (1 - \theta_2)^{n-1} (x - a)^n \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

(término complementario en forma de Cauchy).

Problemas:

1376. Desarrollar el polinomio

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^4$$

según las potencias enteras no negativas del binomio x+1."

Escribir los desarrollos en potencias enteras no negativas de la variable x hasta los términos del orden indicaco inclusive para los siguientes

1377.
$$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$$
 hasta el término con x^4 ¿A que es igual $f^{(4)}$ (0)?

1378.
$$\frac{(1+x)^{160}}{(1+2x)^{16}}$$
 hasta el término con x^2 .

1379.
$$\sqrt[m]{a^m + x}$$
 $(a > 0)$ hasta el término con x^2 .

1380.
$$\sqrt{1-2x+x^2}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$$
 hasta el término con x^3 .

1381. e^{ix-x^2} hasta el término con x^5 .

1382,
$$\frac{x}{x^2-1}$$
 hasta el término con x^4 .

1383.
$$\sqrt[3]{\sin x^3}$$
 hasta el término con x^{13} .

1384.
$$\ln \cos x$$
 hasta el término con x^6 .

1395.
$$\sin(\sin x)$$
 hasta el término con x^3 .

1386.
$$\lg x$$
 hasta el término con x^5 .

1387.
$$\ln \frac{\sin x}{x}$$
 hasta el término con x^6 .

1388. Hallar tres términos del desarrollo de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en potencias enteras no negativas de la diferencia x = 1.

1389. Desarrollar la función $f(x) = x^x - 1$ en potencias enteras positivas del binomio x-1 hasta el término con $(x-1)^3$.

1390. Sustitur aproximadamente la función $y = a ch \frac{x}{a} (a > 0)$ en un entorno del punto x = 0 por una parábola de 2º orden.

1391. Desarrollar la función $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$ $(x \ge 0)$ en potencias enteras no negativas de la fracción $\frac{1}{x}$ hasta el término con $\frac{1}{x^2}$.

1392. Hallar el Jesarrollo de la función f(h) = ln(x + h)(x > 0) en potencias enteras no negativas del incremento h hasta e, término con h^n (n es un número natural).

1393. Sea

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

$$(0 < \theta < 1)$$
, $y f^{(n+1)}(x) \neq 0$.
Demostrar que

$$\lim_{b\to 0} \theta = \frac{1}{n+1} .$$

1393.1. Supongamos que, cuando $x \rightarrow 0$, se tiene

$$f(x) = 1 + kx + o(x).$$

Demostrar que

$$\lim_{x\to 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{k}.$$

1393.2. Supongamos que $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ y que f(0) = f(1) = 0, giendo $f''(x) | \le A$ para $x \in (0, 1)$. Demostrar que

$$|f'(x)| \le \frac{A}{2}$$
 para $0 \le x \le 1$.

1393.3. Sea f(x) ($\infty < x < + \infty$) una función dos veces derivable y

$$M_k = \sup_{-\infty, < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2).$$

Demostrar la desigualdad

$$M_i^* \leq 2M_iM_i$$

1394. Acotar el error absoluto de las fórmulas de aproximación:

a)
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$
 para $0 \le x \le 1$;

b)
$$\sin x \approx x - \frac{x^4}{6}$$
 para $|x| < \frac{1}{2}$;

c)
$$\lg x \approx x + \frac{x^3}{3}$$
 para $|x| \leq 0,1$;

d)
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$
 para $0 < x < 1$.

1395. ¿Para qué valores de x es válida la fórmula de aproximación

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

con una exactitud de 0,0001?

1395.1. Demostrar la fórmula

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^n}$$

$$(n \ge 2, a > 0, x > 0), \text{ donde } 0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^3}{a^{2n-1}}$$

1396. Aplicando la formula de Taylor, calcular aproximadamente:

g) are tg 0.8:

b)
$$\sqrt[5]{250}$$
;
c) $\sqrt[12]{4600}$:

acotar el error.

1397, Calcular

Aplicando los desamollos I V, calcular los siguientes límites

1398.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{x}}}{x^4}$$
.

1399.
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^2} .$$

1400.
$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

1401.
$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^6} - \sqrt[6]{x^6 - x^6}).$$

1402.
$$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(x^x - x^x + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{x}{x}} - \sqrt{x^x + 1} \right].$$

1403.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^x + a^{-x} - 2}{x^x}$$
 ($a > 0$). 1405. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

1404.
$$\lim_{x \to \infty} \left[x - x^x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$
. 1406. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$.

1406.1,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x^{\frac{4}{3}}}{x^3} \frac{1-x^2}{1-x^2}$$
.

1406.2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$$
.

1406.3
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ig x) - x}{x^4}$$
.

Para el infinitésimo y cuando $x \rightarrow 0$, determinar el término principal e la forma Cx" (C es una constante), si.

1407.
$$y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$$
.

1408.
$$y = (1+x)^x - 1$$
. 1409. $y = 1 - \frac{(1+x)^x}{e}$.

1410. ¿Para qué valores de los coeficientes a y b.

$$x \rightarrow (a + b \cos x) \sin x$$

es un infinitésimo de 5° orden con respecto a x?

1410.1. Elegir los coeficientes A y B de tal modo que para x -> 0 se venfique la igualdad asintotica

$$\operatorname{clg} x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^2} + O(x^3).$$

1410.2. Para qué valores de los coeficientes A, B, C y D se venfica la fónnula asintótica

$$e^{x} = \frac{1 + Ax + Bx^{3}}{1 + Cx + Dx^{3}} + O(x^{4}).$$

para $x \rightarrow 0$?

1411. Considerando a | x | pequeño, hallar fórmulas de aproximación sencillas para las siguientes expresiones

a)
$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2}$$
 ($R > 0$);

a)
$$\frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R+x)^3} (R > 0);$$
 c) $\frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right];$

b)
$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1+x}{1+x}}$$
; d) $\frac{\ln 2}{\ln (1+\frac{x}{100})}$.

$$d) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100}\right)}$$

1412. Considerando a x pequeño en valor absoluto, hallar una formula de aproxunación de la forma

$$x = \alpha \sin x + \beta \lg x$$

con una exactitud hasta el término x5.

Aplicar esta fórmula para la rectificación aproximada de arcos de una medida angular pequeña.

1413. Acotar el error relativo de la siguiente regla de Chebishev un arco circular es aproximadamente igual a la suma de los lados laterales del triángulo isósceles construido sobre la cuerda de este arco y cuya altura es $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ de su sagita.

$$1407. y = \lg(\sin x) - \sin(\lg x)$$

§ 11. Extremos de una función. Valores absolutos máximo y mínimo de una función

1° Condicion necesaria para el extremo. Se dice que a función f(x). fiene en el punto xo un extremo (un máx,mo o un mínimo), si la función está defirida en un entorno bilatera, del punto xo y para todos. los puntos x de una región $0 < |x| x_0 | < \delta$ se verifica la desigualdad

$$f(x) < f(x_b)$$
 0 $f(x) > f(x_b)$.

respectivamente.

En el punto de extremo, la derivada $f'(x_0) = 0$, si ésta existe

2.º Condiciones suficientes de extremo Primera regla. Si 1) la fapción f(x) está definida y es continua en un entorno $(x-x_0)<\delta$ del f punto x_0 , y $f'(x_0) = 0$ o no existe (punto critico), 2) f(x) tiene denvada limita f'(x) en la region $0 < (x - x_0) < \delta$, 3) la derivada f'(x). conserva un signo determinado a la izquierda del punto xo y a la desecta de x_0 , entonces el comportamiento de la función f(x) se caractenza por la tabla siguiente

	Signo de I	a derivada	Conclusión
1V III III	++	+ - +	no hay extremo máxuno mínimo no hay extremo

Segunda regia. Si la función f(x) tiene derivada segunda f''(x) y en el punto xo se cumplen las condiciones

$$f'(x_0) = 0$$
 y $f''(x_0) \neq 0$.

entonces en este punto de función tiene un extremo, a saber un máximo si $f''(x_0) < 0$, y un mínimo si $f''(x_0) > 0$.

Tercera regla. Supongamos que la función f(x) tiene en un intervalo $|x-x_0| < \delta$ las derivadas $f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ y en el punto x_0 , la denvada f(n) (xn), siendo

$$f^{(k)}(x_s) = 0 \ (k - 1, ..., n - 1), \ f^{(k)}(x_s) \neq 0.$$

En estas condiciones: 1) si n es un número par, la función f(x) tiene un extremo en el punto x_0 , a saber: un máximo si $f^{(n)}(x_0) < 0$, y un AL EXTREMOS DE UNA FUNCION VAL. ABSOLUTOS MAX Y MIN DE UNA FUNCION

fairno si $f^{(n)}(x_0) > 0$; 2) si n es un número impar, la función f(x) no tiene extremo en el punto xa.

1º Extremo absoluto. Una función f (x), continua en el segmento 14 b), alcanza el valor máximo absoluto (mínimo absoluto) en un punto critico de esta función (o sea, en un punto en que la denvada (x) es igual a cero o no existe) o en los puntos frontera a v b del sermento dado.

Problemas:

Averiguar los extremos de las siguientes funciones

1414.
$$y = 2 + x - x^2$$
. 1415. $y = (x - 1)^n$.

1416, $y == (x-1)^4$,

1417. $y = x^m (1-x)^n$ (m y n son números enteros positivos)

1418.
$$y = \cos x + \sin x$$
. 1419. $y = (x + 1)^{10} e^{-x}$

1420.
$$y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2i} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$$
 (*n* es un número natural).

1421.
$$y = |x|$$
. 1422. $y = x^{\frac{1}{2}} (1 - x)^{\frac{1}{2}}$.

1428. Avenguar si la función

$$f(x) \Longrightarrow (x - \!\!\!-\!\!\!- x_a)^n \oplus (x)$$

(n es un número natural) tiene un extremo en el punto x_0 , donde la función $\varphi(x)$ es continua en $x = x_0$ y $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Sea
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad f'(x) = \frac{P_{\tau}(x)}{Q'(x)}$$

y sea x_0 un punto estacionario de la función f(x) es decur,

$$P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0$$

Demostrar que

$$\operatorname{sgn} f''(x_n) \Longrightarrow \operatorname{sgn} P'_{i}(x_n).$$

1425. ¿Se puede asirmar que, si la función f (x) tiene máximo en el punto xo, entonces en un entorno suficientemente pequeño de este punto, a la izquierda del punto x_0 la función f(x) es creciente, mientras que a la derecha del mismo es decreciente?

Examinar el ejemplo.

$$f(x) = 2 - x^{1}\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$$
, si $x \neq 0$ y $f(0) = 2$,

1426. Demostrar que la función

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$
, si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$,

tione un mínimo en el punto x = 0, y la función

$$g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$$
, si $x \neq 0$, $y \neq 0$ $\Rightarrow 0$

no tiene extremo en el punto $x_0 = 0$, a pesar de que

$$f^{(n)}(0) = 0$$
, $g^{(n)}(0) = 0$ $(n = 1, 2, ...)$

Construir las gráficas de estas funciones.

1427. Averiguar los extremos de las funciones:

a)
$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$$
 si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$;

b)
$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$$
 si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

Construir las gráficas de estas funciones

1428. Avenguar si la función

$$f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right), \quad \text{s)} \quad x \neq 0 \text{ y } f(0) = 0.$$

tiene extremo en el punto x=0

Construir la gráfica de esta función.

Hallar los extremos de las siguientes funciones

1429.
$$y = x^4 - 6x^4 + 9x - 4$$

1437,
$$y = xe^{-x}$$

1430.
$$y = 2x^4 - x^4$$

1431,
$$y = x \cdot x - 1$$
)* $(x - 2)$ *. 1439, $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

1439.
$$y = \frac{\ln^3 x}{10^3}$$

1432.
$$y = x + \frac{1}{x}$$
.

1440.
$$y = \cos x + \frac{1}{6} \cos 2x$$
.

1433.
$$y = \frac{0x}{1 + x^2}$$
.

1441.
$$y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$$
.

1434.
$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$
.

1442.
$$y = arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 - (-x^2))$$
.

1435,
$$y = 1/2x = x^3$$
.

1443,
$$y = e^{\pi} \sin x$$
,

1436.
$$y = x^3 / x - 1$$

Hallar les valores mâximos y mínimos absolutos para las siguientes functiones.

1445.
$$f(x) = 2^x$$

1446.
$$f(x) = x^3 - 4x + 6$$

IN EXTREMOS DE UNA FUNCION, VAL. ABSOLUTOS MAX Y MIN DE UNA FUNCION

1447.
$$f(x) = |x^{0} - 3x + 2|$$

1448.
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1449.
$$f(x) = \sqrt{5-4x}$$

Hallar el infimo (ihf) y el supremo (sup) para las siguientes funcio-

1450.
$$f(x) = xe^{-0.01x}$$
 en el intervaro $(0, +\infty)$.

1451.
$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$$
 en el intervalo $(0, +\infty)$.

1452.
$$f(x) = \frac{1+x}{1+x}$$

1452.
$$f(x) = \frac{1 + x^3}{1 + x^3}$$
 en el intervalo $(0, +\infty)$.

1453.
$$f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$$
 en el intervalo (∞ , $+\infty$)

1454. Calcular el ínfimo y el supremo de la función $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ en el intervalo $x < \xi < +\infty$.

Construir las gráficas de las funciones

$$M(x) = \sup_{x \le 1 < +\infty} f(\xi) \quad y \quad m(x) = \inf_{x < 1 < +\infty} f(\xi)$$

1454.1. Sea *

$$M_k = \sup \{f^{(k)}(x)\}, \quad k = 0, 1, 2$$
.

Hallar M_0 , M_1 y M_2 , si $f(x) = e^{-x^2}$,

1455. Hallar el máximo término de la sucesión

a)
$$\frac{n^{-n}}{2^n}$$
 ($n = 1, 2, ..., n$

b)
$$\frac{\sqrt[n]{n}}{n+10000}$$
 $(n=1, 2, ...)$; c) $\sqrt[n]{n}$ $(n=1, 2, ...)$

c)
$$\sqrt[n]{n}$$
 $(n=1, 2, ..., n)$

1456. Demostrar las desigualdades

a)
$$|3x - x^3| \le 2$$
 si $x \le 2$;

b)
$$\frac{1}{2^{p+1}} \le x^p + (1 - x)^p \le 1$$
, si $0 \le x \le 1$ y $p > 1$;

c)
$$x^m(a-x)^n \le \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$$
 see $m > 0$, $n > 0$ y $0 \le x \le a$;

d)
$$\frac{x+a}{\frac{n-1}{2}} \le \sqrt[n]{x^n+a^n} \le x + a \ (x > 0, \ a > 0, \ n > 1);$$

e)
$$a \sin x + b \cos x \le 1$$
 $a^2 + b^3$.

1456.1. Demostrar la desigualdad

$$\frac{2}{3} \leq \frac{t^2+1}{t^2+1+1} \leq \frac{2}{3}$$

$$para = \infty < v < + \infty$$

1457. Hallar la "desviación a cero" del polinomio

$$P(x) = x(x-1)^{x}(x+2)$$

en el segmento [- 2, 1], o sea, calcular

$$F_P := \sup_{-x \in x \le 1} |P(x)|.$$

1458. ¿Para qué valor del coeficiente q el polinomio

$$P(x) = x^{a} + q$$

es de desviación mínima a cero en el segmento [-1, 1], o sea,

$$E_P = \sup_{x,1 \le x \le 1} |P(x)| = \min.$$

1459. Se llama desviación absoluta de dos funciones f(x) y g(x) en el segmento [a,b] al número

$$\Delta \Longrightarrow \sup_{x \in x, a \in b} |f(x) - g(x)|.$$

Hallar la desviación absoluta de las funciones:

$$f(x) = x^t \quad y \quad g(x) = x^s$$

en el segmento [0, 1].

1460. Sustituir aproximadamente la función

$$f(x) = x^x$$

en el segmento $[x_1, x_2]$, por la función lineal

$$g(x) = (x_1 - x_2)x - b$$

de tal modo que la desviación absoluta de las funciones $f(x) \times g(x)$ (véase el problema antenor) sea minima, y calcular esta desviación absoluta mínima.

1461. Determinar el mínimo de la función

$$f(x) = \max\{2, x\}, \{1, +x\},$$

Calcular el número de raíces reales de la ecuación y separar estas raíces, si:

1462.
$$x^3 - 6x^4 + 9x - 10 = 0$$
.

1463,
$$x^4 - 3x^3 - 9x + h = 0$$
.

1464.
$$3x^4 - 4x^3 - 6x^4 + 12x - 20 = 0$$
.

1465.
$$x^4 - 5x - a$$
.

1466.
$$\ln x = kx$$
.

1467.
$$e^x = ax^x$$
.

1468,
$$\sin^4 x \cdot \cos x = \alpha$$
 si $0 \le x \le \pi$.

1469. ch
$$x = kx$$
.

1470. ¿Cuál es la condición para que la ecuación

$$x^2 + px + q = 0$$

tenga: a) una raíz real, b) tres raíces reales. Representar las regiones correspondientes en el plano (p,q).

§ 12. Construcción de las gráficas de las funciones por sus puntos característicos

Para construir a gráfica de una función y = f(x) es necesario: 1) hallar el campo de existencia de esta función y averiguar el comportamiento de la misma en los puntos frontera; 2) establecer la simetría de la gráfica y la periodicidad; 3) hallar los puntos de discontinuidad de la función y los intervalos de continuidad, 4) determinar los ceros de la función y las regiones en las que el signo de esta es constante; 5) hallar los puntos de extremo y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función; 6) hallar los puntos de inflexión y determinar los intervalos de concavidad de la gráfica en un sentido determinado, 7) hallar las asíntotas, en caso de existencia de las mismas; 8) señalar tales o cuales particularidades de la gráfica.

En los ejercicios señalados con un asterisco, los puntos de inflexión se determinan aproximadamente.

Problemas.

Construa las gráficas de las siguientes funciones

1471.
$$y = 3x - x^4$$
.

1472.
$$y=1+x^1-\frac{x^4}{2}$$
.

1473.
$$y=(x+1)(x-2)^2$$
.

1473.
$$y = (x+1)(x-1474*, y = \frac{2-x^2}{1-x^2}.$$

1475*.
$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$$
.

1476°,
$$y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^n}$$
.

1477.
$$y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$$

1478.
$$y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4.$$

1479.
$$y = \frac{x^3(x-x)}{(x+1)^3}$$
.

1480.
$$y = \frac{\pi}{(1-\tau^2)^2}$$
.

1481.
$$y = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^2}$$
.

CAPITULO 2, CALCULO DIFERENCIAL BE LAS HIMPIANOS

CAPITUDO 2, GALCIDO DIFERENCIAL E	Mr. P. A. D. L.
2 STATE OF THE PARTY OF THE PAR	DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABIJA
1482*. $y = \frac{x^4 \pm 8}{x^4 \pm 1}$.	1504.1. $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.
" '	
1483. $y = \frac{1}{1+z} - \frac{10}{8x^2} + \frac{1}{1-z}$.	1505. $y = 2x - \lg x$ 1506. $y = e^{ix - x^2}$
1484. $y = (x-3) \sqrt{x}$.	1507. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$. 1508. $y = x + e^{-x}$.
1488. $y = +\sqrt{8x^2-x^4}$.	1
1485.1. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$.	1509. $y = x^{1}e^{-x}$. 1509. 1. $y = e^{-1x} \sin^2 x$
1486. $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)}$	
1487°, $y = \sqrt[3]{x^1 - x^2 - x + 1}$.	
1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$	1510. y 2°
	1511. $y = \sqrt{1 - e^{-x}}$.
1489. $y = (x+2)^{2} - (x-2)^{\frac{2}{4}}$	1512. $y = \frac{nx}{\sqrt{x}}$
1490. $y=(x+1)^{\frac{2}{12}}+(x-1)^{\frac{2}{12}}$	1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
1491, $y = \frac{x}{\frac{3}{4}/x^{2}+1}$.	1514 $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
*	1515. y - artsin v
1492. $y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$.	1516. $y = x + arc \cdot g x$
1493. $y = \frac{11 + x^{\frac{1}{x}}}{2\sqrt{x}}$.	1517. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arcclg} x$.
Z	1518, y-xaictgx
1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3 + x}} a$	> 01.
1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x+1}}$.	1519. $y = a_{7,5/H} \frac{2\pi}{1 + x^3}$.
· * T)	
1496*. $y = \sqrt{\frac{x^4 + 3}{x^1 + 3}}$.	1520. $y = \arccos \frac{y - x^2}{1 + x^2}$
1497. $y = 5 \eta x - \cos^2 x$.	1521, y - x + 2, ex
	1522,) = 21 41 = 1 - 1 42
	1523*, $y = n^{\frac{x^2}{2}} \frac{3x + 2}{x^4 + 1}$.
	* T I
1501 1 = mater 1 = -4	1 - 1 a - 1 a - x
1498. $y = (7 + 2\cos x) \sin x$. 1499. $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$. 1500. $y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x$.	1522,) = 21 47 = 1 - 11 47

1525. $y = x \arccos \frac{1-x}{1-2x}$.

1526. ي جار .

1528. $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

12 CONSTRUCCION DE LAS GRAF DE LAS FUNC. POR SUS PUNTOS CARACT.

1629*.
$$y = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad (x > 0).$$

1530*. $y = \frac{e^{1-\frac{1}{x^2}}}{1-e^{-x^2}}$ (sin averiguar la concavidad).

Construir las curvas dadas en forma paramétrica:

1531.
$$x = \frac{(t+1)^3}{4}$$
, $y = \frac{(t-1)^2}{4}$.

1532.
$$x = 2t - t^2$$
, $y = 3t - t^3$

1533*.
$$x = \frac{t^2}{t-1}, \qquad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

1534.
$$x = \frac{t^3}{1-t^4}, \quad y = \frac{1}{1+t^4}.$$

1535.
$$x = t + e^{-t}$$
, $y = 2t + e^{-xt}$.

1535.
$$x = t + e^{-t}$$
, $y = 2t + e^{-tt}$.
1536. $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$ $(a > 0)$.

1537.
$$x - \cos^4 t$$
, $y = \sin^4 t$

1538.
$$x = t \ln t$$
, $y = \frac{\ln t}{t}$.

1539.
$$x = \frac{a}{\cos^2 t}$$
, $y = a \operatorname{tg}^3 t \quad (a > 0)$.

1540.
$$x = a(\sinh t - t), \quad y = a(\cosh t - 1) \quad (a > 0).$$

Expresando las ecuaciones de las curvas en forma paramétrica, construir estas curvas, si

1541.
$$x' + y' - 3axy = 0 \quad (a > 0)$$
.

Indicación, Hacer y = tx.

1542.
$$x^2 + y = x^4 + y^4$$
.

1543.
$$x^2y^3 = x^3 - y^3$$
.

1544.
$$x^y = y^x \quad (x > 0, y > 0).$$

1545. Construir la gráfica de la curva

$$ch^2 x - ch^2 y = 1.$$

Construir las graficas de las funciones dadas en un sistema polar de coordenadas (x, r) $(r \ge 0)$

1546.
$$r = a + b \cos \varphi \quad (0 < a \le b)$$
.

1547.
$$r = a \sin 3\varphi$$
 (a > 0). 1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ (a > 0).

1549*,
$$r = a \frac{\ln \varphi}{\varphi - 1}$$
, rise $\varphi > 1$ (a > 0).

1550*,
$$\varphi = \arg r \cos \frac{r-1}{r}$$
.

Construir las gráficas de las familias de curvas (a es un parâmetro Variable)

1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1502, $y = \sin x \cdot \sin 3x$

1504. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.

1503. $y = \frac{\sin x}{\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$. 1527*. $y = x^{\frac{1}{4}}$.

1561. $y = x^2 - 2x + a$. 1562. $y = x + \frac{a^3}{x}$.

 $1554. \ y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$

1553. $y = x + \sqrt{a(1-x^2)}$

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$

§ 13. Problemas de máximos y mínimos de las funciones

1556. Demostrar que, si la función f(x) no es negativa, la función

$$F(x) = Cf^*(x) \qquad (C > 0)$$

tiene exactamente los mismos puntos de extremo que la función f(x)

1557. Demostrar que, si una función $\varphi(x)$ es monótona creciente en sentido estricto para $-\infty < x < +\infty$, entonces las funciones

$$f(x) y \varphi(f(x))$$

tienen los mismos puntos de extremo.

1558. Hallar el valor máximo dei producto de la m-esima y n-ésima potencias (m > 0, n > 0) de dos números positivos, si la suma de estos es constante e igual a α .

1559. Hallar el valor mínimo de la suma de la m-ésima y n-ésima potencias (m>0, n>0) de dos números positivos, si el producto de éstos es constante e igual a a.

1560, ¿En qué sistemas de logaritmos existen números que son iguales a su logaritmo?

1561. Entre todos los rectángulos de un área dada S, determinar aquél cuyo perímetro sea mínumo.

1562. Hallar el triángulo rectángulo de área máxima, si la suma de un cateto y la hipotenusa es constante.

1563. ¿Qué dimensiones lineales tiene que tener un bote cumunco cenado de volumen V para que el área total de la superficie sea mínima?

1564. En un segmento circular dado, no superior al semicírculo, hay que inscribir un rectángulo de área máxima.

1565. En la elipse

$$\frac{x^{t}}{a^{t}} + \frac{y^{t}}{b^{t}} \Rightarrow 1$$

hay que inscribir un rectángulo con los lados paralelos a los ejes de la elipse, de modo que su área sea máxima.

1566. En un triángulo de base b y de altura h hay que inscribir un rectángulo de perímetro máximo.

Estudiar la posiba dad de resolución de este problema.

1567. De un tronco redondo, de diámetro d, hay que tallar una viga con una sección transversal rectangular de base b y altura h ¿Qué dunenciones deberá tener la viga para que la resistencia sea máxima, si la resistencia es proporcional a bh^2 ?

1568. Inséribir en una semiesfera de radio R un paralepipedo reclangular con la base cuadrada de volumen máximo.

1569. Inscribir en una esfera de radio R un cilindro de volumen « máximo.

1570. Inscribir en una esfera de radio R un cilindro cuya superficie total sea máxima.

1571. Circunscribir en torno a una esfera dada un cono de volumen mínimo.

1572. Hallar el volumen máximo de un cono con una generatriz dada L

1573. En un cono circular recto de ángulo 20 en la sección axial y de radio de base R, hay que inscribir un cilindro cuya superfície total sea máxima.

1574. Haliar la distancia mínima del punto M(p, p) a la parábola $y^2 = 2px$,

1575. Hallar las distancias mínima y máxima del punto A(2, 0) a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

1576. Hallar la cuerda máxima de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (0 < b < a) que pasa por el vértice B (0, -b).

1577. Trazar por el punto M(x, y) de la elipse $\frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} = 1$ una tangente que forme con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

1578. Un cuerpo está formado por un cilindro circular recto que termina por encima por una semiesfera. ¿Qué dimensiones lineales debe tener este cuerpo para que el área de la superficie total sea mínima, si su volumen es igual a 1?

1579. La sección transversal de un canal abierto tiene la forma de un trapecto isósceles. Cual debe ser la inclinación de los costados para que el "perímetro mojado" de la sección sea mínimo, si el área de la "sección viva" del agua en el canal es igual a S y el invel del agua es igual a h?

1580. Se llama "sinuosidad" de un circuito cerrado que limita un área S, la razón del perímetro de este circuito a la longitud de la circunferencia que limita un círculo de la misma área S.

Qué forma debe tener el trapecio isósceles ABCD $(AD \mid BC)$ de sinuosidad mínima, si la base AD = 2a y el ángulo agudo $BAD = \alpha$?

- 1581. ¿Qué sector se debe recortar de un círculo de radio R, de modo que de la parte restante se pueda enrollar un embudo de capacidad máxima?
- 1582. Una fabrica A está a a km de la vía férrea que va del sur al norte y que pasa por la ciudad B, teniendo en cuenta la distancia mínima. Bajo qué ángulo φ respecto de la vía férrea se debe construir una vía de acceso desde la fábrica para que el transporte del rargamento de A a B sea el más económico, si los gastos del transporte de una tonelada de cargamento a la distancia de 1 km son de p rublos por la vía de acceso y q rublos (p > q) por la vía férrea y la ciudad B está situada b km mas al norte que la fábrica A?
- 1583. Dos barcos navegan con velocidades constantes u y v por líneas rectas que forman entre sí un ángulo θ . Hallar la distancia mínima entre los barcos, si en un momento dado sus distancias hasta el punto de intersección de sus rutas eran iguales a a y b, respectivamente
- 1584 En los puntos A y B están situados unos focos luminosos de S_1 y S_2 bujías de intensidad. Hallar en el segmento AB = a el punto menos ilumínado.
- 1585 Un punto luminoso está situado en la línea de los centros de dos esferas que no se cortan de radios R y r (R > r) y se encuentra fuera de las esferas ¿Cuál debe ser la posición del punto para que la suma de las partes luminadas de las superfícies de las esferas sea máxima?
- 1586. ¿A qué altura sobre el centro de una mesa redonda de radio a se debe colocar una bombilla eléctrica para que la iluminación del borde sea máxima?

Indicación. La iluminación se expresa por la fórmula

$$I = k \, \frac{\sin \, \varphi}{r^2} \, ,$$

donde φ es el árgulo de inclinación de los rayos, r es la distancia del foco luminoso a la superficie iluminada, k es la intensidad del foco luminoso

1587. A un río de anchura de a m se le ha construído un canal de anchura de b m, que forma con el mismo un ángulo recto. ¿Cual es la longitud máxima de los barcos que pueden navegar por este canal?

1588. Los gastos diarios en la navegación de un barco constan de dos partes: una constante, Igual a a rublos y otra variable que crece

proporcionalmente al cubo de la velocidad ¿Cuál debe ser la velocidad » del barco para que la navegación sea la más económica?

1589. Se necesita mover una carga de peso P, situada en un plano honzontal áspero, mediante la aplicación de una fuerza ¿Cuál debe ser la inclinación de esta fuerza respecto del horizonte para que su magnitud sea mínima, si el coeficiente de rozamiento de la carga es igual a k?

1590. En una taza que tiene la forma de una semiesfera de radio a se ha colocado una barra de longitud l > 2a. Hallar la posición de equilibrio de la barra.

§ 14. Contacto de curvas. Círculo osculador. Evoluta

1.º Contacto de n-ésimo orden. Se dice que las curvas

$$y = \varphi(x)$$
 e $y = \psi(x)$

tienen en el punto x_0 un contacto de π -ésimo Torden (en sentido estricto), si $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ (k=0,1,...,n) y $\varphi^{(m+1)}(x_0) \neq \varphi^{(m+1)}(x_0)$. En este caso, para $x \to x_0$ se tiene

$$\varphi(x - \psi | x = 0^{n} [x - x_{n_{n}}^{-n} + 1]$$

2.º Circulo osculador. La circunferencia

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$$

que tiene con la curva dada v = f(x) un contacto de orden no infenor al 2° , se llama círculo osculador en el punto correspondiente. El radio de este círculo

$$R = \frac{1 + |y|^{2} 1^{\frac{3}{2}}}{1|y|^{2}}.$$

se llama radio de curvatura, y $k = \frac{1}{R}$, curvatura.

3.º Evoluta. El lugar geométrico de los centros (ξ, η) de los círculos osculadores (los centros de curvatura)

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'')}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y''}{y''}$$

se llama evoluta de la curva dada y = f(x).

CAPITULO 2, CALCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

Problemas:

1591. Elegir los parámetros k y b de la recta

$$y = kx + b$$

de tal modo que ésta tenga con la curva

$$y = x^{1} - 3x^{1} + 2$$

un contacto de orden supenor al primero.

1592. ¿Para qué valores de los coeficientes a, b y c la parábola

tiene en el punto $x = x_0$ un contacto de 2º orden con la curva $y = e^x$? 1593. ¿Qué orden de contacto con el eje Ox tienen en el punto x = 0 las curvas:

a)
$$y = 1 - \cos x$$
; b) $y = \lg x - \sin x$; c) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

1594. Demostrar que la curva: $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ e y = 0 si x = 0, tiene un contacto con el eje Ox de orden infinito en el punto $x \neq 0$.

1595. Hallar el radio y el centro de curvatura de la hipérbola

$$xy = 1$$

en los puntos. a) M (1, 1); b) N (100, 0.0.). Hallar los radios de curvatura de las siguientes curvas

1596. La parábola $y^2 = 2px$.

1597. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ $(a \ge b > 0)$.

1598. La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1599. La astroide $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}}$

1600. La chose $v = a \cos t$, $y = b \sin t$.

1601. La gicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = y(1 - \cos t)$.

1602. La evolvente del circulo $x = a (\cos t + t \sin t)$, $y = a (\sin t + t \cos t)$.

1603. Demostrar que el radio de curvatura de una línea de 2º orden

$$y^z == 2\rho x - - qx^a$$

es proporcional al cubo del segmento normal.

1604. Escribir la fórmula para el radio de curvatura de una curva dada en coordenadas polares.

Hallar los radios de curvatura de las curvas dadas en coordenadas polares (los parámetros son positivos)

1605. Espiral de Arquímedes $r = a\varphi$.

1606. Espiral logarítmica $r = ae^{m \phi}$.

1607. Cardioide $r = a (1 + \cos \varphi)$.

1608. Lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2 \varphi$.

1609. Hallar en la curva $y = \ln x$ el punto en el que la curvatura es máxima

1610. La curvatura máxima de la parábola cúbica $y = \frac{kx^3}{1000}$ ($0 \le x < +\infty$), k > 0) es igual a $\frac{1}{1000}$. Hallar el punto x en el que se alcanza esta curvatura máxima.

Hallar las ecuaciones de las siguientes curvas

1611. Evoluta de la parábola $y^4 = 2px$

1612. Evoluta de la elipse $\frac{x^2}{a^1} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1613. Evoluta de la astroide $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

1614. La evoluta de la tractriz $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

1615. La evoluta de la espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$

1616. Demostrar que la evoluta de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

tambien es una cicloide, que se diferencia de la dada solamente por su posición.

§ 15. Resolución aproximada de ecuaciones

1° Regla de las partes proporcionales (método de las cuerdas). $S_{i,la}$ función f(x) es continua en el segmento [a,b] y

$$f(a) / (b) < 0$$
,

siendo $f'(x) \neq 0$ para a < x < b, la ecuación

$$I(x) = 0$$

tiene una raíz real en el intervalo (a, b) y sólo una. Por primera aproximación de esta raíz se puede tomar el valor

$$x_1 = a + \delta_n$$

donde

$$\delta_i = -\frac{f(a)}{f(b) f(a)} b - a),$$

Aplicando luego este método a aquél de los intervalos (a, x_1) o (x_1, b) en cuyos extremos la función f(x) tenga signos contrarios, se obtiene la segunda aproximación x_2 de la raíz ξ , etc. Para acotar la n-ésima aproximación x_n es válida la formula

$$\|x_n - \xi\| \leqslant \frac{\|f(x_n)\|}{n}, \tag{2}$$

donde $m = \inf_{x < x < \delta} |f'(x)|$, siendo

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi$$

2.º Regla de Newton (método de las tangentes). Si $f''(x) \neq 0$ en el segmento $\{a,b\}$ y f(a)f''(a)>0, entonces por primera aproximación ξ_1 de la raíz ξ de la ecuación (1) se puede tomar el valor

$$\xi_1 = a - \frac{f(x)}{f(z)}$$
.

Reiterando este proceso se obtienen las aproximaciones sucesivas ξ_n $(n-1)^n$,) que convergen rápidamente hacia la raiz ξ y cuvas precisiones pueden acotarse, por ejemplo, por la fórmula (2).

Para obtener una orientación grosera, se puede dibujar un diseño de la gráfica de la función y = f(x).

problemas:

Aplicando el método de las partes proporcionales, calcular con exactitud hasta 0,001 las raíces de las siguientes ecuaciones

1617.
$$x^3 - 6x + 2 = 0$$
.
1618. $x^4 - x - 1 = 0$.

1619.
$$x = 0,1 \sin x = 2.$$

1620.
$$\cos x = x^2$$
.

Aplicando el método de Newton, calcular con la exactitud indicada las raíces de las siguientes ecuaciones:

1621.
$$x^2 + \frac{1}{x^3} = 10x$$
 (con exactitud hasta 10^{-3}).

1622.
$$x \lg x = 1$$
 (con exactitud hasta 10^{-4}).

1623. $\cos x \cot x = 1$ (con exactitud hasta 10^{-3}) (dos raíces positivas).

1624.
$$x + e^x = 0$$
 (con exactitud hasta 10^{-5}).

1625.
$$x \text{ th } x = 1 \text{ (con exactitud hasta } 10^{-6} \text{)}.$$

1626. Hallar las tres primeras raíces positivas de la ecuación

$$\lg x = x$$

con exactitud hasta 0,00%.

1627 Hallar dos raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}.$$

con exactifud hasta 10⁻³.

§ 1. Integrales indefinidas elementales

1.º Concepto de integral indefinida. Si una función f(x) está definida en el intervalo (a, b) y es continua y F'(x) = f(x) para a < x < b, entonces

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \ \alpha < x < b,$$

donde C es una constante arbitraria.

2.º Propiedades principales de la integral indefinida

a)
$$d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx$$
; b) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + G$;

c)
$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$$
 $(A = const; A \neq 0);$

d)
$$\int |f(x) + g(x)| dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$
.

3° Tabla de las integrales elementales

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+3}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

$$\prod_{x} \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad (x \neq 0).$$

III
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} -\operatorname{arcetg} x + C, \\ -\operatorname{arcetg} x + C. \end{cases}$$

IV
$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$V. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$$

$$V1 \int \sqrt{\frac{dx}{x^3 \pm 1}} = \ln(x + \sqrt{x^3 \pm 1}) + C.$$

Vi)
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{1aa} + C$$
 $(a > 0, a \ne 1), \int e^x dx = e^x + C.$

VIII.
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$IX. \int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$XIII. \int \cot x \, dx = \cot x + C,$$

$$XIII. \int \cot x \, dx = \cot x + C,$$

$$XIII. \int \cot x \, dx = \cot x + C,$$

$$XIV. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\cot x + C,$$

$$XIV. \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\cot x + C,$$

$$XV. \int \frac{dx}{\cot^2 x} = \cot x + C,$$

$$XV. \int \frac{dx}{\cot^2 x} = \cot x + C.$$

4.º Métodos fundamentales de integración.

a) Método de introducción de un nuevo parámetro. Si

$$\int I(x) dx = F(x) + C_1$$

entonces

$$\int f(u) du = F(u) + C_1$$

donde $u = \varphi(x)$ es una función derivable.

b) Metodo de descomposición. Si

entonces

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
 ,

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_1(x) dx.$$

c) Método de sustitución. Si f(x) es continua, entonces, haciendo

donde $\varphi(t)$ es una función continua junto con su derivada $\varphi'(t)$ se tiene.

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t_i) \varphi'(t) dt.$$

d) Método de integración por partes. Si a y v son unas funciones diferenciables de x, entonces

$$\int u \, dv = av - \int v \, dx$$

Aplicando la tabla de las integrales elementales, hallar las siguientes integrales

1628.
$$\int (3-x^{2})^{3} dx.$$
1629.
$$\int x^{2} (5-x)^{4} dx.$$
1630.
$$\int (1-x) (1-2x) (1-3x) dx$$
1631.
$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2} dx$$
1632.
$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^{2}}{x^{2}} + \frac{a^{3}}{x^{2}}\right) dx.$$
1633.
$$\int \frac{x+x}{1-x} dx.$$
1636.
$$\int \left(1-\frac{1}{x^{2}}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

1637.
$$\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^x}{x} dx,$$

$$1638. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^4} \, dx_4$$

1639.
$$\int \frac{x^3 dx}{1 + x^2}.$$

$$1640.\int \frac{x^3 \, dx}{1-x^3}.$$

1641.
$$\int \frac{x^3+3}{x^3-1} \, dx.$$

1642.
$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

1643.
$$\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

1644.
$$\int (2^x + 3^x)^x dx$$
.

1545.
$$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-3}}{10^x} dx.$$

1646.
$$\int \frac{e^{xx}+1}{e^x+1} \, dx.$$

1647.
$$\int (1 + \sin x + \cos x) dx$$
.

1648.
$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx$$
, $(0 \le x \le \pi)$

1651.
$$\int (a \sinh x + b \cosh x) dx$$
.

1652.
$$\int th^2 x dx$$
.

1654. Demostrar que, si

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

entonces

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \qquad (a \neq 0)$$

Hallar las integrales.

1855.
$$\int \frac{dx}{x+a}.$$
1660.
$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x-x^2}}{1-x} dx.$$
1656.
$$\int (2x-3)^{10} dx.$$
1661.
$$\int 2\frac{dx}{1+3x^2}.$$
1657.
$$\int \sqrt[3]{1-3x} dx.$$
1662.
$$\int \frac{dx}{2-3x^3}.$$
1658.
$$\int \sqrt{\frac{dx}{2-5x}}.$$
1663.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

1659.
$$\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}$$
.

1663.
$$\int \frac{1}{3(2-3x^2)}$$

CAPITULO 3 INTEGRAL INDEFINIDA

1665.
$$\int (e^{-x} + e^{-xx}) dx$$
1668.
$$\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx$$
1669.
$$\int \frac{dx}{1 + \cos x}$$
1667.
$$\int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$$
1670.
$$\int \frac{dx}{1 + \sin x}$$
1671.
$$\int [\sin(2x + 1) + \cos(2x - 1)] dx$$
1672.
$$\int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$$
1673.
$$\int \frac{dx}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})}$$

Hal ar las integrales que se dan a continuación, mediante una transformación adecuada de la expresión subintegral

	_
$1674. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$	1686. $\int \frac{x^2 dx}{(8x^2 + 27)^{\frac{2}{1}}}.$
1675. $\int x^{1/3} / 1 + \overline{x^{2}} dx$.	1687, $\int_{\sqrt{x(1+x)}}^{dx} dx$
1676. $\int \frac{x dx}{3 - 2x^2}.$	1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
1677. $\int_{1}^{x} \frac{x dx}{(1+x^{3/3})}.$	1689. $\int xe^{-x^2} dx$.
$1678 \int \frac{x dx}{4 - x^4} .$	1690. $\int \frac{e^x dx}{2 + e^x}$.
1679. $\int_{\mathbb{R}^{n}}^{\mathbb{R}^{3}} \frac{dx}{2}$.	1691. $\int_{e^{x} \to e^{-x}} dx$
$1680. \int \frac{dx}{(1+x) V^{-x}},$	1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
Indicación. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$.	1593, $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.
$1681. \int \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^4}.$	1694. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln (\ln x)}$
1682, $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}$	1695. ∫ sin³ x cos x dx.
$1683. \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2-1}}.$	1698. $\int \frac{\sin x}{V \cos^2 x} dx.$
1884. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$	1697. $\int \lg x dx.$
111	1698. $\int \operatorname{ctg} x dx.$
1685. $\int \frac{x dx}{\left(x^2 - x\right)^{\frac{3}{2}}}.$	1699. $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx.$

I. INTEGRALES INDEFINIDAS ELEMENTALES

1760.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^{3} \sin^{3} x + b^{3} \cos^{3} x}} dx.$$
1710.
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$
1711.
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$
1711.
$$\int \frac{\ln (x + \sqrt{1 + x^{3}})}{1 + x^{2}} dx.$$
1700.2.
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cot x}} dx.$$
1712.
$$\int \frac{x^{1} + 1}{x^{4} + 1} dx.$$
1701.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cot x}} dx.$$
1702.
$$\int \frac{dx}{\sin^{3} x + \sqrt{\cot x}} dx.$$
1713.
$$\int \frac{x^{1} + 1}{x^{4} + 1} dx$$
1704.
$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$
1715.
$$\int \frac{x^{2} dx}{\sqrt{1 + x^{3} + 1}}.$$
1705.
$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$
1716.
$$\int \frac{1}{1 - x^{2}} \ln \frac{1 + x}{1 + x} dx.$$
1707.
$$\int \frac{\sin x \cot x}{\sin x + x} dx.$$
1718.
$$\int \frac{\sin x \cot x}{\sin x} dx.$$
1719.
$$\int \frac{\cos x}{\sin^{3} x + \cos^{3} x} dx.$$
1719.
$$\int \frac{2^{n} \sin^{3} x}{\sin^{3} x + \cos^{3} x} dx.$$
1719.
$$\int \frac{2^{n} \sin^{3} x}{\sin^{3} x + \cos^{3} x} dx.$$
1720.
$$\int \frac{x \cot x}{\sqrt{1 + x^{3} + 1}} dx.$$
1720.
$$\int \frac{x \cot x}{\sqrt{1 + x^{3} + 1}} dx.$$

Aplicando el método de descomposición, calcular las integrales

1721. $\int x^4 (2 - 3x^4)^3 dx$	1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx,$
1721.1. $\int x (1-x)^{10} dx$.	1727. $\int_{(1-x)^{1/6}} \frac{x^2}{-x^{1/6}} dx$
$1722. \int \frac{1+x}{x} dx$	1728. $\int \frac{x^5}{x^{-1}} dx$
1723. $\int \frac{x^3}{1+x} dx$	$1729. \int \sqrt{\frac{dx}{x+1} + \sqrt{x-1}}.$
$1724. \int \frac{x^2}{3+x} dx.$	1730. $\int x \sqrt{2-5x} dx$
1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx.$	Indicación, $x = -\frac{1}{\pi}(2 - 5x) + \frac{2}{\pi}$

CAPITULO 3 INTEGRAL INDEPONIDA

1731.
$$\int_{\frac{\pi e^{x}}{2}}^{\frac{x}{3}} \frac{dx}{1-3x}.$$

1747.
$$\int \sin^4 x \, dx$$
.

1732.
$$\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$
.

$$1733. \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$$

Indicación.

$$1 = \frac{1}{4} [(x+3) - (x-1)],$$

1734.
$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^{2} + x + 2}$$

1735.
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

1736.
$$\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$$

1753.
$$\int \sin^2 3x \sin^2 2x \, dx$$
.

1737.
$$\int \frac{z \, dz}{(z+2)(z+2)}$$
.

1738.
$$\int \frac{x \, dx}{x^4 + (x^4 + 2)}.$$

Indicación.

 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

1739.
$$\int \frac{dx}{(x+b)^2} (a \neq b)$$
, 1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$.

1755.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$$

1740.
$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} (a^4 \neq b^2). \qquad 1756. \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}.$$

$$1756. \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}.$$

1741.
$$\int \sin^4 x \, dx$$
.

1757.
$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$$

1742.
$$\int \cos^3 x \, dx_*$$

1758.
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$
.

1743.
$$\int \sin x \sin (x + a) dx$$

1759,
$$\int_{1-\tau}^{\infty} \frac{dx}{e^{\tau}} dx$$

1744.
$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x \, dx$$
.

1760.
$$\int \frac{(1 + e^x)^5}{1 + e^{15}} dx.$$

1745.
$$\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx$$
, 1761. $\int \sinh^x x dx$,

1746.
$$\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx.$$

I. INTEGRALES INDEFINIDAS ELEMENTALES

1762.
$$\int ch^3 x \, dx$$
.

1763.
$$\int \sinh x \sin 2x \, dx.$$

1765.
$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x}$$

Aplicando sustituciones adecuadas, hallar las siguientes integrales:

1766.
$$\int x^{2} \sqrt[3]{1-x} dx$$
.

1772.
$$\int_{1}^{s_{1}} \frac{x \cos^{s} x}{+ \cos^{s} x} dx.$$

1767.
$$\int x^{1} (1 - 5x^{1})^{16} dx.$$

1773.
$$\int_{0}^{\sin^4 x} dx.$$

1768.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx.$$

1774.
$$\int \frac{\ln x \, dx}{x \, V + \ln x}.$$

1769.
$$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
 1775. $\int \frac{dx}{x^2}$

1775.
$$\int_{a^{\frac{x}{2}} \to a^{\frac{x}{2}}} dx$$

1770,
$$\int x^3 (2 - 5x^3)^{\frac{2}{3}} dx$$
.

1776.
$$\int_{1}^{1} \frac{dx}{e^x}$$

1777.
$$\int \frac{dx}{V'x} \frac{dx}{1-x}.$$

Aplicando las sustituciones trigonométricas $x = a \operatorname{sen} t$, $y = a \operatorname{tg} t$, x = a sen2 t, etc., hallar las siguientes integrales (los parametros son (sovifizor

1778.
$$\int_{\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}}^{\frac{1}{2}}$$

1782.
$$\int \sqrt{\frac{3-x}{a-x}} dx$$
.

1779.
$$\int_{1}^{3} \frac{x^{2} dx}{x^{2} + 2},$$

1783.
$$\int \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{x}{\gamma_d - x}} dx,$$

1780.
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

1784.
$$\int \frac{dx}{1/(x-a)} \frac{dx}{(b-x)}$$

1781.
$$\int_{-(x^2+\sigma^2)^{\frac{3}{4}}}^{\frac{dx}{2}}$$

Indicación, Aplicar la sustitución $x \leftarrow a \Rightarrow (b \Rightarrow a) \operatorname{sig}^{a} f_{a}$

1785.
$$\int \int \overline{(x-a)(b-x)} \, dx.$$

Aplicando las sustituciones hiperbólicas $x = a \sin t$, $x = a \cot t$, etc., hallar las siguientes integrales (los parametros son positivos)

1786.
$$\int \gamma \, \overline{a^* + x^*} \, dx$$
.

1786.
$$\int \sqrt{a^4 + x^4} dx$$
. 1787. $\int \frac{x^3}{1 - a^2 + x^4} dx$.

CAPITULO 3 INTEGRAL INDEFINIDA

1788.
$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx.$$
 1789.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$$

Indicación, Hacer $\kappa + \alpha = (b - a) \oplus b^* t$

Aplicando el método de integración por partes, hallar las siguientes

1791) \ \ \lambda \lambda x dx.	
1700	1801. ∫ x' ch 3x dx.
1792. $\int x^n \ln x dx \ (n \neq -1).$	1802. ∫ steig x dx.
$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$	1803) $\int atcsun x dx$.
1784.) [Vx ln x dx.	1804. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.
1795) \(xe^{-x} dx.	$1805^{\circ} \int x^4 \arccos x dx$
1796) $\int x^2 e^{-2x} dx$.	1806, $\int \frac{arcsin x}{x^2} dx$
$\int x^2 e^{-x^2} dx.$	1807. $\int \ln \{x + \sqrt{1 + x^2}\} dx.$
1798: \(\inf x \cos x dx.	1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.
$1799 \int x^{2} \sin 2x dx.$	1809. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$
$1800) \int x \sin x dx.$	1810. $\int \sin x \cdot \ln (\operatorname{tg} x) dx.$

Hallar las integrales:

1811.
$$\int x^{1}e^{x^{4}} dx.$$
1812.
$$\int (axc \sin x)^{2} dx.$$
1819.
$$\int \sqrt{x^{2} + a} dx.$$
1819.
$$\int \sqrt{x^{2} + a} dx.$$
1819.
$$\int \sqrt{x^{2} + a} dx.$$
1820.
$$\int x^{4} \sqrt{a^{2} + x^{2}} dx.$$
1815.
$$\int \frac{x^{4} \ln(x + \sqrt{1 + x^{2}})}{\sqrt{1 + x^{2}}} dx.$$
1821.
$$\int x \sin^{2} x dx.$$
1822.
$$\int e^{\sqrt{x}} dx.$$
1816.
$$\int \frac{x^{2}}{(1 + x^{2})^{2}} dx.$$
1828.
$$\int x \sin^{2} x dx.$$
1827.
$$\int \frac{dx}{(a^{2} + x^{2})^{2}} dx.$$
1828.
$$\int x \sin^{2} x dx.$$
1829.
$$\int x \sin^{2} x dx.$$
1821.
$$\int x \sin^{2} x dx.$$
1822.
$$\int e^{\sqrt{x}} dx.$$
1823.
$$\int x \sin^{2} x dx.$$
1840.
$$\int \frac{x^{2} \ln(x + \sqrt{1 + x^{2}})}{(1 + x^{2})^{2}} dx.$$

I INTEGRALES INDEFINIDAS ELEMENTALES

1825.
$$\int \frac{e^{prcly x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx,$$
1831.
$$\int (e^x - \cos x)^x dx,$$
1826.
$$\int \sin(\ln x) dx.$$
1833.
$$\int \frac{\arccos e^x}{e^x} dx,$$
1833.
$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx,$$
1828.
$$\int e^{ax} \cos bx dx,$$
1834.
$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$
1839.
$$\int e^{ax} \sin bx dx,$$
1830.
$$\int e^{ax} \sin^2 x dx,$$

El cálculo de las siguientes integrales está basado en la reducción del trinomio cuadrático a la forma canónica y en la aplicación de las fórmulas

1.
$$\int \frac{dx}{a^{\frac{1}{2}} + x^{3}} = \frac{1}{a} \arctan \left| \frac{x}{a} + C \right| \quad (a \neq 0).$$

1. $\int \frac{dx}{a^{\frac{1}{2}} - x^{3}} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C \quad (a \neq 0).$
11. $\int \frac{x}{a^{\frac{1}{2}} + x^{3}} = \pm \frac{1}{2} \ln \left| x^{2} + x^{3} \right| + C.$

IV.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^4}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad (a > 0).$$

$$V_* \int_{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \qquad (a > 0).$$

VI.
$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$
.

$$VI : \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{x}{2} \, \sqrt{a^2 + x^2} \, + \frac{a^4}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad (a > 0),$$

VIII.
$$\int \sqrt{x^{2} \pm a^{2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^{2} \pm a^{2}} \pm \frac{a^{3}}{2} \sin |x| + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}} + C.$$

Hallar las integrales

1836.
$$\int \frac{d\tau}{a + bx^{2}} \quad (ab \neq 0).$$
1840.
$$\int \frac{(\tau + 1)}{x^{2} + x + 1} d\tau.$$
1837.
$$\int \frac{dx}{x^{3} - x + 2}.$$
1841.
$$\int \frac{x dx}{x^{3} - 2x \cos x + 1}.$$
1842.
$$\int \frac{x^{3} dx}{x^{4} - x^{2} + 2}.$$
1843.
$$\int \frac{x^{3} dx}{x^{4} - 2x^{3} - 1}.$$
1843.
$$\int \frac{x^{3} dx}{x^{4} - x^{3} - 2}.$$

1844.
$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}.$$
1846.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + bx^2}} (b \neq 0).$$
1848.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}.$$
1847.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$
1849.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}.$$
1850. Demostrar que, si
$$y = ax^2 + bx + c \quad \{a \neq 0\}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y}{2} + \sqrt{ay} \right| + C \quad \text{si} \quad a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \left| \frac{y}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C \quad \text{si} \quad a < 0.$$
1851.
$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + x - 1}} \, dx.$$
1858.
$$\int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{x^2 + x}}.$$
1852.
$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + x - 1}} \, dx.$$
1859.
$$\int \frac{dx}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 2}}.$$
1853.
$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^2}}.$$
1860.
$$\int \frac{dx}{(x + 2)^2 \sqrt{x^2 + 2x - 2}}.$$
1854.
$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x^2 - 1}}.$$
1865.
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - x^2}} \, dx.$$
1866.
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x - x^2}} \, dx.$$
1857.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x - x^2}}.$$
1865.
$$\int \frac{x^2 + x^2}{\sqrt{x^2 + x - x^2}} \, dx.$$
1865.
$$\int \frac{x^2 + x^2}{\sqrt{x^2 + x - x^2}} \, dx.$$

§ 2. Integración de funciones racionales

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, hallar las

1866.
$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx, \qquad 1867. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

1868.
$$\int \frac{x^{16} dx}{x^{7} + x - 2}.$$
1879.
$$\int \frac{x dx}{(x - 1)^{3}, x^{2} + 2x + 2}.$$
1869.
$$\int \frac{x^{3} + 1}{x^{3} - 5x^{2} + 6x} dx.$$
1880.
$$\int \frac{dx}{x(1 + x)(1 + x + x^{2})}.$$
1870.
$$\int \frac{x^{4}}{x^{3} + 5x^{2} + 4} dx.$$
1881.
$$\int \frac{dx}{x^{2} + 1}.$$
1872.
$$\int \frac{x dx}{(x + x^{2} - 3x + 2)}.$$
1883.
$$\int \frac{dx}{x^{3} - 1}.$$
1884.
$$\int \frac{dx}{x^{3} - 1}.$$
1875.
$$\int \frac{dx}{(x + x^{2} - 3x + 2)^{2}} dx.$$
1885.
$$\int \frac{dx}{x^{4} + 1}.$$
1876.
$$\int \frac{dx}{x^{3} + 5x^{2} + 4} dx.$$
1887.
$$\int \frac{dx}{(x^{2} - 4x + 4, (x^{2} - 4x + 5)}.$$
1889.
$$\int \frac{dx}{x^{4} - x^{2}} \frac{dx}{x^{3} - 2x^{4} - 2x^{2} + 2x + 1}.$$
1878.
$$\int \frac{dx}{(x^{2} - 4x + 4, (x^{2} - 4x + 5)}.$$
1889.
$$\int \frac{dx}{(x^{2} - x^{2} + 2x + 1)}.$$

1890 Cuál es la condición para que la integral

$$\int \frac{ax^2 + bx + r}{x^3 (x-1)^2} dx$$

represente una función racional?

Aplicando el método de Ostrogradski, hadar las integrales:

1891.
$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)^2 \, (x+1)^3}.$$
1892.
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$
1896.
$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \, dx,$$
1897.
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$
1894.
$$\int \frac{x^2 \, dx}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Separar la parte algebraica de las siguientes integrales:

1898.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{3}+1}{(x^{4}+x^{3}+1)^{3}} dx_{n}$$

1900.
$$\int \frac{4x^4-1}{(x^2+x+1)^2} dx_4$$

1899.
$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

1901. Hallar la integral

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^4 + 3x^4 + 2x + 1}$$

1902. ¿Cuál es la condición para que la integral

$$\int \frac{\alpha x^4 + 2\beta x + \gamma}{(ax^4 + 2bx + c)^4} dx$$

represente una función racional?

Aplicando diversos métodos, hallar las siguientes integrales

1903.
$$\int \frac{x^3}{|x| + 1/40} \, dx.$$

1912.
$$\int_{-1}^{1} \frac{x^{2n+1}}{(x^{2n}+1)^2} dx.$$

$$1904. \int_{x^{\overline{i}} - \overline{i}}^{x dx} dx$$

1913.
$$\int \frac{dx}{x^{-x^{1/2}+x^{-2}}}$$
.

1905.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2 dx}{1+3}$$
,

1914,
$$\int \frac{dz}{z \cdot x^{10} + 1f^2}$$
.

1906.
$$\int \frac{x^4 + x}{x^5 + 1} dx,$$

1915.
$$\int \frac{1-x^3}{x_1 + x^3} dx.$$

1907.
$$\int_{x(x^{4}+3x^{4}+2)} dx.$$

1916.
$$\int \frac{x^4 - 1}{x \cdot (x^4 - 5)(x^4 - 5x + 1)} dx.$$

1908.
$$\int \frac{x^4 \, e^2 x}{(x^{16} - 10)^4}.$$

1917
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

1909.
$$\int \frac{x^{11} dx}{x^4 + 3x^4 + 2}$$

1918.
$$\int_{x^3 + x^2 + x^2 + x + 1} dx,$$

1910.
$$\int \frac{f(x^{10} + 2x^{4}) dx}{(x^{10} + 2x^{4} + 2)^{6}}.$$

1919.
$$\int \frac{x^{k}-x}{x^{k}+1} dx.$$

1911.
$$\int \frac{x^{19-1}}{x^6+1} dx.$$

1920.
$$\int \frac{x^4+1}{x^4+1} dx.$$

1921. Deducir una fórmula de recurrencia para el cálculo de la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (a \neq 0).$$

Aplicando esta fórmula, calcular

$$I_{s} = \int \frac{dx}{(x^{2} + x + 1)^{2}}.$$

Indicación. Utilizar la identidad

$$4a (ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 + (4ac - b^2)$$

1922. Aplicar la sustitución $t = \frac{z + a}{z + b}$ para el cálculo de la integral

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$$

(m y n son números naturales)

Valiéndose de esta sustitución, hallar

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3(x+3)^3}$$

1923. Calcular

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} \, dx,$$

si $P_n(x)$ es un polinomio en x de grado n, Indicación. Ap icar la fórmula de Taylor

1924. Sea $R(x) = R^+(x^2)$, donde R^+ es una función racional. ¿Qué particulandades posee la descomposición de la función R (x) en fracciones racionales?

1925. Calcular

$$\int \frac{dx}{1-x^{3/2}},$$

donde n es un número entero positivo.

§ 3. Integración de funciones irracionales

Mediante reducción de las funciones subintegrales a funciones racionales, hallar las siguientes integrales.

1926.
$$\int \frac{dx}{1+y''x}$$
.

1926.
$$\int \frac{dx}{1+V^{-x}}, \qquad 1929. \int \frac{1-V^{-x}+1}{1+\sqrt[4]{x+1}} dx.$$

1927.
$$\int \frac{dx}{x_1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$
. 1930.
$$\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})^2 \sqrt{x}}$$
.

1930.
$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^{2}\sqrt{1-x}}$$

1928.
$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}/2+x}{x+\frac{3}{2}/2+x} dx$$

1828,
$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} dx.$$
 1931.
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx.$$

1932.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$
 1933
$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt[4]{x^4(x-x)}} \quad (a > 0).$$

1934.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$$
 (n es un numero natural

1935.
$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + x}}}.$$

Indicación Hacer $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ -b_{\alpha} & 1 \end{pmatrix}^{\alpha}$.

1936. Demostrar que la integral

$$\int R\left[x, \ (x-a)^{\frac{p}{n}} \ (x-b)^{\frac{q}{n}}\right] dx,$$

donde R es una función racional y p, q n son numeros enteros, es una función elemental, si

$$p + q = kn$$

donde k es un número entero.

Hallar las ir tegrales de las irracionalidades cuadráticas más simples i

1937.
$$\int_{V_{+}} \frac{x^{2}}{x+x^{2}} dx.$$
1940.
$$\int_{X} \frac{Vx^{3} - x - \frac{1}{2}}{x} dx.$$
1941.
$$\int_{1-x^{2}} \frac{x dx}{1-x^{2} + x + x}.$$
1941.
$$\int_{1-x^{2}} \frac{x dx}{1-x^{2} + x + x}.$$
1942.
$$\int_{1-x^{2}} \frac{x-x^{3}}{1+x^{2} + x + x^{2}} dx.$$

Aplicando la fónnula

$$\int \frac{P_{n}(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x) y + \epsilon \int \frac{dx}{y},$$

donde $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $P_n(x)$ es un polinomio de grado n. $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado n-1 y λ es un número, hallar .35 signientes integrales

1943.
$$\int \frac{x^{2}}{\sqrt{1+x^{2}-x^{2}}} dx.$$
1947.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+x^{2}+1}}.$$
1944.
$$\int \frac{x^{2} dx}{\sqrt{1+x^{2}}}.$$
1948.
$$\int \frac{dx}{x^{4} + \sqrt{x^{2}-1}}.$$
1945.
$$\int x^{4} \int \frac{dx}{a^{2}-x^{2}} dx.$$
1949.
$$\int \frac{dx}{(x-1)^{3} \int \frac{dx}{x^{2}+3x+4}}.$$
1946.
$$\int \frac{x^{3}-6x^{2}+11x-6}{\sqrt{x^{4}+4x+3}} dx.$$
1950.
$$\int \frac{dx}{(x+1)^{3} \int x^{2}+2x}.$$

1951. ¿Cuál es la condición para que la integral

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{Vax^2+bx+c} \, dx$$

represente una función algebraica?

Hallar $\int \frac{P(x)}{O(x)} dx$, donde $y = Vax^2 + bx + c$, descomponiendo la

función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es fracciones simples.

1952.
$$\int \frac{x \, dx}{(x-1)^3 \sqrt{1+2x-x^2}}.$$
1957.
$$\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{1+2x-x^2}}.$$
1958.
$$\int \frac{dx}{(x^2-1) \sqrt{x^2-x-1}}.$$
1958.
$$\int \frac{dx}{x^2+1 \sqrt{x^2-x^2}}.$$
1954.
$$\int \frac{\sqrt{x^4+x+1}}{(x+1)^2} \, dx.$$
1959.
$$\int \frac{dx}{(x^2+1) \sqrt{1-x^2}}.$$
1955.
$$\int \frac{x^2}{(1+x) \sqrt{1+2x-x^2}} \, dx.$$
1960.
$$\int \frac{1}{x^2-2} \, dx.$$
1956.
$$\int \frac{x \, dx}{(x^2-3x+2 \sqrt{x^2-4x-3})}.$$

Reduciendo los trinomios cuadráticos a la forma canónica, calcular las siguientes integrales

1961.
$$\int \frac{dx}{x^{2} + x - 1} \sqrt[3]{x^{2} - x}$$
1962.
$$\int \frac{x^{2} dx}{(4 - 2x + x^{2}) \sqrt[3]{2 + x} - x^{2}}$$
1963.
$$\int \frac{(x + 1) dx}{(x^{2} + x + 1) \sqrt[3]{x^{2} + x}}$$

1964. Valiéndose de la sustitución homográfica $\chi = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t}$, calcular la integral

$$\int_{-x^2-x} \frac{dx}{-(t)^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}} + x + \frac{1}{2}$$

1965. Hallar

$$\int \frac{dx}{(x^3+2)+2x^2-2x+5}.$$

Apheando las sustituciones de Euler

1)
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + z_k$$
 Si $a > 0$;

2)
$$\sqrt{ax^6 + bx + c} = xz + 1$$
, c, si $c > 0$;

3)
$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z_1x - x_1$$

ha lar las siguientes integrales

1966.
$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$
1969.
$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$$

1967.
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$$
. 1970.
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+3x+2}}$$

1968.
$$\int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} \, dx$$
.

Aplicando distintos métodos, hallar las siguientes integrales

1971,
$$\int \frac{dz}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x}}$$
1976,
$$\int \frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$
1972,
$$\int \frac{x \, dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$
1977,
$$\int \frac{(x^2 + 1) \, dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

1973.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}}, \quad 1978. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^4 + 2x^4 - 1}}$$

1974.
$$\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx$$
, 1979.
$$\int \frac{(x^2+1) dx}{x\sqrt{x^2+x^2+1}}$$
.

1975.
$$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} dx.$$

1980. Demostrar que el cálculo de la integrat

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx,$$

donde R es una función racional, se reduce a la integración de una función racional.

La integral del binomio diferencial

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx_i$$

donde m, n y p son números racionales, puede reducirse a la integración de funciones racionales solamente en los signientes tres casos (teorema de Chebichey)

Caso 1. Sea p entero. Hacemos $x = z^{-1}$, donde. V es el denominador común de las fracciones m y n.

Caso 2. Sea $\frac{m+1}{n}$ un número entero. Hacemos $a+bx^n=z^N$, donde λ es el denominador de la fracción p

Caso 3 Sea $\frac{m+1}{n} + p$ entero. Aplicamos la sustitución $ax^{-n} + b = z^N$, donde N es el denominador de la fracción p.

Sin 1, entonces estos casos son equivalentes a los siguientes 1) p es entero, 2) m es entero, 3) m + p es entero.

Hallar las siguientes integrales

1981.
$$\int \sqrt{x^{3} + x^{3}} dx.$$
1986.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{3}}}.$$
1987.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{3}}}.$$
1988.
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^{3}}}.$$
1988.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{3}}}.$$
1989.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{3}}}.$$

1990. ¿En qué casos la integral

$$\int \sqrt{1+x^a} \, dx$$

donde m es un número racional, representa una función elemental?

§ 4 Integración de funciones trigonométricas

Las integrales de la forma

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

donde m y n son números enteros, se calcular mediante transformaciones artificiales o valiéndose de las fórmulas de reducción.

Hallar las integrales:

1991.
$$\int \cos^{4}x \, dx$$
.
1996. $\int \sin^{3}x \cos^{4}x \, dx$.
1997. $\int \frac{\sin^{3}x}{\cos^{4}x} \, dx$.
1993. $\int \cos^{4}x \, dx$.
1998. $\int \frac{\cos^{4}x}{\sin^{4}x} \, dx$.
1994. $\int \sin^{4}x \cos^{4}x \, dx$.
1999. $\int \frac{dx}{\sin^{4}x}$.
1995. $\int \sin^{4}x \cos^{4}x \, dx$.
2000. $\int \frac{dx}{\cos^{4}x}$.

	$\int_{0}^{x} \frac{dx}{\sin^{4}x \cos^{4}x} dx$	2006.	$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} dx,$
2002.	$\int_{\sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x} dx$	2007.	$\int_{V \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{\frac{1}{2}} x} dx$
2003.	$\int \frac{dx}{\sin x \cos^6 x} dx$	2008.	$\int \frac{dx}{\cos x^2 \sqrt{\sin^2 x}}.$
	$\int tg^{b} x dx.$		$\int \frac{dx}{\sqrt{\lg x}}.$
2005.	$\int \operatorname{clg}^* x dx,$		$\int \frac{\partial x}{\sqrt[2]{\lg x}}.$

2011. Deducir las fórmulas de reducción para las integrales

a)
$$I_n = \int \sin^n x \, dx$$
; b) $K_n = \int \cos^n x \, dx$ $(n > 2)$

y valiéndose de ellas, calcular

$$\int \sin^4 x \, dx \quad y \quad \int \cos^4 x \, dx.$$

2012. Deducir las fórmulas de reducción para las integrales

a)
$$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$$
; b) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n > 2)$

y valiendose de eLas, calcular

$$\int \frac{dx}{s_x e^x x} y = \int \frac{dx}{\cos^2 x},$$

Las siguientes integrales se calculan valiéndose de las fórmulas:

1.
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha + \beta)].$$

II.
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)].$$

III.
$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$$

Hallar las integrales

2013.
$$\int \sin 5x \cos x \, dx$$
. 2016. $\int \sin x \sin(x + a) \sin(x + b) \, dx$, 2014. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$. 2017. $\int \cos^a ax \cos^a bx \, dx$. 2015. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx$. 2018. $\int \sin^a 2x \cdot \cos^a 3x \, dx$.

Las siguientes întegrales se caiculan valiéndose de las identicades

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin [(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

y,
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

Calcular las integrales:

2019.
$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)},$$
 2022.
$$\int \frac{dx}{\sin(x-\sin a)},$$
 2020.
$$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)},$$
 2023.
$$\int \frac{dx}{\cos x + \cos a},$$
 2021.
$$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)},$$
 2024.
$$\int \frac{dx}{\cos x + a} dx$$

Las integrales de la forma

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx,$$

donde R es una función racional, se reducen en el caso general a la integración de funciones racionales mediante la sustitución te $\frac{x}{2} = t$.

a) Si se venfica la igualdad

$$R \leftarrow \sin x, \cos x = -R (\sin x, \cos x)$$

Q

$$R(\sin x_i - \cos x) = -R(\sin x_i \cos x),$$

entonces es conveniente aplicar la sustitución $\cos x = t$ o sen x = t, respectivamente.

b) Si se venfica la igualdad

$$R \leftarrow \sin x_1 \rightarrow \cos x_2 = R (\sin x_1 \cos x_3)$$

entonces es conveniente aplicar la sustitución tg|x|=t

Hallar las integrates

2025.
$$\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 5},$$
2026.
$$\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x},$$
2027.
$$\int \frac{\sin^3 x}{\sin x + 2 \cos x} dx,$$
2028.
$$\int \frac{dx}{1 + e \cos x},$$
2031.
$$\int \frac{\cos^3 x}{(a^2 \sin^3 x + b^2 \cos^2 x)^2},$$
2032.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx,$$
2033.
$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2},$$
2043.
$$\int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos^3 x},$$
2054.
$$\int \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x},$$
2055.
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x + \cos^3 x},$$

2038. $\int_{\sin^{2} x + \cos^{2} x}^{\sin^{2} x + \cos^{2} x} dx$

2039. $\int \frac{dx}{\sin^{3}x + \cos^{3}x}$

2037. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x - \cos^4 x}{x + \cos^4 x} dx, \qquad 2040. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x} dx.$

2041. Hallar la integral

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

reduciendo el denominador a la forma logarítmica,

2042. Demostrar que

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln_1 a \sin x + b \cos x + C_1$$

donde A, B, C son constantes.

Indicación, Hacer

$$a_t \sin x + b_t \cos x = A (a \sin x + b \cos x) + B (a \cos x + b \sin x),$$

donde A y B son constantes.

Hallar las integrales

$$2043. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx.$$

2043.
$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx.$$
 2044.
$$\int \frac{dx}{3 + 5 \lg x}$$
 2043.
$$\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x} dx.$$
 2045.
$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b_1 \cos x)} dx.$$

2046. Demostrar que

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| +$$

$$+C\int_{\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+a}}^{\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+a}}$$

donde A. B. C son unos coeficientes constantes. Hallar las integrales:

2047.
$$\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx.$$
 2049.
$$\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x} dx.$$

2049.
$$\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx.$$

2048.
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx,$$

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 7b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx =$$

$$-A\sin x + B\cos x + C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x},$$

donde A, B, C son coeficientes constantes.

Hallar las integrales

2051.
$$\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$$

2052.
$$\int \frac{\sin^{3} x - \sin x \cos x + 2 \cos^{3} x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$$

2063. Demostrar que si $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, entonces

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + a \cos^2 x} dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_1 u_2^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_2 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_2 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_2 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_2 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_2^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_1^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1 u_2^2 + \lambda_2} dx = A \int \frac{du_2}{k_1$$

donde A, B son coeficientes indeterminados, \(\lambda_1\), \(\lambda_2\) son las raíces de la ecuación 🕳

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_1),$$

$$u_i = (a - \lambda_i \sin x + b \cos x + y + k_i = \frac{1}{a - \lambda_i}, \quad (i = 1, 2).$$

Hallar las integrales

2054.
$$\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} \ dx.$$

2055.
$$\int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{2 \sin^3 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x} i$$

2056.
$$\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} \, dx.$$

2057. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-s}} + C \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-s}} \, ,$$

donde A, B, C son coeficientes indeterminados.

2058. Hallar

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}.$$

2059. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} dx$$

y determinar los coeficientes A, B y C, si n es un número natural mayor que la unidad.

Hallar las integrales:

2060.
$$\int \frac{\sin x \, dx}{\cos x \, \sqrt{1 + \sin^2 x}} = 2062. \int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$$
2061.
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \, \sqrt{1 g \, x}} \, dx, \qquad 2063. \int \frac{dx}{(1 + \epsilon \cos x)^3} \qquad (0 < \epsilon < 1).$$
2064.
$$\int \frac{\cos^{n-1} \frac{x + a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x - a}{2}} \, dx,$$

Indicación, Hacer
$$t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}$$
.

2065 Deducir la fórmula de reducción para la integral

$$I_n = \int_1^a \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x}{2} + \frac{a}{2}} \right)^n dx$$

(n es un número natural).

§ 5. Integración de diversas funciones transcendentes

2066. Demostrar que, si $P(\mathbf{x})$ es un polinomio de grado n_i entonces

$$\int P(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n \frac{p(m(x))}{a^{m+1}} \right] + C_n$$

2067. Demostrar que, si P(x) es un polinomio de grado n, entonces

$$\int P(x) \cos ax dx \Longrightarrow$$

$$= \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P(x)}{a^3} - \dots \right] +$$

$$+ \frac{\cos ax}{a^3} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \dots \right] + C$$

$$\int P(x) \sin ax \, dx = \frac{-\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{1V}(x)}{a^4} - \cdots \right] + \frac{\sin ax}{a^2} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^4} + \frac{P^{V}(x)}{a^4} - \cdots \right] + C.$$

Hallar las integrales:

2081. Demostrar que, si R es una función racional y los números a_1 $a_2,...,a_n$ son conmensurables, entonces la integral

$$\int R\left(e^{a_1x},\ e^{a_2x},\ \dots,\ e^{a_nx}\right)dx$$

es una fanción elemental.

Hallar las siguientes integrales.

2082.
$$\int \frac{dx}{(1+e^{x})^{3}} dx$$
2083.
$$\int \frac{e^{xx}}{1+e^{x}} dx$$
2084.
$$\int \frac{dx}{1+e^{x}} dx$$
2086.
$$\int \frac{1+e^{\frac{x}{3}}}{(1+e^{\frac{x}{3}})^{4}} dx$$

2087.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{x}-1}}$$
2089.
$$\int \sqrt{e^{x}+4e^{x}-1} dx.$$
2090.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{x}+1}} dx.$$

2091. Demostrar que la integral

$$\int R(x) e^{ax} dx$$

donde R es una función racional cuyo denominador solamente tient raíces reales, se expresa mediante las funciones elementales y la función transcendente

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = A(e^{ax}) + C_{s}$$

donde

$$\ln x = \int_{1}^{1} \frac{dx}{x}$$

2092. En qué caso la integral

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^{x}dx,$$

donde $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ y $a_0, a_1 = a_n$ son constantes, representa una función elementa.?

Hallar las integrales.

2093.
$$\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x} e^{x} dx.$$
2094.
$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$$
2097.
$$\int \frac{x^{4} e^{2x}}{(x - 2)^{3}} dx.$$
2095.
$$\int \frac{e^{2x}}{x^{2} - 3x + 2} dx.$$

Hallar has integrales que contienen funciones del tipo $\ln f(x)$, $\arctan f(x)$, $\arctan f(x)$, $\arctan f(x)$, arcsen f(x), arccos f(x), donde f(x) es una función algebraica:

2098.
$$\int \ln^{n} x \, dx$$
 (*n* es un número natural)
2099. $\int x^{3} \ln^{a} x \, dx$, 2160. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{a} dx$.
2101. $\int \ln[(x+a)^{a+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.
2102. $\int \ln^{a}(x+\sqrt{1+x^{2}}) \, dx$

2103.
$$\int \ln \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \, dx$$
.

2104.
$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$
2111.
$$\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$
2105.
$$\int x \arctan (x+1) dx.$$
2112.
$$\int \frac{x \arctan x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$
2106.
$$\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} dx.$$
2118.
$$\int x \arctan x \ln (1+x^2) dx.$$
2108.
$$\int \arcsin \sqrt{x} dx.$$
2119.
$$\int x \arccos \frac{1}{x} dx.$$
2119.
$$\int x \arctan \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$
2119.
$$\int \frac{\ln (x+\sqrt{1+x^2}) dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hallar las integrales que contienen funciones hiperbólicas

Hallar last integrales que contiend i funciones in products

2116.
$$\int \sinh^4 x \cosh^2 x dx$$
.

2123. $\int \frac{dx}{\sinh x + 2 \cosh x}$.

2124. $\int \sinh^4 x dx$.

2125. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x - 4 \sinh x \cosh x + 9 \sinh^2 x}$.

2126. $\int \sinh x dx$.

2127. $\int \coth^2 x dx$.

2128. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x - 4 \sinh x \cosh x + 9 \sinh^2 x}$.

2129. $\int \sinh x dx$.

2129. $\int \coth^2 x dx$.

2129. $\int \sinh^2 x dx$.

§ 6. Diversos ejercicios de integración de funciones

Hallar las integrales

2126.	$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{n}{2}} \left(1 + x^{\frac{n}{2}}\right)} +$	2132.	$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx,$
	$\int \frac{x^4 dx}{(1-x^2)^2}.$	2133.	$\int \frac{x^1 dx}{\sqrt{1+x^2}}.$
	$\int \frac{dx}{1 + x^2 + x^2}.$		$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2}\sqrt{x-x_1}}.$
2129,	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$		$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2+x^2}}$
	$\int e^{t} \sqrt{\int \frac{x}{1-x}} dx$		$\int \frac{d\lambda}{x \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda^2 - 1}},$
2131,	$\int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx,$		1111-

CAPITULO 3 INTEGRACION INDEFINIDA

2137.
$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} dx,$$

2138.
$$\int \frac{(1+x) dx}{x+\sqrt{x+x^2}},$$

2139.
$$\int \frac{\ln (1+x+x^{2})}{(1+x)^{2}} dx.$$

2140.
$$\int (2x+3)\arccos(2x-3) dx$$
.

2141.
$$\int x \ln(4+x^4) dx$$
.

2142.
$$\int \frac{\arccos x}{x^2} \frac{1+x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

2143.
$$\int \frac{x \ln (x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

2144.
$$\int x \sqrt{x^2 - 1} \, dx$$

2145.
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$$

2146.
$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}.$$

2147.
$$\int \frac{5.0 \, 4x}{5.0^3 \, x - \sqrt{0.0^3 \, x}} \, dx.$$

2148.
$$\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}$$

2149.
$$\int \frac{dx^2 + b}{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x \, dx.$$

2150.
$$\int \frac{ax^{4}+b}{x^{4}-1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx,$$

2151.
$$\int \frac{x \ln x}{(1 + x^{k})^{k}} dx,$$

2152.
$$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

2153.
$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx.$$

2154.
$$\int \frac{x^2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2155.
$$\int \frac{x^4 \arctan (g \, x)}{1 + x^2} \, dx.$$

2156.
$$\int \frac{x \arctan x^{3} g x}{(1+x^{2})^{2}} dx$$

2157
$$\int \frac{x \cdot n(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx,$$

2158.
$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x \, dx.$$

2159
$$\int x (1+x^2) \operatorname{atccig} x \, dx.$$

2160.
$$\int x^{x} (1 + \ln x) dx.$$

2161.
$$\int \frac{arc\sin e^x}{e^x} dx.$$

2162.
$$\int_{e^{\frac{\pi}{2}}(1+e^{x})}^{\frac{\pi}{2}(1+e^{x})} dx.$$

2163.
$$\int \frac{dx}{(e^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1})^2 - (e^{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}})^2}.$$

2164.
$$\int \sqrt{\ln^2 x + 1} \, dx.$$

2165.
$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^{-} dx$$
.

2166.
$$\int \int x_{\perp} dx_{\star}$$

2167.
$$\int x_1 x_1 dx$$
.

2168.
$$\int (x+|x|)^x dx$$
.

2169.
$$\int \{|1+x|-|1|-x|\}dx$$
.

2170,
$$\int e^{-|x|} dx$$
.

2171.
$$\int \max_{x} (1/2x^3) dx$$

6. DIVERSOS FIFRCICIOS DE INTLORACION DE FUNCIONE

2172. $\int \varphi(x) dx$, donde $\varphi(x)$ es la distancia del número x al número entero más prôximo.

2173.
$$\int [x] |\sin \pi x| dx$$
 $(x \ge 0)$.

2174.
$$\int f(x) dx$$
, dende $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} & |x| \le 1; \\ 1 - |x| & \text{si} & |x| > 1. \end{cases}$

2175.
$$\int f(x) dx$$
, donde $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} & -\infty < x < 0; \\ x+1, & \text{si} & 0 \le x \le 1; \\ 2x, & \text{si} & 1 < x < +\infty. \end{cases}$

2176. Hallar
$$\int x f''(x) dx$$
.

2177. Hallar
$$\int f'(2x) dx$$
.

2178. Hallar
$$f(x)$$
, si $f'(x^3) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

2179. Hallar
$$f(x)$$
, si $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$.

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x \le 1; \\ x & \text{para } 1 < x < + \infty \end{cases}$$

y f(0) = 0

2180 1. Sea f(x) una función monótona continua y $f^{-1}(x)$ su función inversa

Demostrar que, si

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

entonces

$$\int f^{-1}(x) dx := x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Examinar los ejemplos: a) $f(x) = x^n (n > 0)$; b) $f(x) = e^x$; c) $f(x) = \arcsin x$; d) $f(x) = Ar(\ln x)$.

§ 1. La integral definida como el límite de una suma

1.º Integral definida en sentido de Riemann. Si una función f(x) està definida en $[a \ b]$ y $a \ x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n \ b$, entonces, se flama integral de la función f(x) en el segmento [a, b] al número

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_{1}| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i}) \Delta x_{0}$$
 (1)

donde $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{\#_1}$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Para la existencia del límite (1) es necesario y suficiente que la suma integral inferior

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \Delta x_i$$

y la suma integral superior

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \Delta x_{i}$$

donde

$$m_i = \inf_{x_1 \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x) \text{ y } M_l = \sup_{x_1 \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x).$$

tengan un limite común cuando máx $|\Delta x_i| \rightarrow 0$.

Las funciones f(x), para las que existe el limite del segundo miembro de la igualdad (1), se llaman (propiamente) integrables en el intervalo correspondiente. En particular, a) una función continua, b) una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad, c) una función monótona acotada, son integrables en cualquier segmento finito. Si la función f(x) no está acotada en el segmento [a, b], entonces no es propiamente integrable en [a, b].

2.º Condición de integrabilidad La condición necesana y suficiente de integrabilidad de la función f(x) en un segmento dado [a, b] es el cumplimiento de la igualdad

$$\lim_{\max 1, \alpha x_1 \setminus 1} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

donde ω_i es la oscilación de la función f(x) en el segmento $[x_i, x_{i+1}]$.

Problemas:

2181. Hallar la suma integral S, para la función

$$f(x) = 1 + x$$

en el segmento [- 1, 4], dividiendo éste en n partes iguales y tomando los valores del argumento ξ_i (i = 0, 1, ..., n - 1) en los puntos medios de estas partes.

2182. Para las funciones dadas f(x), ballar las sumas integrales inferior S_n y superior $\overline{S_n}$ en los segmentos respectivos, dividiendo éstos en n partes iguales, si

a)
$$f(x) = x^3$$
 [-2 \le x \le 3]

b)
$$f(x) = \sqrt{x} \quad [0 \le x \le 1]$$

b)
$$f(x) = \sqrt{x}$$
 [0 < x < 1];
c) $f(x) = 2^x$ 0 < x < 10]

2183. Hallar la suma integral inferior para la función $f(x) = x^4$ en el segmento [1, 2], dividiendo este segmento en n partes, cuyas lontitudes formen una progresión geométrica. ¿A qué es igual el límite de esta suma cuando $n \longrightarrow \infty^{\circ}$

2184. Partiendo de la definición de integral, hallar

$$\int_{0}^{T} (v_{0} + gt) dt,$$

donde vo y g son constantes

Calcular las integrales definidas, considerándolas como límites de las sumas integrales correspondientes y efectuando adecuadamente la partición del intervalo de integración

2185.
$$\int_{0}^{1} x^{2} dx$$
, 2187. $\int_{0}^{2} \sin x dx$
2186. $\int_{0}^{1} a^{x} dx$ $(a > 0)$, 2188. $\int_{0}^{1} \cos t dt$, 2189. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{2}}$ $(0 < a < b)$

Indicación, Hacer $\xi_i = V \overline{x_i x_{i+1}}$ (i = 0, 1, ..., n).

2190.
$$\int_{0}^{1} x^{m} dx \ (0 < a < b; \ m \neq -1)$$

Indicación. Tomar los puntos de partición de tal modo que sus abscisas v, formen una progresión geométrica.

2191.
$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x} (0 < a < b).$$

$$\int_{0}^{\pi} \ln \left(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^{t}\right) dx$$

para; a) $|\alpha| < 1$; b) $|\alpha| > 1$.

Indicación, Servirse de la descomposición del polinomio \alpha^{2n} - 1 en factores cuadráticos.

2193. Sean f(x) y $\varphi(x)$ functiones continuas en [a, b]. Demostrar gac

$$\lim_{\max_{i} \ge x_{i,j} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i}) \varphi(\theta_{i}) \Delta x_{i} = \int_{a}^{b} f(x) \varphi(x) dx,$$

donde $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $x_i \le \theta_i \le x_{i+1}$, $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(x_n = a, x_n = b)$.

2193.1. Sea f (x) acotada y monótona en [0, 1]. Demostrar que

$$\int_{a}^{b} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193 2. Sea f (x) una función acotada y convexa por arriba (véase 1312) en el segmento [a, b].

Demostrar que

$$(b-a)^{\frac{7}{2}(a)+\frac{7}{2}(b)} \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2193.3. Sea $f(x) \in C^{(0)}[1, +\infty)$ y $f(x) \ge 0$, $f'(x) \ge 0$, $f'(x) \ge 0$,

Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2} f(n) + \int_{1}^{n} f(x) dx + O(1)$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

2193,4. Sea $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$ y

$$\Delta_n = \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}\right).$$

Hallar 1m n A.

2194. Comprobar que la función discontinua

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

es integrable en el segmento [0, 1].

2195. Comprobar que la función de Riemann

$$\varphi(x) = \begin{cases}
0, & \text{si } x \text{ es irracional} \\
\frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n},
\end{cases}$$

donde m y n $(n \ge 1)$ son números enteros, primos entre si, es integrable en cualquier intervalo fin.to.

2196. Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1}{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$$
, si $x \neq 0$

y f(0) = 0, es integrable en el segmento [0, 1].

2197. Demostrar que la función de Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ as irracional;} \\ 1, & \text{si } x \text{ as racional.} \end{cases}$$

es no integrable en cualquier intervalo.

2198. Sea f(x) una función integrable en $\{a, b\}$ y

$$f_{\pi}(x) = \sup f(x) \text{ para } x_i \leqslant x < x_{i+1}$$

donde

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), \quad (i = 0, 1, ..., n, n = 1, 2, ...).$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}f_{n}(x)\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\,dx.$$

2199. Demostrar que, si la función f(x) es integrable en [a,b], entonces existe una succesión de funciones continuas $\varphi_n(x)$ $(n-1,2,\ldots)$ tal que

$$\int_{a}^{c} f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{c} \varphi_{n}(x) dx \text{ para } a \leq c \leq b.$$

2200. Demostrar que, si una función acotada f(x) es integrable en el segmento [a, b], su valor absoluto |f(x)| también es integrable en [a, b], y

$$\left|\int_{a}^{b} f(x) dx\right| \leqslant \int_{a}^{b} |f(x)| dx.$$

2201. Sea f(x) una función absolutamente integrable en el segmento [a, b], o sea, que existe la integral $\int_a^b |f(x)| dx$. ¿Es integrable esta función en [a, b]?

Examinar el ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional;} \\ -1, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

2202. Sea f(x) una función integrable en [a, b] y $A \le f(x) \le B$ para $a \le x \le b$, y sea $\varphi(x)$ una función definida y continua en el segmento [A, B]. Demostrar que la función $\varphi(f(x))$ es integrable en [a, b].

2203. Siendo las funciones f(x) y $\varphi(x)$ integrables. Será necesariamente integrable también la función $f(\varphi(x))$?

Examinar el ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = 0; \\ 1, & \text{si} \quad x \neq 0, \end{cases}$$

 $y \varphi(x)$ es la función de Riemann (véase e. problema 2195).

2204. Sea f(x) una función integrable en el segmento [A, B]. Demostrar que la función f(x) posee la propiedad de continuidad integral, es decu,

$$\lim_{k \to 0} \int_{a}^{b} f(x+k) - f(x) | dx = 0,$$

donde $[a, b] \subset [A, B]$.

2205. Sea f(x) una función integrable en el segmento [a, b]. Demostrar que se venfica la igualdad

$$\int_{a}^{b} f^{a}(x) dx = 0$$

cuando, y sólo cuando, f(x) = 0 en todos los puntos de continuidad de la función f(x), pertenecientes al segmento [a, b].

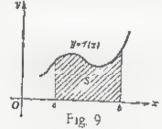
§ 2. Cálculo de integrales definidas mediante integrales indefinidas

1° Fórmula de Newton-Leibniz*) Si la función f(x) está definida y es continua en el segmento [a,b] y F(x) es su primitiva, o sea F'(x) = f(x), entonces

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_{a}^{b}.$$

La integral definida $\int_{0}^{b} f(x) dx$, siendo $f(x) \ge 0$, representa geomé-

the transfer of a figura limit and por la curva y = f(x) e. e.e. O_X y las dos perpendiculares al eje O_X x = a y x = b (fig. 9).



2.° Fórmula de integración por partes. Si f(x), $g(x) \in C^{(1)}$ [a, b], entonces

$$\int_{a}^{b} I(x) g'(x) dx = I(x) g(x) \Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} g(x) I'(x) dx.$$

3. Cambio de variable S.: 1) la función f(x) es continua en el segmento [a,b], 2) la función $\varphi(t)$ es continua junto con su denvada $\varphi(t)$ en el segmento $[\alpha,\beta]$, donde $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. 3) la función compuesta $f(\varphi(t))$ está definida y es continua en $[\alpha,\beta]$, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{a}^{5} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Problemas.

Aplicando la formula de Newton-Leibniz, hallar las siguientes integrales definidas y dibujar las superficies curvilineas correspond entes

2206.
$$\int_{-1}^{3} \sqrt{x} \, dx$$
. 2207. $\int_{-1}^{3} \sin x \, dx$

*1 También sucie llamatse formula de Birrow, (N, del T.).

2208.
$$\int_{1}^{\sqrt{1}} \frac{dx}{1+x^2}$$
2210.
$$\int_{ab}^{ab} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
2211.
$$\int_{b}^{x} 1-x dx$$
2212.
$$\int_{1}^{x} \frac{dx}{x^2-2x\cos a+1} \quad (0 < \alpha < \pi)$$
2213.
$$\int_{0}^{ax} \frac{dx}{1+a\cos x} \quad (0 \le a < 1)$$
2214.
$$\int_{1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a| < 1, |b| < 1, ab > 0)$$
2215.
$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \ne 0)$$

2216. Expucar por qué la aplicación formal de la fórmula de Newton-Leibniz conduce a resultados falsos, si.

$$a = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}; \quad b = \int_{0}^{2\pi} \frac{\sec^2 x \, dx}{2 + ig^2 x}; \quad c = \int_{0}^{1} \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

2217. Hallar
$$\int_{1}^{1} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$$
.

2218. Haliar
$$\int_{0}^{\infty} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$$
.

Sirviéndose de integrales definidas, hallar los límites de las siguientes sumas.

2219.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{2}{n^s} + \dots + \frac{n-1}{n^s} \right).$$

2220.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$
.

2221.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n! + 1^2} + \frac{n}{n! + 2^2} + \dots + \frac{n}{n! + n^2} \right)$$
.

$$\sum_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1) n}{n} \right).$$

CAPITULO 4 INTEGRAL DEFINIDA

2223.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$
 $(p > 0).$

2224.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)$$

Hallar

2225.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n!}$$
. 2226. $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \right]$.

Despreciando infinitésimos de orden superior, hallar los límites de las siguientes sumas

2227.
$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{n}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n} \right) \sin \frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

2228.
$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

2229.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^{k}} \quad (x > 0).$$

2230.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{\frac{1}{n}}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

2231. Hallar

$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{b} \sin x^{a} dx, \quad \frac{d}{da} \int_{a}^{b} \sin x^{a} dx, \quad \frac{d}{db} \int_{a}^{b} \sin x^{a} dx$$

2232. Hallar

a)
$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{x^{2}} \sqrt{1+t^{2}} dt$$
, b) $\frac{d}{dx} \int_{x^{2}}^{x^{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^{2}}}$; c) $\frac{d}{dx} \int_{a/a}^{\cos x} \cos(\pi t^{2}) dt$.

2233. Hallar

a)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{x}^{x} \cos x^{3} dx}{x}$$
; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{x}^{x} (\arcsin x)^{2} dx}{\sqrt[3]{x^{3} + 1}}$; c) $\lim_{x \to +\infty} \int_{x}^{x} e^{3x^{2}} dx$.

2 CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS MEDIANTE INTEGRALES INDEFINIDAS

2233.1. Sea
$$f(x) \in C[0, +\infty]$$
 y $f(x) \longrightarrow A$ cuando $x \longrightarrow +\infty$.

Hallar $\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1} f(nx) dx$.

2234. Demostrar que

$$\int\limits_{0}^{\pi}e^{x^{2}}dx\sim\frac{1}{2x}e^{x^{2}}$$

cuando $x \longrightarrow \infty$.

2235. Hallar

$$\lim_{x \to +0} \int_{\frac{\log x}{4}}^{\sin x} \sqrt{1 \sqrt{\sin x}} \, dx$$

2236. Sea f(x) una función positiva continua. Demostrar que la función

$$\varphi(x) = \frac{\int_{x}^{x} t f(t) dt}{\int_{x}^{x} f(t) dt}$$

es creciente para $x \ge 0$.

2237. Hallar:

a)
$$\int_{a}^{b} f(x) dx$$
, si $f(x) = \begin{cases} x^{1} \text{ para } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x \text{ para } 1 < x \le 2; \end{cases}$

b)
$$\int_{a}^{b} f(x) dx$$
, si $f(x) = \begin{cases} x \text{ para } 0 \le x \le t, \\ t \cdot \frac{1-x}{1-t} \text{ para } t \le x \le 1. \end{cases}$

2238. Calcular y construir las gráficas de las integrales $I = I(\alpha)$, considerándolas como funciones del parámetro α , si

a)
$$I = \int_{0}^{x} x \{x - \alpha \mid dx; b \} I = \int_{0}^{x} \frac{\sin^{3} x}{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^{3}} dx;$$

c) $I = \int_{0}^{x} \frac{\sin x dx}{|y|^{3} + 2\alpha \cos x + \alpha^{3}}.$

Aplicando la fórmula de integración por partes, hal ar las siguientes integrales definidas

2239.
$$\int_{0}^{10^{-2}} xe^{-x} dx$$
. 2242. $\int_{0}^{10^{-2}} |\ln x| dx$. 2243. $\int_{0}^{10^{-2}} |\ln x| dx$. 2244. $\int_{0}^{10^{-2}} x^{2} \cos x dx$. 2244. $\int_{0}^{10^{-2}} x^{2} \cos x dx$.

Aplicando una sustitución adecuada, hallar las siguientes integiales definidas.

2245.
$$\int_{1}^{1} \frac{x \, dx}{\sqrt{5-4x}}$$
2248.
$$\int_{0}^{\pi} \sqrt{e^{x}-1} \, dx$$
2249.
$$\int_{0}^{1} \frac{\sin \cos \pi \sqrt{x}}{1+x} \, dx$$
2247.
$$\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{x+x} \frac{dx}{x+x} \, dx$$

2250. Calcular la integral $\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^2} dx$, haciendo $x-\frac{1}{x}=t$

2251. Explicar, por qué la sustitución formal de x por φ (t) conduct a resultados falsos, si

a)
$$\int_{-1}^{\pi} dx$$
, dende $t = x^{\frac{\pi}{2}}$; b) $\int_{-1}^{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$, dende $x = \frac{1}{t}$;
c) $\int_{-1}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, dende $t \in x - t$.

2252 (Se puede hacer en la integral

x -- s n :?

2, CALCULO DE INTEGRALES DE FANTIAN DE CATALON DE INTEGRALES DE FANTIAN DE CATALON DE INTEGRALES DE FANTIAN DE CATALON DE

2253. ¿Se pueden tomar en la integral $\int \sqrt{1-x^2} dx$ por límites nuevos los números π y $\frac{\pi}{2}$ al hacer la sustitución $x = \sin t$?

2254. Demostrar que, si f (x) es continua en [a, b], entonces

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = (b-a) \int_{a}^{b} f(a+(b-a)x) dx.$$

2255. Demostrar la igualdad

$$\int_{a}^{a} x^{a} f(x^{2}) dx = \frac{1}{2} \int_{a}^{a^{2}} x f(x) dx \qquad (a > 0).$$

2256. Sea f(x) una función continua en el segmento $[A,B]\supset [a,b]$, Hallar

$$\frac{d}{d\hat{x}} \int_{a}^{b} f(x+y) \, dy \text{ para } A-a < x < B-b.$$

2257. Demostrar que, si f(x) es continua en [0, 1], entonces

a)
$$\int_{0}^{\pi} f(\sin x) \, dx = \int_{0}^{\pi} f(\cos x) \, dx;$$
b)
$$\int_{0}^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} f(\sin x) \, dx.$$

2258. Demostrar que, para una función f(x), continua en [-1,1] se tiene

1)
$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = 2 \int_{0}^{1} f(x) dx$$
,

si la función f(x) es par, y

$$2) \int_{-1}^{1} f(x) dx = 0,$$

si la función f(x) es impar. Dar una interpretación geométrica de este resultado.

2259. Demostrar que una de las primitivas de una función par es $u\eta_0$ función impar, y que cualquier primitiva de una función impar es $u\eta_0$ función par.

2260. Calcular la integral

$$\int_{x}^{x} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx_{1}$$

introduciendo la nucva variable

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

2261. Efectuar el cambio de variable sen x = t en la integral

$$\int_{0}^{\pi} f(x) \cos x \, dx$$

2262. Calcular la integral

$$\int_{-1}^{1} \left| \left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right] \right| dx,$$

donde n es un número natural.

2263. Hallar

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^{2} x} dx.$$

2264. Hallar la integral

$$\int_{-1}^{x} \frac{f'(t)}{1-t^{2}-1} dx,$$

51

$$f(x) = \frac{(x+1)^3 (x-1)}{x^3 (x-2)},$$

2265. Demostrar que, si f(x) es una función periódica continua, definida para $\infty < x < +\infty$ y de período T, entonces

$$\int_{a}^{a+T} f(x) dx = \int_{a}^{T} f(x) dx,$$

donde a es cualquier número.

2266. Demostrar que, para n inpar, las funciones

$$F(x) = \int_{0}^{x} \sin^{n} x \, dx \quad y \quad G(x) := \int_{0}^{x} \cos^{n} x \, dx$$

son penódicas, de período 2π , y, para n par, cada una de estas funciones es la suma de una función lineal y una función penódica.

2267. Demostrar que la función

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) \, dx,$$

donde f(z) es una función periódica continua de periodo T, en el caso general, es una suma de una función lineal y una función periódica de periodo T

Calcular las integrales

2268.
$$\int_{0}^{1} x (2 - x^{2})^{12} dx.$$
2276.
$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}.$$
2269.
$$\int_{0}^{1} \frac{x dx}{x^{2} + x + 1}.$$
2276.
$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sin^{3} x - \cos^{3} x}.$$
2277.
$$\int_{0}^{1} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$
2271.
$$\int_{0}^{1} x \sqrt{1 - x} dx.$$
2278.
$$\int_{0}^{1} (x \sin x)^{2} dx.$$
2279.
$$\int_{0}^{1} x \cos x dx.$$
2279.
$$\int_{0}^{1} e^{x} \cos^{3} x dx.$$

Aplicando las fórmulas de reducción, calcular las integrales, las cuales dependen de un parâmetro a que toma valores enteros positivos

2281.
$$I_{n} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x \, dx$$
.

2284. $I_{n} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^{2})^{n} \, dx$.

2285. $I_{n} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^{2})^{n} \, dx$.

2286. $I_{n} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^{n} \, dx$.

2287. $I_{n} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x})^{2n+1} \, dx$.

Si $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ es una func on compleja de la variable real x, donde $f_1(x) = \text{Re } f(x)$, $f_2(x) = \text{Im } f(x)$ e $i = \sqrt{-1}$, entonces, por definición:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

Es obvio que

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx$$

y

$$\lim \int f(x) \, dx = \int \lim f(x) \, dx.$$

2288. Aplicando la fórmula de Fujer

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

comprobar que

$$\int_{0}^{\infty} e^{inx}e^{-imx}dx = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \neq n, \\ 2\pi, & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

(n v m son enteros).

2289. Comprobat que

$$\int_{0}^{\pi} e^{(x+iy) \cdot x} \, dx = \frac{e^{x \cdot (x+iy)} - e^{x \cdot (x+iy)}}{(x \cdot \frac{1}{x} \cdot iy)}$$

(α y β son constantes).

Aplicando las fórmulas de Euler

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}),$$

calcular las integrales (m y n son números enteros posit.vos)

2290.
$$\int_{0}^{\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx$$
. 2293. $\int_{0}^{\pi} \cos^{n} x \cos nx \, dx$. 2291. $\int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx$. 2294. $\int_{0}^{\pi} \sin^{n} x \sin nx \, dx$.

2292.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos{(2n+1)x}}{\cos{x}} dx.$$

Hallar las integrales (n es un número natural).

2295.
$$\int_{0}^{\pi} \sin^{n-1}x \cos(n+1)x dx. \quad 2297. \int_{0}^{\pi} e^{-xx} \cos^{4x}x dx.$$
2296.
$$\int_{0}^{\pi} \cos^{n-1}x \sin(n+1)x dx. \quad 2298. \int_{0}^{\pi} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx.$$

2299. Aplicando varias veces la integración por partes, calcular la integral de Euler: B $(m, n) = \int_{0}^{1} x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx$ donde m y n son números enteros positivos.

2300. Los polinomos de Legendre P_n (x) se determinan por la siguiente fórmula.

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^n - 1)^n]$$
 $(n = 0, 1, 2, ...).$

Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} P_{m}(x) P_{n}(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si} & m \neq n_{1} \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{si} & m = n. \end{cases}$$

2301 Sea f(x) una función propiamente integrable en [a,b] y $F(t_1)$ una función tal que F'(x) if f(x) en todo [a,b], a excepción, posible mente, de un número finito de puntos interiores c_i $(i=1,\ldots,p)$ y de c_i puntos a y b, en los cuales la función F(x), tiene discontinuidades c_i l. especie ("primitiva generalizada"). Demostrar que

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} [F(c_{i}+0) - F(c_{i}-0)].$$

2302. Sea f(x) una función propiamente integrable en el segmente [a, b] y

$$F(x) = C + \int_{0}^{x} f(\xi) d\xi$$

su integral indefinida,

Demostrar que la función F(x) es continua y que en todos les puntes de continuidad de la función f(x) se verifica la igualdad

$$F'(x) \Longrightarrow f(x)$$

Qué se puede afirmar respecto de la derivada de la función F(x) en is puntos de discontinuidad de la función f(x)?

Examinar los ejemplos:

a)
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$
 $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$ $y f(x) = 0$ para $x \neq \frac{1}{n}$;
b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Hallar las integrables indefinidas de las funciones acotadas discontinuas

2303.
$$\int \operatorname{sgn} x \, dx$$
. 2308. $\int x |x| \, dx \quad (x \ge 0)$. 2304. $\int \operatorname{sgn} (\sin x) \, dx$. 2307. $\int (-1)^{(x)} \, dx$.

2305.
$$\int |x|^2 dx \quad (x \ge 0).$$

2308.
$$\int_{x}^{x} f(x) dx$$
, donde $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < l, \\ 0, & \text{si } |x| > l. \end{cases}$

Calcular las integrales definidas de las funciones acotadas discontinuas.

2309.
$$\int_{0}^{x} \operatorname{sgn}(x - x^{2}) dx$$
. 2310. $\int_{0}^{x} \left[e^{x} \right] dx$. 2311. $\int_{0}^{x} \left[x \right] \sin \frac{\pi x}{6} dx$. 2312. $\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$.

2313. $\int_{1}^{n+1} \ln (x) dx$, donde n es un número natural

2314.
$$\int_{0}^{x} sgn [sin (ln x)] dx$$
.

2315. Hallar $\int |\cos x| \sqrt{\sin x} \ dx$, donde E es el conjunto de valores del segmento $[0, 4\pi]$ para los cuales tiene sentido la expresión subintegral.

§ 3. Teoremas de la media

1.º Valor medio de la función. El número

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) dx$$

se llama valor medio de la función f(x) en el segmento [a, b]Si la función f(x) es continua en [a, b], existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$M\left[f\right] =f\left(e\right) .$$

2.° Primer teorema de la media. Si: 1) las funciones f(x) y $\varphi(x)$ están acotadas y son propiamente integrables en el segmento [a, b]. 2) la función $\varphi(x)$ no cambia de signo para a < x < b, entonces

$$\int_{a}^{b}/(x) \varphi(x) dx = \mu \int_{a}^{b} \varphi(x) dx,$$

donde $m \le \mu \le M$ y $m = \inf_{\substack{a < x < b \ d \text{onde } a \le c \le b.}} f(x), M = \sup_{\substack{a < x < b \ d \text{onde } a \le c \le b.}} f(x)$, 3) si, además, la

CAPITULO 4 INTEGRAL DEFINIDA

3° Segundo teorema de la media. Si 1) las fúnciones f(x) y $\varphi(x)$ estan acotadas y son propiamente miegrabies en el segmento [a, b], 2 la función $\varphi(x)$ es monótona para a < x < b, entonces

$$\int_{a}^{b} \int \langle x \rangle \varphi(x) dx = \varphi(n+0) \int_{a}^{b} \int \langle x \rangle dx + \varphi(b-0) \int_{b}^{b} \int \langle x \rangle dx,$$

donde $a \leqslant \xi \leqslant b$, 3) si, además, la función $\varphi(x)$ es monótona decreciente (en sentido ampho!) y no es negativa, entonces

$$\int\limits_{a}^{b}I\left(x\right)\phi\left(x\right)\,dx=\phi\left(a+0\right)\int\limits_{a}^{b}I\left(x\right)\,dx\,\left(a<\xi<0\right);$$

3') si la función $\varphi(x)$ es monótona creciente f_i en sentido amplie i) y no es negativa, entonces

$$\int_{a}^{b} f(x) \, q(x) \, dx = q(b-1) \int_{1}^{b} f(x) \, dx \quad (a < \xi \le b).$$

Problemas

2316. Determinar los signos de las siguientes integrales definidas

a)
$$\int_{0}^{2\pi} x \sin x \, dx;$$
 c)
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{3} 2^{x} \, dx;$$

e)
$$\int_{-\infty}^{x} x^3 2^x dx;$$

b)
$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx;$$
 d)
$$\int_0^{\pi} x^n \ln x dx.$$

2317. "Qué integral es mayor:

3)
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} s \cdot n^{10} x \, dx$$
 0 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} s \, n^{2} x \, dx$?

b)
$$\int_{0}^{1} e^{-x} dx$$
 o $\int_{0}^{1} e^{-x^{2}} dx$?

c)
$$\int_{a}^{a} e^{-x^{2}} \cos^{3} x \, dx$$
 o $\int_{a}^{2\pi} e^{-x^{2}} \cos^{3} x \, dx$?

2318. Calcular los valores medios de las funciones dadas en los intervalos indicados:

a)
$$f(x) = x^2$$
 en [0, 1]; en [0, 100];

b)
$$f(x) = \sqrt{x}$$
 en $[0, 100]$
c) $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ en $[0, 2\pi]$; en $[0, 2\pi]$.

c)
$$f(x) = 10 + 2 \sin x$$
 en $[0, 2\pi]$.
d) $f(x) = \sin x \sin(x + \phi)$ en $[0, 2\pi]$.

2319. Hallar el valor medio del radio vector focal de la elipse

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \Phi} \quad (0 < \epsilon < 1)$$

2320. Hallar el valor medio de la velocidad de la caída libre de un cuerpo cuya velocidad inicial es igual a ν_0 .

2321. La intensidad de la corriente alterna varia segun la fey

$$t = t_0 \sin\left(\frac{T}{2\pi t} - \frac{1}{T} \cdot \Phi\right),$$

donde t_0 es la amplitud, t es el tiempo, T es el periodo y ϕ es la fase metal. Hallar el valor medio del cuadrado de la intensidad

2321 1. Sea $f(x) \in C(0, +\infty)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$. Hallar

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(x)\,dx.$$

Examinar el ejemplo f(x) = arctg x.

2322. Sea

$$\int_{a}^{x} f(t) dt == xf(hx).$$

Hallar 🖰 , Si'

a)
$$f(t) = t^n (n > -1);$$

b) $f(t) = \ln t;$ c) $f(t) = e^t.$

 $_{\alpha}$ A qué son ignales $\lim_{x\to +\infty} \theta y \lim_{x\to +\infty} \theta$?

Aplicando el pruner teorema de la media, acotar las integrales

2828.
$$\int_{1}^{x} \frac{dx}{1+0.5\cos x}.$$
 2324.
$$\int_{1}^{x^{2}} \sqrt{1+x} dx.$$

2325.
$$\int_{0}^{190} \frac{e^{-x}}{x + 100} dx.$$

2326. Demostrar las igualdades:

a)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{x^{n}}{1+x} dx = 0$$
; b) $\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{n}} \sin^{n} x dx = 0$.

2326.1. Hallar.

a)
$$\lim_{x \to a} \int_{b}^{1} ex^{t} \frac{dx}{t+1}$$
; b) $\lim_{x \to +a} \int_{aa}^{ba} f(x) \frac{dx}{x}$.

donde a > 0, b > 0 y $f(x) \in C[0, 1]$.

2327. Sea f(x) continua en [a, b] y sea $\varphi(x)$ continua en [a, b] y derivable en (a, b), siendo

$$\varphi'(x) \ge 0$$
 para $a < x < b$.

Demostrar el segundo teorema de la media, aplicando la integración por partes y sirviéndose del primer teorema de la media.

Sirviéndose del segundo teorema de la media, acotar las integrales.

2328.
$$\int_{100x}^{200x} \frac{\sin x}{x} dx,$$
2329.
$$\int_{a}^{5} e^{-ax} \sin x dx \quad (a \ge 0, \ 0 < a < b),$$
2330.
$$\int_{a}^{5} \sin x^{2} dx \quad (0 < q < b).$$

2331. Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ funciones integrables en el segmento [a, b] junto con sus cuadrados. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Buña-

$$\left\{\int\limits_{a}^{b}\phi\left(x\right)\psi\left(x\right)dx\right\}^{a}\leqslant\int\limits_{a}^{b}\phi^{a}\left(x\right)dx\int\limits_{a}^{a}\psi^{a}\left(x\right)dx$$

2332. Sea f(x) una función continuamente derivable en el segmento [a,b] y f(a) = 0. Demostrar la desigualdad

$$M^{2} \leqslant (b-a) \int_{a}^{b} f^{-1}(x) dx,$$

donde

$$M \Longrightarrow \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

2333. Demostrar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n}^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,dx=0\qquad (p>0).$$

§ 4. Integrales impropias

1.º Integración impropia de las funciones. Si la función f(x) es propiamente integrable en cada segmento finito [a, b], entonces, por definición:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x) dx. \tag{1}$$

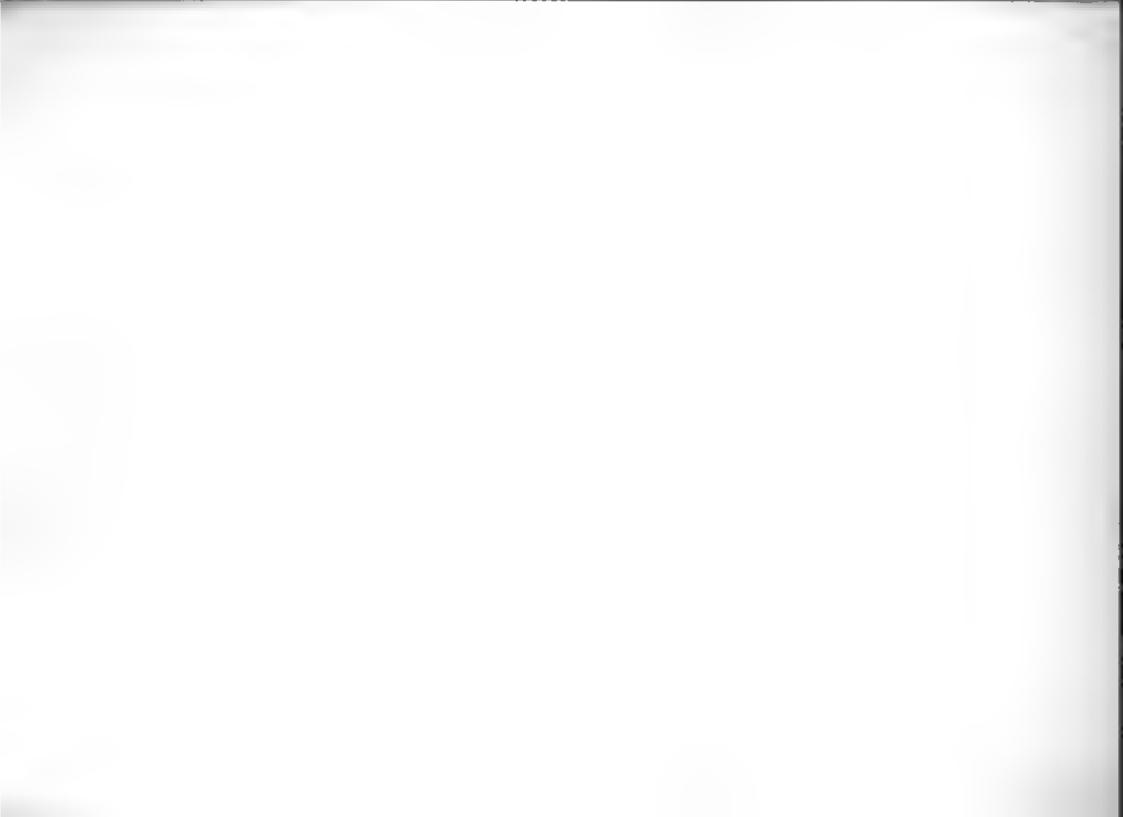
Si la función f(x) no está acotada en un entorno del punto b y es propiamente integrable en cada segmento $[a, b-\epsilon]$ ($\epsilon > 0$), entonces se hace:

$$\cdot \int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{a \to 0} \int_{a}^{b-a} f(x) dx. \tag{2}$$

Si los límites (1) o (2) existen, entonces la integral correspondiente se llama convergente, en caso contrario, se llama divergente.

2.º Chiterio de Cauchy. Para la convergencia de la integral (1) es necesario y sufficiente que, para cualquier $\epsilon > 0$, exista un número b = b (ϵ) tal que, para cualesquiera b' > b y b'' > b se verifique la designaldad

$$\left| \int_{a}^{b\pi} f(x) \ dx' \right| < b.$$



El enunciado del criterio de Cauchy para la integral del tipo (2) análogo.

3° Criterio de convergencia absoluta Si |f(x)| es impropiamente il tegrable, entonces la integral correspondiente (1) o (2) de la función f(x) se llama absolutamente convergente y es una integral convergente Criterio de comparación I. Sea $|f(x)| \le F(x)$ para $x \ge a$.

Si $\int_{a}^{+\infty} F(x) dx$ es convergente, entonces la integral $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ es absolutamente convergente.

Criterio de comparación II. Si $\psi(x) > 0$ y $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ cuando $x \to +\infty$, entonces las integrales $\int_a^+ \varphi(x) dx$ y $\int_a^+ \psi(x) dx$ son simultáneamente convergentes o divergentes. En particular, esto se venítica si $\varphi(x) \sim \psi(x)$ cuando $x \to +\infty$.

Criterio de comparación III. a) Sea

$$f(x) = 0^* \left(\frac{1}{x^p}\right)$$
 cuando $x \longrightarrow +\infty$.

En este caso la integral (1) es convergente si p > 1, y es divergente si $p \le 1$.

b) Sea

$$f(x) := 0^{\circ} \left(\frac{1}{(b-x)^{\rho}} \right)$$
 cuando $x \longrightarrow b = 0$.

En este caso la integral (2) es convergente si p < 1, y es divergente si $p \ge 1$.

4.º Cnteno especial de convergencia Si 1) la función $\varphi(x)$ es monótona y tiende a cero cuando $x \to +\infty$ y 2) la función f(x) tiene primitiva acotada

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(\xi) d\xi$$

entonces la integral

224

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

es convergente, pero, generalmente, no es absolutamente convergente

En particular, las integrales

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p}} dx \quad y \quad \int_{a}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{p}} dx \quad (a > 0)$$

son convergentes si p > 0.

5.º Valor principal en sentido de Cauchy. Si la función f(x) es tal que, para cualquier $\epsilon > 0$ existen las integrales propias

$$\int_{a}^{c-b} f(x) dx \quad y \quad \int_{c+a}^{b} f(x) dx \quad (a < c < b),$$

entonces, por valor principal en sentido de Cauchy (v. p.) se entiende el número

v. p.
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \to +0} \left[\int_a^{\epsilon \to \epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon \to \epsilon}^b f(x) dx \right].$$

De un modo sim.lar,

v. p.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x) dx,$$

Problemas:

Calcular las integrales.

2334.
$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}} \qquad (a > 0).$$
2340.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{\frac{1}{4}}}.$$
2341.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2} + 1}{x^{\frac{1}{4}} + 1} dx,$$
2342.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(2 - x) \sqrt{1 - x}}.$$
2343.
$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\frac{1}{4}}}}.$$
2344.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}} dx.$$
2359.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^{\frac{1}{4}} + x + 1)^{\frac{1}{4}}}.$$
2346.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{arctg x}{(t - x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}} dx.$$

2346.
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \qquad (a > 0).$$

2347.
$$\int_{0}^{+\infty} s^{-ax} \sin bx \, dx$$
 (a > 0).

Sirviéndose de la sformulas de reducción, calcular las siguientes integrales impropias (n es un número naturai).

2348.
$$I_n = \int_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$$
,
2349. $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^3 + 2bx + c)^n} (ac - b^3 > 0)$.

2350.
$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)...(x+n)}$$
.

2351.
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$$
. 2352. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^{n+1}x}$.

2353. a)
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$
; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$.

2354. Hallar

$$\int_{R} e^{-\frac{x}{3}} \frac{\sin x - \cos x}{V \sin x} dx_{1}$$

donde E es el conjunto de aquellos valores de x del intervalo $(0, +\infty)$ para los cuales tiene sentido la expresión subintegral

2355. Demostrar la igualdad

$$\int_{u}^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_{0}^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2 + 4ab}\right) dx,$$

donde a>0 y b>0, suponiendo que la integral del primer miembro de la igualdad tiene sentido.

2356. Se llama valor medio de la función f(x) en el intervalo 0. +∞) al número

$$M_1f = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}}^{k} f(\xi) d\xi.$$

Hallar los valores medios de las signientes funciones:

- a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 (x \sqrt{2})$:
- b) $f(x) = \operatorname{arctg} x_i$ c) $f(x) = \sqrt{x} \sin x_i$

2357. Hallar:

a)
$$\lim_{t\to 0} x \int_{t^2}^{1} \frac{\cos t}{t^2} dt$$
; b) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[6]{t^2+t^2}}{t^3}$;

c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-\gamma}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$$
; d) $\lim_{n\to\infty} x^n \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt$,

donde $\alpha > 0$ y f(t) es una función continua en el segmento [0, 1]. Averguar si son convergentes las integrales

2358.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2} dx}{x^{4} - x^{2} + 1}.$$
 2366.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{m} \arctan x}{2 + x^{n}} dx \quad (n \ge 0).$$

2366.
$$\int_{a}^{+\infty} \frac{x^{m} \arctan x}{2+x^{n}} dx \quad (n \ge 0).$$

2359.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[5]{x^{2}+1}}.$$

2359.
$$\int_{-x}^{+\infty} \frac{dx}{x^{5}/x^{3}+1}.$$
 2367.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^{2}} dx \quad (n \ge 0).$$

$$2360. \int_{10^{-}x}^{x} \frac{dx}{\ln x}.$$

2368.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx$$

2361.
$$\int_{a}^{+\infty} x^{p+\gamma} e^{-x} dx.$$
 2369.
$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{\sin^{p} x \cos^{q} x}.$$

$$2369. \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^{p} x \cos^{q} x}$$

2362.
$$\int_{a}^{1} x^{p} \ln^{p} \frac{1}{x} dx.$$
 2370.
$$\int_{a}^{1} \frac{x^{n} dx}{\sqrt{1-x^{2}}}.$$

2370,
$$\int_{1}^{1} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

2363.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{n}}{1+x^{n}} dx \quad (n \ge 0). \qquad 2870.1. \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^{3}+x}}.$$

2370.1.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^{3}+x}}.$$

2364.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{arc \cdot g}{x^{n}} \frac{ax}{dx} dx \quad (a \neq 0), \quad 2371. \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{n} + x^{n}}.$$

2365.
$$\int_{a}^{+\infty} \frac{\ln{(1+x)}}{x^n} dx.$$
 2372.
$$\int_{a}^{2} \frac{\ln{x}}{1-x^2} dx.$$

$$2372.\int \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

2373.
$$\int_{0}^{x} \frac{\ln (\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$
 2374.
$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{p} \ln^{q} x}.$$

2375.
$$\int_{x^{P}}^{+\infty} \frac{dx}{x^{P} (\ln x)^{q} (\ln \ln x)^{q}}.$$

2376.
$$\int_{\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}, \dots |x-a_n|^{p_n}}. (a_1 < a_2 < \dots < a_n).$$

2376.1.
$$\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} [x - 1]^{3} dx.$$

2377
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{P_{m}(x)}{P_{n}(x)} dx, \quad \text{donde } P_{m}(x) \text{ y } P_{n}(x) \text{ son polinomics primes}$$

entre sí de grados m y n, respectivamente.

Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las siguientes integrales:

$$2378. \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

Indicación | sen $x \mid \ge sen^2 x$.

2379.
$$\int_{a}^{+\infty} \sqrt{x} \cos x \, dx.$$

2380.
$$\int_{0}^{\pi} x^{p} \sin(x^{q}) dx \quad (q \neq 0).$$

2380.1.
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x) dx$$
.

2380.2.
$$\int_{a}^{+\infty} x^{2} \cos(e^{x}) dx.$$

2381.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p} \sin x}{1 + x^{q}} dx \qquad (q \geqslant 0).$$

2382.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{n}} dx.$$

2383.
$$\int_{a}^{+\infty} \frac{P_{m}(x)}{P_{m}(x)} \sin x \, dx,$$

donde $P_m(x)$ y $P_n(x)$ son polynomios enteros y $P_n(x) > 0$, si $x \ge 0$

2384. Si $\int_{a}^{+\infty} f(x) dx$ es convergente, ¿necesariamente será $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$? Examunar los ejemplos:

a)
$$\int_{0}^{+\infty} \sin(x^{4}) dx$$
; b) $\int_{0}^{+\infty} (-1)^{|x^{4}|} dx$.

2384.1. Sea $f(x) \in C^{(1)}(x_0 + \infty)$. f'(x) < C quando $x_0 \le x < +\infty$ y sea convergente $\int_{x_0}^{+\infty} |f(x)| dx$. Demostrar que Indicación, Examinar la integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) f'(x) dx,$$

2385. ¿Se puede considerar la integral impropia convergente

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx$$

de una función no acotada f(x), definida en [a, b] como el límite de la suma integral correspondiente

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \, \Delta x_{ii}$$

donde $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Supongamos que la integral

$$\int_{1}^{+\infty} f(x) dx \tag{1}$$

es convergente y que la función $\varphi(x)$ está acotada.

$$S := -\int\limits_{0}^{T} g\left(t\right) \mathcal{A}'\left(t\right) \, dt := \int\limits_{0}^{T} x\left(t\right) \, g'\left(t\right) \, \, dt \, ,$$

y lambién

$$S \mapsto \frac{1}{2} \int\limits_0^T \left[x_i(t) \ y^{r_i}(t) - x^{r_i}(t) y(t) \right] dt.$$

3.º El área en coordenadas polares. E. área S del sector OAB (fig. 12) limitado por una curva continua $r = r(\varphi)$ y por dos semirrecta

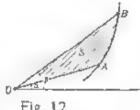


Fig. 12.

Fig. 13

 $\varphi = \alpha \ y \ \varphi : \beta \ (\alpha < \beta)$, es igual a

$$\mathcal{S} := \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\pi} r^{4} \, , \phi) \, d\phi,$$

Problemas:

2396. Demostrar que el área de un segmento parabólico recto es

$$S = \frac{2}{3}bh$$
,

donde b es la base y h es la altura del segmento (fig. 13).

Hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas dadas en coordenadas cartesianas* 1.

2397.
$$ax = y^2$$
, $ay = x^4$.

2398.
$$y = x^1, x + y = 2.$$

2399.
$$y = 2x - x^2$$
, $x + y = 0$.

2400.
$$y = ||gx||, y = 0, x = 0,1, x = 10.$$

2400.1.
$$y = 2^x$$
, $y = 2$, $x = 0$.

2400 2.
$$y=(x+1)^x$$
, $x=\sin \pi y$, $y=0$ $(0 \le y \le 1)$.

2401.
$$y = x$$
; $y = x + \sin^2 x$ $(0 \le x \le \pi)$.

2402.
$$y = \frac{a^2}{a^2 + x^2}$$
, $y = 0$

2403
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
.

$$a_{A}a_{A}$$
, $y^{2} = x^{2}(a^{2} - x^{2})$.

2404.
$$y^{2} = x^{3} (a^{2} - x^{2})$$
.
2404. $y^{2} = x^{3} (a^{2} - x^{2})$.
2405. $y^{2} = 2px$, $27py^{3} = 8(x - p)^{3}$.
2408. $Ax^{3} + 2Bxy + Cy^{2} = 1$ $(A > 0, AC - B^{2} > 0)$.

2407.
$$y^3 = \frac{x^3}{2a - x}$$
 (cisosde), $x = 2a$

2408.
$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, y = 0 \text{ (tractriz)}.$$

2409.
$$y^{n} = \frac{x^{n}}{(1+x^{n+1})^{n}}$$
 $(x>0; n>-2).$

2410.
$$y = e^{-x} |\sin x|$$
, $y = 0 \ (x \ge 0)$

2411. ¿En qué razón divide la parábola $y^2 = 2x$ el área del círculo $r^2 + v^2 = 8?$

2412. Expresar las coordenades del punto M(x, y) de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en función del área del sector hiperbólico S = OM'M, houtado por el arco de niperbola MM y por los dos rayos OM y OM', donde M'(x, -y) es el punto simétrico a M respecto del eje Ox.

Halar las áreas de las figuras amitadas por curvas dadas en forma paramétrica.

2413.
$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi) \quad (\text{cicloide})$$

$$t = 0$$

2414. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$

24.5.
$$x = a(\cos x) + (\sin t - t \cos t)$$
 $(0 \le t \le 2\pi)$ (desarrollo del circulo) $y = a = 0$.

24.6.
$$x = a(2\cos t - \cos 2t)$$
, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

24.6.
$$x = a (2 \cos t - \cos 2t)$$
, $y = a (2 \sin t - \sin 2t)$
24.7. $x = \frac{c^2}{a} \cos^2 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t (c^2 = a^2 - b^2)$ (evoluta de la chose).

2417.1.
$$x = a \cos t$$
, $y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin^2 t}$

Hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas dadas en coordenadas polares.

2418.
$$r^2 = a^2 \cos 2\phi$$
 (lemniscata).

2421.
$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$$
 (parábola), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

2422.
$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}$$
 (0 < ϵ < 1) (elipse).

2422.1.
$$7 = 3 + 2 \cos \varphi$$

2422.2.
$$r = \frac{1}{\pi}$$
, $r = \frac{1}{\sin \pi} \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right)$

^{*)} En éste y en los siguientes parrafos del cap. IV todos los parâmetros se consideran 2 OVIDEOR

2423. $r = a \cos \varphi$, $r = a (\cos \varphi + \sin \varphi) \left(M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S \right)$.

2424. Hallar el área del sector limitado por la curva

$$\phi = r \operatorname{arctg} r$$

y por dos rayos $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

2424.1. Hallar el área de la figura limitada por la curva

$$\Gamma^2+\phi^2=\ .$$

2424.2. Hallar el área de la figura limitada por un pétalo de la curva

$$\varphi = \sin(\pi r)$$
 $(0 \leqslant r \leqslant 1)$.

2424.3. Hallar el área de la figura limitada por las líneas

$$\varphi = 4r - r^3$$
, $\varphi = 0$.

2424.4. Hallar el área de la figura limitada por las líneas

$$\varphi = r + \sin r$$
, $\varphi = \pi$.

2425. Hallar el área de la figura limitada por la curva cerrada

$$r = \frac{2at}{1 + t^2}, \quad \varphi = \frac{\gamma t}{1 + t}.$$

Pasando a coordenadas polares, hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (folium de Descartes).

2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^3)$

2428, $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (lemniscata).

Reduciendo las ecuaciones a la forma paramétrica, hallar las áreas de las figuras himitadas por las curvas.

2429.
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$
 (astroide)
2430. $x^4 + y^4 = ax^2y$.

Indicación. Hacer y = tx.

§ 6. Cálculo de longitudes de arcos

1.º Longitud de un arco en coordenadas cartesianas. La longitud del arco de un segmento de una curva lisa (con denvada continua)

$$y = y(x)$$
 $(a \le x \le b)$

es igual a

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

2.º Longitud del arco de una curva dada en forma paramétrica. Si a curva C viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t), y = y(t) \ (t_0 \leqslant i \leqslant T),$$

donde x(t), $y(t) \in C^{(1)}[t_0, T]$, la longitud del arco de la curva C es gual a

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

3.º Longitud de un arco en coordenadas polares. Si

$$r = r(\phi)$$
 $(\alpha \le \phi \le \beta)$

donde $r'(\phi) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$, la longitud del arco del segmento correspondiente de la curva es igual a

$$\delta = \int_{0}^{\beta} \sqrt{r^{2}(\phi) + r'^{2}(\phi)} d\phi.$$

Las longitudes de los arcos de las curvas alabeadas se verán en el cap. VIII.

Problemas

Hallar las longitudes de los arcos de las siguientes curvas:

2431.
$$y = x^{\frac{3}{2}}$$
 ($0 \le x \le 4$). 2432. $y^4 = 2px$ ($0 \le x \le x_4$).

2433.
$$y=a$$
 ch $\frac{1}{2}$ (desde el punto A (0, a) hasta el punto B (b , h)

2434.
$$y = e^x$$
 () $\leq x \leq x_0$).

2435.
$$x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4} \ln y$$
 $(1 \le y \le c)$.

2436.
$$y = a$$
 in $\frac{1^2}{a^2 - x^2}$ $(0 \le x \le b \le a)$.

2437. $y = n \cos x \ (0 \le x \le a < \frac{n}{2})$.

2438. $x = a \ln^{a} \frac{+ \sqrt{a^{2} - y^{3}}}{y} - \sqrt{a^{2} + y^{2}} \quad (0 < b \le y \le a).$

2439 $y^2 = \frac{x^2}{2a + x}$ $\left(0 \le x \le \frac{5}{3} a\right)$.

2440. $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ (astroide)

2441. $x = \frac{c^2}{h} \cos^2 t$, $y = \frac{c^2}{h} \sin^2 t$, $c^2 = a^2 - b^2$ (evoluta de la elipse).

2442. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

2443. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$

2444. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ (desarrollo de la circunferencia)

2445. $x = a(\sin t - t), y = a(\sin t - 1) \quad 0 \le t \le 7$. 2445.1. $x = \cosh^2 t$, $y = \sinh^2 t$, $0 \le t \le 7$

2446. $r = a\phi$ (espira, de Arquimedes) para $0 \le \phi \le 2\pi$

2447. $r = ae^{mr}$ (m > 0, para 0 < r < a

2448. 7 = a (. 7- cos q)

2449. $r = \frac{\rho}{1 + \cos w} \left(\varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$.

2450. $r = a \sin^3 \frac{\phi}{3}$.

2451. $r = e \operatorname{th} \frac{\Phi}{2} \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$

2452. $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (1 \le r \le 3).$

2452.1. $\varphi = \sqrt{r}$ $(0 \le r \le 5)$.

2452.2. $\varphi = \int \frac{\sinh \varrho}{\varrho} d\varrho \quad (0 \le l \le R).$

2452.3. $r = 1 + \cos t$, $\varphi = t - ig \frac{t}{2}$ $(0 \le t \le T \le \pi)$.

2453. Demostrar que la longitud del arco de la elipse

 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$

es igua, a la longitud de una onda de la sinasoide $y = c \sin \frac{x}{b}$, donde $a^2 - b^2$

2454. La parábola $4ay = x^2$ rueda sobre el eje Ox Demostrar que el foco de la parábola describe una catenaria

2455. Haliar la razón del área de la figura limitada por el lazo de la curva

 $y = \pm \left(\frac{1}{3} - x\right) \sqrt{x}$

el área del circulo, si la longitud de la circunferencia es igual a la longitud del contorno de esta curva.

§ 7. Cálculo de volúmenes

1.º Volumen de un cuerpo cuando se conocen las secciones transversales. Si existe el volumen V de un cuerpo y S = S(x) ($a \le x \le b$) es e area de la sección del cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox en e punto x, entonces

$$V = \int_{a}^{b} S(z) dz$$

2° Volumen de un cuerpo de revolucion. El volumen de in cuerpo formado por la rotación alrededor del eje Ox del trapeció mixtilineo

$$a \le x \le b$$
, $0 \le y \le y(x)$,

donde y (x) es una sunción uniforme y continua, es igual a

$$V_x = \pi \int_a^b y^a(x) \, dx.$$

En el caso más general, el volumen del anillo formado por la rotación alrededor del eje Ox de la figura $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, donde $y_1(x) = y_2(x)$ son funciones no negativas continuas, es igual a

$$V = \pi \int_{a}^{b} [y_{t}^{2}(x) - y_{t}^{3}(x)] dx,$$

Problemas

2456. Haliar el volumen de una buhardilla cuya base es un rectángulo de lados a y b, la ansta superior es igual a c, y la untura es igual a h

2457. Hallar el volumen de un obelisco cuyas bases paralelas son rectángulos con los lados A, B y a, b, y la altura es igual a h.

2458. Hallar e, volumen de un cono troncado cuyas bases son elipses de semiejes A, B y a, b, y la altura es igual a h.

2459. Hallar el volumen de un paraboloide de revolución euva base es S y la altura es igual a H

2460. Supongamos que el área S = S(x) de la sección transversal de un cuerdo, efectuada perpendicularmente al cie Ox, varia según la lev cuadratica.

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad [a \le x \le b],$$

donde A, B v C son constantes.

Demostrar que el volumen de este cuerpo es igual a

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

donde H = b - a (formula de Simpson)

2461. Un cuerpo representa el conjunto de puntos M(x, y, z), donde $0 \le z \le 1$, siendo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ si z es racional, y $1 \le x \le 0, -1 \le y \le 0$ si z es irracional. Demostrar que no existe el volumen de este cuerpo, a pesar de que la integral correspondiente

$$\int_{z}^{z} S(z) dz = 1$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos imitados por las siguientes superfictes

2462.
$$\frac{1^{\frac{1}{2}}}{1^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} \frac{d^2}{b^2} = 1$$
, $z = \frac{c}{a} x$, $z = 0$.

2463,
$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{a^2}{8^2} + \frac{z^2}{6^2} = 1$$
 (elipsoide).

2464.
$$\frac{z^2}{2^3} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{z^2}{c^3} = 1$$
, $z = \pm c$.

2465.
$$x^2 + z^2 = a^2 \quad y^2 + z^2 = a^2$$
.

2465.
$$x^{2} + z^{2} = a^{2}$$
 $y^{2} + z^{2} = a^{2}$.
2466. $x^{2} + y^{2} + z^{2} = a^{3}$, $x^{3} + y^{2} = ax$
2467. $z^{3} = b(a - x)$, $x^{2} + y^{2} = ax$

2467
$$z^3 = b(a - x), x^2 + y^2 = ax$$

2468.
$$\frac{x^2}{z^2} + \frac{u^3}{z^2} = 1$$
 $(0 < x < a)$.

$$2469 + y + z^2 - 1$$
, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2471 Demostrar que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje Oy de la figura

$$a \le x \le b$$
, $0 \le y \le y(x)$.

donde y (x) es una función uniforme y continua, es igual a

$$V_{\nu} = 2\pi \int_{a}^{b} xy(x) dx.$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies objenidas en la rotación de las siguientes líneas.

2472. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(0 \le x \le a)$ 3 en torno del eje Ox (superficie de Neil).

2473. $y = 2x - x^2$, y = 0: a) en tomo del eje Ox, b) en tomo de eie Oy

2474, $y = \sin x$, y = 0 ($0 \le x \le \pi$): (a) en torno del eje Ox; b) en tomo del ese Ov.

2475. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^x$, $y = b\left|\frac{x}{a}\right|$; :a) en tomo del eje Ox b) en tomo del eje Ov

2476. $y = e^{-x}$, y = 0 (0 < x < $+\infty$): a) en tomo del eje Ox, b) en tomo del eie Oi

2477. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ (0 < $a \le b$) en torno del eje 0x

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ en torno del eje Ox.

2479. $y = e^{-x} V \sin x$ $(0 \le x < +\infty)$ en torno del eje 0x

2480. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi), \quad y = 0$ a) en torno del eje Ox, b) en torno del eje Oy, c) en torno de la recta v = 2a

2481. $x = a \sin^4 t$, $y = b \cos^4 t$ (0 $\leq t \leq 2\pi$): a) en torno del eje Ox. b) en torno del eje Ov

2481.1. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la superficie del lazo de la curva

$$x = 2t - t^a$$
, $y = 4t - t^t$

en torno; a) del eje Ox; b) del eje Oy.

2482. Demostrar que el volumen del cuerpo engendrado por la Totación de la figura

(y r son coordenadas polares) alrededor del eje polar, es igual a

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 (\varphi) \sin \varphi \, d\varphi.$$

Hallar los volumenes de los cuerpos engendrados por la rotación de las figuras, dadas en coordenadas polares:

2483. $r = a \ (1 + \cos \varphi) \ (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$; a) en torno del eje polar; b) en torno de la recta $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$.

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$: a) en torno del eje Ox, b) en torno del eje OY; c) en torno de la recta y = x Indicación. Pasar a coordenadas polares.

2484 I. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la figura limitada por una semiespira de la espiral de Arquimedes

$$r = a\varphi$$
 $(a > 0, 0 \le \varphi \le \pi)$

en tomo del eje polar.

2484 2 Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la figura limitada por las líneas

$$\varphi = xr^2$$
, $\varphi = \pi$.

en tomo del eje polar.

2485. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de la superficie

en torno del eje polar.

§ 8. Cálculo de áreas de superficies de revolución

El área de la superficie engendrada al girar una curva lisa AB alrededor del eje Ox, es igual a

$$P := 2\pi \int_{A}^{B} |y| ds_{t}$$

donde ds es la diferencial de arco.

Problemas

Hallar las áreas de las superficies engendradas al girar las siguientes curvas

24S8.
$$y=x\sqrt{\frac{x}{a}}$$
 $(0 \le x \le a)$ en tomo del eje Ox .

2487.
$$y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$$
 (' $x \le b$) en tomo del eje Ox

2488. $y = \lg x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4} \right)$ en tórno del eje ∂x .

2489. $y^2 = 2px(0 \le x \le x_0)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy.

2490. $\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (0 < $b \le a$): a) en torno del eje Ox; b) en torno del eje Oy

2491. $x^2 + (y - b)^2 = a^2 (b \ge a)$ en torno del eje Ox.

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ en tomo del eje Ox.

2493. $y=a \operatorname{ch} \frac{x}{a} (|x| \leqslant b)$: a) en torno del eje Ox; b) en torno del ese Oy

2494. $\pm x = a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \sqrt{a^2 - y^2}$ en tomo del eje Ox

2495. $ax = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$: a) en tomo del eje Ox b) en tomo del eje Oy; c) en tomo de la recta y = 2a 2496. $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$ en tomo de la recta y = x

2497. $r = a(1 + \cos \varphi)$ en torno del eje polar.

2498, $r^2 = a^2 \cos 2\phi$ a) en torno del eje polar; b) en torno del eje $\phi = \frac{\pi}{2}$, c) en torno del eje, $\phi = \frac{\pi}{4}$.

2499. Un cuerpo está engendrado por la rotación arrededor del eje Ox de la figura limitada por la parábola $ay = a^2 - x^2$ y el eje Ox Hal ar la razón del área de la superficie del cuerpo de revolución al área de la superficie de una bola de igual volumen

2500. La figura limitada por la parabola $y^2 = 2px$ y la recta $x = \frac{p}{2}$ gra en torno de la recta y = p. Hallar el volumen y el área de la superficie del cuerpo de revolución.

§ 9. Calculo de momentos. Coordenadas del centro de gravedad

1.º Momentos. Si, en el plano Oxy, una masa M de densidad $\rho = \rho(y)$ ocupa todo un continuo acotado Ω (una línea, una repótipiana) y $\omega = \omega(1)$ es la medida correspondiente (la longitud del arco, el área) de la parte de la región Ω cuyas ordenadas no son supenores a ν , entonces, se llama k-ésimo momento de la masa M respecto del eje Ωx al número

$$M_{k} = \sum_{\max_{1 \le i_{1}} = 0}^{n} \sum_{i_{1} = 1}^{n} \rho(y_{i}) y_{i}^{k} \Delta \omega(y_{i}) = \int_{\Omega} \rho y^{k} d\omega(y) \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

Como casos particulares, obtenemos, para k = 0 la masa M, para k = 1 el momento estático, para k = 2 el momento de inercia.

De un modo similar se definen los momentos de la masa respecto de los planos coordenados.

Si $\rho = 1$, el momento correspondiente se llama geométrico (momento de una línea, de una figura plana, de un cuerpo, etc.).

2° Centro de gravedad Las coordinadas (x_0, y_0) del centro de gravedad de una figura plana homogenea de area S se determinan por las formulas

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

donde $M^{(y)}$, $M^{(x)}$ son los momentos estaticos geométricos de la figura respecto de los ejes Oy y Ox

Problemas:

2501. Hallar el momento estático y el momento de inercia del arco de una semicincunferencia de radio a, respecto del diametro que pasa por los extremos de este arco.

2501.1. Hallar el momento estático del arco de la parábola

$$y^2 = 2 px \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right)$$

respecto de la recta $x = \frac{p}{2}$.

2502. Ha lar el momento estático y el momento de inercia de una paca triangular homogénea de base b y altura h, respecto de la base $(\rho = 1)$

Hallar los momentos de inercia $I_x = M_2^{(x)}$ e $I_y = M_2^{(y)}$ respecto de los ejes Ox y Oy del segmento parabolico, limitado por las curvas

$$ay = 2ax - x^2$$
 $(a > 0)$ e $y = 0$.

 $_{c}A$ qué son iguales los radios de inercia r_{x} y r_{y} , es decir, las magnitudes definidas por las relaciones

$$I_x = Sr_x^2$$
, $I_y = Sr_y^2$,

donde S es el área del segmento?

2503. Hallar los momentos de inercia de una placa eliptica homogénica de semiejes a y b, respecto de sus ejes principales (p = 1).

2504. Hallar el momento estático y el momento de inercia de un cono circular homogéneo de radio de la base r y de la altura h, respecto del plano de la base de este cono ($\rho = 1$).

2504.1. Hallar el momento de inercia de una bola homogênea de radio R y masa M respecto de su diâmetro.

2505. Demostrar el primer teorema de Guldin: el área de la superficie engendrada por la rotación de un arco plano C alrededor de ur eje, que no se corta con la superficie y que está situado en el mismo plano que el arco, es igual a la longitud de este arco, multiplicado por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad del arco C.

2506. Demostrar el segundo teorema de Guldin, el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de una figura plana S alrededor de un eje, que no se corta con la figura y que está situado en el mismo plano que la figura, es igual al producto de área S de dicha figura por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad de la figura.

2507. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del arco circular $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($\varphi_1 \le a \le \pi$).

2508. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región limitada por los paraboloides: $ax = y^2$, $ay = x^2$ (a > 0).

2509. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región $\frac{x^2}{4t^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \ (0 \le x \le a, \ 0 \le y \le b).$

2510. Hallar el centro de gravedad de un hemisfeno homogéneo de radio a.

2511. Determinar las coordenadas del centro de gravedad $C(\varphi_0, r_0)$ de arco OP de la espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$ (m > 0) desde el punto $0 (-\infty, 0)$ hasta el punto $P(\varphi, r)$. Qué curva describe el punto C en el movimiento del punto P^{γ}

2512. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región limitada por la curva r=a $(1+\cos\varphi)$

2513. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de a región limitada por el primer arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)(0 \le t \le 2\pi)$ y el eje Ox

2514. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo engendrado por la rotación de la figura $0 \le x \le a$; $y^2 \le 2px$ alrededor del eje 0x.

2515. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del hemisfeno $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \ge 0$).

§ 10. Problemas de mecánica y física

Formar las sumas integrales correspondientes y una vez hallados sus límites, resolver los siguientes problemas.

2516. Hallar la masa de una varilla de longitud l'= 10 m, si a

densidad lineal de la misma varía según la ley $\delta = 6 + 0.3x \text{ kg/m} \text{ donde}$ x es la distancia desde uno ce los extremos de la varilla.

- 2517. ¿Qué trabajo es necesario realizar para elevar un cuerpo de masa m a la altura h de la superficie de la Tierra, cuyo radio es igual a R? ¿A qué scrá igual este trabajo si el cuerpo se eleva al infinito?
- 2518. ¿Qué trabajo es necesario realizar para a argar 10 cm un resorte elastico, si la fuerza de 1 kg alarga este resorte 1 cmº Indicación Aplicar la ley de Hooke.
- 2519. Un cuindro de 20 cm de diámetro y 80 cm de longitud esta Leno de vapor bajo la presión de 10 kg/cm² ¿Qué trabajo es necesano realizar para disminuir dos veces el volumen dei vapor, suponiendo que la temperatura del mismo permanece cons ante?
- 2520. Determinar la fuerza de la presión del agua sobre una pared vertical que tiene la forma de un semicirculo de radio a, cuyo diametio esia situado en la superficie del agua.
- 2521 Determinar la fuerza de la presión del agua sobre una pared vertical que tiene la forma de un trapecio, cuya base inferior a 10 m la base superior b - 6 m y la altura h = 5 m, si e, nivel de sumersión de

Formando las equaciones diferenciales, resolver los sigu entes proble mas

2522 La velocidad de un punto varía segun la ley

$$v = v_o + at$$
.

"Que trayecto recorrera este punto en el intervalo de tiempo [O T]"

- 2523. Una bola nomogénea de radio R v densidad δ gira alrededor de su diametro con una velocidad angular ω. Determinar la energia
- 2524. Con qué suerza atrae una recta material infinita de densidad Lineal constante μ_0 a un punto material de masa m_i situado a la
- 2525 Determinar la fuerza con que atrae una placa redonda de rad.o a y de densidad superficial constante δ_0 a un punto material P de masa m, situado en la perpendicular al plano de la placa, que pasa por su centro Q a a distancia mínuna PQ, igual a b.
- 2526. Según la ley de Forncelli, la velocidad con que sale un líquido de una vasija es igual a

$$t = c \sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración de la fuerza de gravedad, h es la altura del liquido sobre el orificio y c = 0,6 es el coeficiente experimental.

En cuánto tiempo se vaciará un tonel cuindrico vertical, lleno hasla amba, de diámetro D=1 m y altura H=2 m, s. el orificio redondo en Al fondo tiene un diámetro d = 1 cm?

- 2527. ¿Qué forma tiene que tener una vasija que representa un cuerpo de revolución, para que el descenso del nivel del liquido durante el derramamiento del mismo sea uniforme?
- 2528. La velocidad de desintegración del radio en cada momento es proporcional a su cantidad existente. Hallar la ley de desintegración del radio, si en el momento inicial t=0 hab a Q_0 gramos de radio y durante el tiempo T = 1600 años esta cantidad disminuirá dos veces
- 2529 Para el caso de un proceso de segundo orden, la velocidad de una reacción química que transforma la sustancia 4 en la sustancia B, es proporcional ai producto de las concentraciones de estas sustancias. Que tanto por ciento de la sustancia B habra en una vas ja dentro de t=1 hora, si para t=0 minutos había 20° de la sustancia B y para t = 15 minutos había ya 80 %?
- 2530. Según la ley de Hooke, la d latación relativa a de una barra es proporcional a a intensidad de la fuerza o en la sección transversal correspondiente, o sea,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\mathcal{E}}$$
,

donde E es el módulo de Young.

Determinar la duatación de una barra pesada de forma conica, fijada a la base y con el vertice invertido hacia abajo, si el radio de la base es igual a R, la altura del cono es H y el peso específico es γ

§ 11. Calculo aproximado de integrales definidas

l° Fórmula de los rectángulos. Si la funcion y = y(x) es continua y derivable un número suficiente de veces en un segmento cerrado $[a, b]_f$

$$h = \frac{b-a}{n}, \ x_i = a + ih \ (i = 0, \ 1, \dots, n), \ y_i = y \ (x_i).$$
 se tiene
$$\int\limits_a^b y \ (x) \ dx = h \ (y_b + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$
 donde

$$R_n = \frac{(b - a \, h)}{2} \, y'(\xi) \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

2.º Fórmula de los trapecios. Con las mismas notaciones, se tiene

$$\int_{b}^{a} y(x) dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right) + R_n.$$

donde

$$R_n = -\frac{b-a)h^2}{12} f^*(\xi') \quad (a \leqslant \xi' \leqslant b).$$

3.° Fórmula parabólica (fórmula de Simpson). Haciendo n=2k, se tiene

$$\int_{0}^{h} y(x) dx = \int_{0}^{h} |(y_{k} + y_{kk}) + A(y_{k} + y_{k} + \dots + y_{2k-1}) + + 2(y_{k} + y_{k} + \dots + y_{2k-1}) + R_{12}$$

donde

$$R_n = -\frac{b}{18a}\frac{a}{1}I^{1V}(\xi^n)$$
 $(a \le \xi^n \le b)$.

Problemas

2531. Aplicando la fórmula de los rectángulos (n = 12), calcular aproximadamente

$$\int_{0}^{2\pi}x\sin x\,dx$$

y comparar el resultado con la respuesta exacta.

Sirviéndose de la fórmula de los trapecios, calcular las integrales y acotar los errores, si

2532.
$$\int_{a}^{1} \frac{dx}{1+x}$$
 , $n = 8$).

2533.
$$\int_{1}^{1} \frac{dx}{1+x^{4}}$$
 $\sqrt{n} = 12$).

2534.
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^{2} x} \ dx \qquad (n = 6).$$

Sirviéndose de la fórmula de Simpson, calcular las integrales:

2535.
$$\int_{1}^{x} \sqrt{x} dx \ (n = 4)$$
. 2537. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \ (n = 10)$.

2536.
$$\int_{0}^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} \, dx \ (n = 6). \qquad 2538. \int_{0}^{4} \frac{x \, dx}{\ln(1 + x)} \ (n = 6).$$

2539, Tomando n = 10, calcular la constante de Katalan

$$G \Longrightarrow \int_{0}^{1} \frac{\operatorname{atctg} x}{x} \, dx.$$

2540. Sirviéndose de la fórmula

$$-\frac{\pi}{4} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^{3}},$$

calcular el número π con una exactitud hasta 10-5.

2541. Calcular

$$\int_{0}^{\infty} e^{x^{2}} dx$$

con una exactitud hasta 0,001.

2542. Calcular $\int_{0}^{1} (e^{x} - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ con una exactitud hasta 10^{-4}

2543. Calcular con exactitud hasta 0,001 la integral de probabilidad

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-x^{\lambda}}dx.$$

2544. Haliar aproximadamente la longitud de la elipse cuyos semiejes son a = 10 y b = 6.

2545. Construir por puntos la gráfica de la función

$$y = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \le x \le 2\pi),$$

tomando

$$\Delta x = \frac{\pi}{3}$$
.

§ 1. Series numéricas. Criterios de convergencia de las series de términos de signo constante

1.º Conceptos generales. Una serie numérica

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
 (1)

se llama convergente, si existe

donde $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. En caso contrario, la serie (1) se llama divergente.

divergente.

2.° Criterio de Cauchy. Para la convergencia de la serie (1) es necesamo y suficiente que, para cualquier $\epsilon > 0$ exista un número $N=N(\epsilon)$ tal que para n>N y p>0 se venfique la designaldad

$$|S_{n+p} - S_n| = |\sum_{i=n+1}^{n+p} a_{ij} < \epsilon,$$

En particular, si la serie es convergente, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3.º Criterio de comparación I. Supongamos que, además de la serie (1), se tiene la sene

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \tag{2}$$

Si, para $n \ge n_0$, se venfica la desigualdad

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n,$$

entonces, 1) de la convergencia de la serie (2) se deduce la convergencia

La particular si $d_n \sim b_n$ para $n \to \infty$, as series de terminos positivos ell, y (2) son convergentes o divergentes simultáneamente

4.º Cnteno de comparación II. Si

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right) \cdot_{\mathcal{I}}$$

entonces, a) si p > 1 la serie (1) es convergente y b) si $p \le 1$, es

5.° Criterio de D'Alembert. Si $a_n > 0$ (n = 1, 2, ...) y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q_n$$

en.onces, a) si q < 1 la serie (1) es convergente y b) si q > 1, es

6.° Criterio de Cauchy. Si $a_n \ge 0 \ (n = 1, 2, ...)$ y

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q_n$$

entonces, a) si q < 1 la serie (1) es convergente y b) si q > 1, \Leftrightarrow

7.° Chiteno de Raabe, Si $a_n > 0$ (n = 1, 2, ...) y

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p.$$

entonces, a) si p > 1 la serie (1) es convergente y b) si p < 1, es

8.° Criterio de Gauss, Si $a_n > 0$ (n = 1, 2, ...) y

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{a^{n+1}}$$

donde $\theta_n \mid < C$ y $\epsilon > 0$, entonces, a) si $\lambda > 1$ la sene (1) es convergente y b) $\lambda < 1$, es divergente, c) si $\lambda = 1$ la sene (1) es convergente para $\mu > 1$ y es divergente para $\mu \le 1$.

9° Cnteno integral de Cauchy Si f(x) (x > 0) es una función no negativa y no creciente, la sene

$$\sum_{n=1}^{\infty} I(n)$$

SERIES NUMERICAS OR DE CONV. DE LAS SERIES DE TER DE SIGNO CONSTA

es convergente o divergente simultáneamente con la integral

$$\int_{1}^{+\infty} \int (x) dx.$$

Problemas:

Demostrar directamente la convergencia de las siguientes series y hallar sus sumas.

2546.
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

2547.
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

2648.
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2^n-1}{2^n} + \dots$$

2549.
$$\frac{1}{12} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

2550.
$$\frac{1}{14} + \frac{1}{4\cdot7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)\cdot (3n+1)} + \dots$$

2551. B)
$$q \sin \alpha + q^{\alpha} \sin 2\alpha + \dots + q^{\alpha} \sin n\alpha + \dots$$

b) $q \cos \alpha + q^{\alpha} \cos 2\alpha + \dots + q^{\alpha} \cos n\alpha + \dots + q^{\alpha} \cos n\alpha + \dots$

2552.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

2553. Avenguar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ sen nx,

Indicación. Comprobar que para $x \neq k\pi$ (k es un entero) es imposible que sea $\sin nx \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2554. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la sene

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ donde } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \qquad (p_i = 1, p_1 < p_2 < \dots),$$

obtenida como resultado de la agrupación de los términos de la sene dada sin infinigir el orden que siguen, también es convergente y tiene la misma suma. Lo recíproco no es justo; exponer un ejemplo.

2555. Demostrar que, si los términos de la sene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ son positivos y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, obtenida por agrupación de los términos de esta sene, es convergente, entonces la sene dada también es convergente

^{•)} El significado del símbolo Q[®] véase en el cap. 1, § 6, 1,º

Estudiar ja convergencia de las siguientes series

2557.
$$0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+...$$

2558.
$$\frac{1}{11} + \frac{1}{2l} + \frac{1}{3l} + \dots + \frac{1}{nl} + \dots$$

2559.
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

2560.
$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \dots + \frac{1}{1000n+1} + \dots$$

2561.
$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

2562.
$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots$$

2563.
$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots$$

2564,
$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots$$

2565. Demostrar que una sene de números, que son reciprocos a los términos de una progresión aritmética, es divergente

2566. Demostrar que, si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) son convergentes y $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ (n=1, 2, ...), entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

(C) también es convergente ¿Quê se puede afirmar respecto de la convergencia de la serie (C) si las series (A) y (B) son divergentes?

2567. Sean dadas dos series divergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

de términos no negativos.

¿Qué se puede afirmar respecto de la convergencia de las series:

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \min (a_n, b_n)$$
 y b) $\sum_{n=1}^{\infty} \max (a_n, b_n)$?

2568. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$ es convergenté, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también Jo es. Lo recíproco, no es justo; poner ejemplos.

2569. Demostrar que, si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^4$ son convergentes, entonces también lo son las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n},$$

2570. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty}na_n=a\neq 0,$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

2571. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos decrecientes, es convergente, entonces

2572. Será convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

para p = 1, 2, 3, ...?

Aplicando el criterio de Cauchy, demostrar la convergencia de las siguientes series.

2578.
$$a_n + \frac{a_1}{1.1} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots , a_n < 10$$
.

2574.
$$\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^n} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

2575.
$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots$$

$$\dots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \dots$$

Indicación. Aplicar la desigualdad

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
 $(n=2, 3, ...).$

Aplicando los criterios de comparación de, D'Alembert o Cauchy, estudiar la convergencia de las series:

2576.
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

2577.
$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

2577.1.
$$\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{23}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n_{\sqrt{n+1}}}} + \dots$$

Aplicando los criterios de comparación de D'Alembert o Cauchy, estudiar la convergencia de las series:

2578.
$$\frac{1000}{1} + \frac{1000^3}{2!} + \frac{1000^3}{1} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$$

2579.
$$(\frac{11^{n}}{2!} + \frac{(2)^{3}}{1} + \dots + \frac{(n)^{3}}{(2n)!} + \dots$$

2580.
$$\frac{11}{1} + \frac{2!}{2^{\frac{n}{2}}} + \frac{3!}{3^{\frac{n}{2}}} + \dots + \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}} + \dots$$

2581. a)
$$\frac{2}{1} + \frac{2^{3} \cdot 2!}{2^{2}} + \frac{2^{3} \cdot 3!}{3^{2}} + \dots + \frac{2^{n} n!}{n^{n}} + \dots$$

b)
$$\frac{3}{1} + \frac{3^{n}}{2^{n}} + \frac{3^{n}}{3^{n}} + \cdots + \frac{3^{n}}{n^{n}} + \cdots$$

2582.
$$\frac{(1)^{2}}{2} + \frac{(2)^{3}}{2^{4}} + \frac{(3!)^{3}}{2^{9}} + \dots + \frac{n^{3}}{2^{n^{2}}} + \dots$$

2583.
$$\frac{.000}{1} + \frac{1000 \cdot .00}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

2584.
$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots$$

2586.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}) \dots (\sqrt{2} - \sqrt[4n]{2})$$

2585.1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

donde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si} \quad n - m^2 \\ \frac{1}{n^2}, & \text{si} \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

(m es un número natura).

2585.2.
$$\sum_{n=1}^{\omega_1} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^k k\alpha}{1 + x^k + \cos^k k\alpha}$$

2586.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

2589.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^{2}+s+1)^{-2}}.$$

2587.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

2589 1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n + 3^n}.$$

2588.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{nn}}$$
.

2589.2.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n-1} \right)^{n(n-1)}.$$

2590.
$$\sqrt{2} + \sqrt{2-1} = \sqrt{2} + \sqrt{2-1} = \sqrt{2+1} =$$

Indicación. $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$.

2591. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\quad (a_n>0),$$

entonces $a_n = o(q_1^n)$, donde $q_1 > q$

2591.1. Supongamos que para los términos de la sene de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$ se venfica la designaldad

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho < 1$$
 para $n \geq n_0$

Demostrar que para el resto de la serie

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

se verifica la acotación

$$R_n \leqslant a_{n_a} \cdot \frac{p^{n-n_b+1}}{1-p}$$
, so $n \geqslant n_b$

2591.2. ¿Cuántos términos de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(2n)!|^n}{(4n)!!},$$

donde $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot 2n$, es suficiente tomar, parz que la suma parcial correspondiente S_n difiera de la suma de la sene S menos que $\epsilon = 10^{-6}$?

2592. Demostrar que, si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n} = q < 1 \quad (a_n > 0),$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Lo recíproco no es justo. Examinar el ejemplo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} + \frac{1}{34} + \frac{1}{23} + \frac{1}{23} + \dots$$

2593. Demostrar que, si para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ existe el

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q_i \tag{A}$$

entonces también existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{B}$$

Lo recíproco no es justo, existiendo el límite (B), puede no existir el límite (A). Examinar el ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

chlonces, a) si q < 1 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, b) si q > 1 esta trie es divergente (criterio generalizado de Cauchy).

Estudiar la convergencia de las series.

2394. Demostrar que, si

2597.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}.$$
2597.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^n \left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}.$$
2597.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^n \left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}.$$
2597.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^n \left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}.$$

Aplicando los criterios de Raabe y Gauss, estudiar la convergencia de las siguientes series.

$$2600. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i}e^{n}}{n^{n}+p}.$$

2601.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}.$$

2602.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n^{-p})}{q(q+1), \dots (q+n)} \quad (q>0).$$

2603,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)...(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$$
.

2604.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{6 \cdot \dots (2n)} \right]^{p} \cdot \frac{1}{n^{q}}.$$

2605
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)} \right]^{n} \qquad (p>0, q>0).$$

2606. Demostrar que, si para la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ se cumple la condición

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

cuando n --- so, entonces

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right),$$

donde $\varepsilon>0$ es arbitrariamente pequeño, además, si p>0, se tiene $a_n \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, a_n para $n\geqslant n_0$ es monótona decrecien le y tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Determinando el orden de decrecimiento del término genera a_n , estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si

2607.
$$a_n = \frac{n^p + a_n p^{n-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}$$
, dende $n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0$.

2608.
$$a_n - \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}$$
.

2609.
$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \gamma^p \ln \frac{n-1}{n+1} \quad (n > 1).$$

2610.
$$a_n = n^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right)$$
.

2611.
$$a_n = \log_{b^n} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) (a > 0, b > 0).$$

2612.
$$a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^p$$
.

2613.
$$a_n = \frac{1}{\frac{1+\frac{k}{n-n}}{n}}$$
. 2614. $a_n = \frac{1}{\frac{1+\frac{1}{n}}{n}}$.

2614.1. Demostrar el criterio de Jame: unas series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \ge 0)$ es convergente, si

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} \geqslant p > 1$$
 para $n > n_0$

y es divergente, si

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n} \le 1$$
 para $n > n_0$.

2615. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ es convergente, si existe un $\alpha > 0$ tal, que $\frac{a_n \frac{1}{a_n}}{\ln n} \ge 1 + a$ para $n \ge n_0$, y es divergente, si $\frac{1}{\ln n} \le 1$ para $n \ge n_0$ (criterio logarítmico).

Avenguar la convergencia de las series con los términos genera es 2616. $\alpha_s = n^{\ln x}$ (x > 0)

$$u_n = n^{n+1} \quad (x > 0).$$

2617.
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\ln \ln n}^{\ln n}} \quad (n > 1).$$

2618.
$$a_n = \frac{1}{(.n \cdot n_n)^{n \cdot (n \cdot n)}} \quad (n > 1).$$

Aplicando el criterio integral de Cauchy, averiguar la convergencia de las series con los términos generales.

2619.
$$a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$$
 (n > 1).

2620.
$$a_n = \frac{1}{n (\ln n + (\ln n)\theta)} \quad (n > 2).$$

2620.1. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2 \cdot n \cdot 3}{n \cdot 2 + p_1 \cdot \ln (3 + p_1 \cdot \ldots \cdot \ln (n + 1 + p))} \quad (p > 0_1,$$

2620.2. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N(n)}{n^2},$$

donde v (n) es el número de cifras del número n.

2620.3 Sean λ_n (n=1, 2, ...) las raíces positivas consecutivas de

$$\operatorname{tg} x = x$$
.

Estudiar la convergencia de la sene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\perp} :$$

2621 Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln (n!)}.$$

2622. Demostrar que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cuyos términos positivos forman una sucesión monótora decreciente, es convergente o divergente similatáneamente con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$.

2623. Sea f (x) una función positiva, monôtona y no creciente.

Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es convergente, entonces para su resto

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

se verifica la acotación

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) \, dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) \, dx.$$

Aplicando esto, hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

con una exactitud hasta 0,01.

2624. Demostrar el criterio de Ermakov: sea f(x) una función positiva, monótona decreciente y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}f_{-}(e^{x})}{f_{-}(x)}=-\lambda.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es convergente, si $\lambda < 1$, y es divergente si $\lambda > 1$. 2625. Demostrar el criterio de Lobachevski una sene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuyos términos positivos forman una sucesión monótona que tiende a cero, es convergente o divergente simultáneamente con la serie

$$\sum_{m=a}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

SERIES NUMERICAS: CR. DE CONV. DE LAS SERIES DE TER. DE SIGNO CONSTANTE

donde p_m es el índice máximo de los términos a_n que cumplen la desigualdad

$$a_n \geqslant 2^{-n}$$
 $(n = 1, 2, \ldots, p_n).$

Estudiar la convergencia de las siguientes series.

2628.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^n}.$$

2627.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2 + n + b})$$
. 2637. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)$.

2628.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{etg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right), \ \ 2638. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}.$$

2629.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)$$
. 2639. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

2630.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n^2}.$$
 2640.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}} \right)$$

2631.
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{3}{2} \sqrt{n}}$$
. $(a>0, b>0, c>0)$.

2632.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{n} e^{-V^{\frac{n}{n}}}$$
 2641. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n} - 1)$.

2633.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$$
. 2642. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^2} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^2} \right) \right]$.

2634.
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a^{2n} - n + b}{c \ln n + c \ln n}} (a > 0).$$

2635,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^{3} \left(\sin \frac{1}{a} \right)}.$$
 2644.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+d}}$$

2636.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^2}.$$
 2645.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!!!^n}{2(-4!...,2n)!}.$$

Averiguar la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con los siguientes términos generales:

2646.
$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x} dx}$$
. 2649. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-\sqrt{x}} dx$. 2650. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x^4} dx$. 2651. $u_n = \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$. 2652. $u_n = \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

Sustituyendo las sucesiones x_n (n = 1, 2, ...) por las series correspondientes, estudiar la convergencia de éstas, si

2653.
$$x_n = 1 + \frac{1}{1 - 2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \sqrt{n}$$
.
2654. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$

2655. ¿Cuántos términos de la serie hay que tomar, aproximadamente, para hallar su suma con una exactitud hasta 10⁻⁵, si

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^n}$.

§ 2. Criterios de convergencia de series de términos de cualquier signo

1.º Convergencia absoluta de la serie. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se llama absolutamente convergente, si es convergente la sene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n}|. \tag{2}$$

En este caso, la serie (1) también es convergente. La suma de una serie absolutamente convergente no depende del orden de los sumandos,

Para determinar la convergencia absoluta de la serie (1) es suficiente aplicar a la serie (2) los critenos conocidos de convergencia de las series de transpos de convergencia de las series.

de términos de signo constante.

Si la serio (1) es convergente y la serie (2) es divergente, la serie (1) se llama condicionalmente (no absolutamente) convergente. Mediante una permutación de los términos, la suma de una serie condicionalmente convergente se puede hacer igual a cualquier número (teorema de Riemann).

2.º Criterio de Leibniz. La serie alternada

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + ... + (- j^n)b_n +$$

 $(b_n \ge 0)$ es convergente (por lo general, no absolutamente) si a) $b_n \ge b_{n+1}$ (n=1,2,...) y b) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. En este caso, para el resto de la serie

$$P_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + ...$$

se tiene la cota

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \le \theta_n \le 1),$$

3.º Criterio de Abel, La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

es convergente, si: 1) la serie, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente; 2) los números b_n (n=1,2,...) forman una sucesión monótona y acotada

 b_n (n=1, 2, ...) forman una sucesión monótona y acotada, 4.º Criterio de Dirichlet. La serie (3) es convergente, si: 1) las sumas parciales $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ están acotadas, 2) b_n forman una sucesión monótona que tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Problemas:

2656. Demostrar que los términos de una serie no absolutamente convergente se pueden agrupar, sin permutarlos, de tal modo que a nueva sene obtenida sea absolutamente convergente

2657. Demostrar que la sene $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si se cumplen las condiciones: a) el término general a_n de esta serie tiende a cero cuando $n \to \infty$; b) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, obtenida como resultado de la

agraphejon de los términos de la serie dada sin alterar su orden, es convergente; c) el número de términos a_i que figuran en $A_n = \sum_{i=p_0}^{p_0} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < ...)$, está acotado.

2658 Demostrar que la suma de una sene convergente no varia si se permutan sus términos de tal modo que ninguno de ellos se aleje de su pración inicial más de n sitios, donde m es un número previame e dado.

Demostrar la convergencia de las siguientes series y hallar sus sumas

2659.
$$1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{5} + \dots$$

2669,
$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} + \dots$$

2661.
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Indicación. Aplicar la fórmula $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\epsilon_n$, donde C és la constante de Euler y $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n=0$

2662. Sabiendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n} = \ln 2$, hallar las sumas de las senes que se obtienen de la dada como resultado de la permutación de sus términos

a)
$$1 + \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

У

b)
$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

2663 Los términos de la sene convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$$

se deben permutar de tal modo que se convierta en una sene divergente Estudiar la convergencia de las senes de términos de signo variable

2664.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}.$$
 2665.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n.$$
 2666.
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

2 CRITERIO DE CONVERGENCIA DE SERIES DE TERMINOS DE CUALQUIER SIGNO

2666.1. Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \tag{1}$$

donde $b_n > 0$ y $b_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. ¿Se oeduce de aquí que la sene (1) es convergente? Examinar el ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}.$$

2667.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$
 2671.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin (\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$$

2668.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \qquad 2672. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N-n}}{n}.$$

2669.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$
. 2673. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

2670.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{-n} + (-1)^n} = 2673.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n n} \cos \frac{\pi e^n}{n+1}.$$

2674. Demostrar que una serie alternada

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1}b_n - (b_n > 0)$$

es convergente si

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o' \frac{1}{n}$$

donde p > 0 (véase 2606).

Estudiar la convergencia absoluta (a excepción del 2690) y condicional de las siguientes series

2675.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}.$$
2679.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{x+n}.$$
2680.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(n+(-1)^{n})^{\beta}}.$$

2677.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right]$$
 2681.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[3^{\ell}n + (-1)^{n-1}]^p}.$$

2678.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}. \qquad 2682. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n \pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n \pi}{4}}.$$

2683. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$ 2686. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{|\ln n|}$ 2684. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^n}.$ 2687. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{\sqrt{n}}}{n^n}$

2685.
$$\sum_{n=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
 2688.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ln n}}{n}$$
.

2689.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1-3-5-(2n-1)}{2-4-6-(2n)} \right]^{p}.$$

2690.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n - \sin n^2}{n}$$
. 2691. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

Indicación. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Sea

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1}}{b_0 x^q + b_1 x^q} + \frac{a_p}{a_p}$$

una función racional, donde $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ y $|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\ldots+b_{q-1}>0$ para $x\geqslant n_0$ Estudiar la convergencia absoluta y condicional de la serie

$$\sum_{n=-n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Estudiar la convergencia de las series

2693.
$$\frac{1}{1p} - \frac{1}{79} + \frac{1}{3p} - \frac{1}{49} + \frac{1}{5p} - \frac{1}{69} + \dots$$

2694.
$$1 + \frac{1}{3p} - \frac{1}{2p} + \frac{1}{5p} + \frac{1}{7p} - \frac{1}{4p} + \dots$$

2695.
$$1 + \frac{1}{3p} - \frac{1}{1p} + \frac{1}{5p} + \frac{1}{5p} - \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{11p} - \frac{1}{5p} + \dots$$

2696.
$$1 - \frac{2}{99} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{4p} - \frac{2}{59} + \frac{1}{6p} + \frac{1}{7p} - \frac{2}{89} + \frac{1}{9p} + \cdots$$

2697. Demostrar que las senes

a)
$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$$

b)
$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

son convergentes no absolutamente en el intervalo $(0, \pi)$.

2698. Para las senes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

determinar para el conjunto de parámetros (p, x); a) la región de convergencia absoluta, b) la región de convergencia no absoluta

2698.1. Estudiar la convergencia de las series

a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{|n|^n}$$
; c) $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10 \sin n}$.

b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(\ln n\right)}.$$

2699. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)}{n-n^q} \frac{(n+p)}{n-n^q}$$

determinar a) la región de convergencia absoluta b) la región de convergencia condicional

2700. Estudiar la convergencia de la sene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{n},$$

donde
$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)..(m-n+1)}{n}$$
.

2701. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1.$$

 u^{se} puede afirmar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tambien es convergente?

Examinar los ejemplos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{V^n} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{-1)^n}{V^n} + \frac{1}{n} \right] \right]$$

2702. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una sene no absolutamente convergente y

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{a_i}, \quad N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{\bar{P}_n}=1.$$

2703. Demostrar que la suma de la sene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

para cada p>0 está comprendida entre $\frac{1}{2}$ y 1

2703.1. ¿Cuántos términos de la sene se deben tomar para obtener su suma con una exactitud hasta $t = 10^{-6}$, si

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$$
; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{\sqrt{n}}$.

2704. Demostrar que, si los términos de la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

se permutan de tal modo que a cada en po de p términos positivos consecutivos le sustituya un grupo de q términos negativos consecutivos, entonces la suma de la nueva serie será igual a

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \ln \frac{p}{q} \, ,$$

2705. Demostrar que la serie armônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

permanece divergente si, no permutando sus términos, se cambian sus signos de tal modo que después de p términos positivos sucedar q términos negativos ($p \neq q$). La convergencia solamente tiene lugar para p = q.

§ 3. Operaciones con las series

Suma y producto de series. Por definición

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$$
; b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

donde

$$c_n = a_1 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_1.$$

La igualdad a) tiene un sentido no formal si ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, y la igualdad b), si, además, al menos de una de estas series es absolutamente convergente.

Problemas:

2706, ¿Qué se puede afirmar respecto de la suma de dos series, de las cuales a) una es convergente y la otra divergente b) ambas son divergentes?

2707. Hallar la suma de las dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^n} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} \right].$$

Hallar las sumas de las siguientes series

2708.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right]. \qquad 2709. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$$

2710.
$$\sum_{n=a}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{4}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$
 ((xy|<1).

2711. Comprobar que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

2712. Comprobar que
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$$
 $(|q| < 1)$.

2713. Comprobar que el cuadrado de la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

es una serie divergente.

2714. Demostrar que el producto de las dos senes convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \qquad (\alpha > 0) \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta > 0)$$

es una sene convergente si $\alpha + \beta > 1$ y es divergente si $\alpha + \beta < 1$.

2715. Comprobar que el producto de las dos series divergentes

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad \text{y} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

es una sene absolutamente convergente

§ 4. Series funcionales

1 ° Campo de convergencia. El conjunto X_0 de aquellos valores de x, para los que es convergente la sene funcional

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$
 (i)

se llama campo de convergencia de esta serie, y la función

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \qquad (x \in X_0)$$

suma de la misma

2.º Convergencia uniforme. Una sucesión de funciones

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

se llama uniformemente convergente en el conjunto X, si

existe la función límite

$$f(x) = \sup_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (x \in X),$$

2) para cualquier $\epsilon > 0$ se puede señalar un número $N = N(\epsilon)$ tal, que

 $f(x) + f_{\pi_1}(x) < 8$

para n > N y $x \in X$. En este caso, se escribe: $f_n(x) = f(x)$.

La serie funcional (1) se ilama uniformemente convergente en el conjunto X, si la sucesión de sus sumas parciales

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x)$$
 $(n = 1, 2, ...)$

es un formemente convergente en este conjunto.

3.° Criteno de Cauchy. Para la convergencia uniforme de la serie (1) en el conjunto X es necesario y suficiente que, para todo $\epsilon > 0$ exista un número $N = N(\epsilon)$ tal, que para n > N y p > 0 se verifique la designaldad

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)\right| < \epsilon \text{ para lodos } x \in X,$$

4.º Criterio de Weierstrass. La serie (1) es absoluta y uniformemente convergente en el conjunto X, si existe una serie numérica convergente

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots$$
 (2)

tal que

$$u_n(x) \leqslant c_n \text{ para } x \in K \ (n=1, 2, \dots)$$

5.° Criterio de Abel. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{3}$$

es uniformemente convergente en el conjunto X, si 1) la serie $\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ es uniformemente convergente en el conjunto X. 2) las funciones $b_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ están acotadas en conjunto y para cada x forman una sucesión monôtona.

6.° Criterio de Dirichlet. La serie (3) es uniformemente convergente en el conjunto X, si 1) las sumas parciales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ están acotadas en conjunto; 2) la sucesión $b_n(x)$ (n=1, 2, ...) es monótona para cada x y uniformemente tiende a cero en X cuando $n \longrightarrow \infty$

7.º Propiedades de las series funcionales, a) La suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua.

b) Si la serie funcional (1) es uniformemente convergente en el intervalo (a, b) y existen límites finitos

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n \qquad (n = 1, 2, ...),$$

entonces, 1) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ es convergente y, 2) se verifica la igualdad

$$\lim_{\kappa \to a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{\kappa \to a} u_n(x) \right\},$$

c) Si los términos de una serie convergente (1) tienen derivada continua para a < x < b y la serie de las derivadas $\sum u_n'(x)$ is uniformemente convergente en el intervalo (a, b), entonces

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ para } x \in (a, b)$$

d) Si los términos de la serie (1) son funciones continuas y la serie es uniformemente convergente en el segmento finito [a, b], se tiene

$$\int_{a}^{b} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a}^{b} u_n(x) dx. \tag{4}$$

En general, la fórmula (4) es válida si $\int R_n(x) dx \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, donde $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Esta última condición sirve también para el caso de límites infinitos de integración

Problemas

Determinar el campo de convergencia (absoluta y condicional) para las siguientes senes funcionales.

2718.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$
 2720.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2^n}}{2^n} x^n \cdot (1-x)^n.$$

2717.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x^{n-2}}{1+x^n} \right)^n, \qquad \qquad 2721. \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

2718.
$$\sum_{n=-n+1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$
 2722.
$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^n}.$$

2719
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{(2n-1)}{\binom{n}{n}} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n. \qquad 2723. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p s \circ ns}{1+n^q}$$

$$(q > 0, \quad 0 < x < \pi).$$

2724.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$
 (sene de Lambert)

$$2725, \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n} \right]^n.$$

2726.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

2727.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^n)\cdots(1+x^n)}.$$

2728.
$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nS}$$
.

2729.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1 + a^{-n}x^2}.$$

2730.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{2}})\dots(2-x^{\frac{1}{n}}) \quad (x>0)$$

2731.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$$

2732.
$$\sum_{n=-\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}}^{\infty} (x>0; y>0).$$

2733.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \ge 0). \quad 2735. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} \quad (x \ge 0)$$

2734.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^{n!}}$$
. 2736. $\sum_{n=1}^{\infty} \lg^n \left(x + \frac{y}{n} \right)$.

2737. Demostrar que, si la serie de Laurent $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ es convergente para $x = x_1$ y para $x = x_2$ ($|x_1| < |x_2|$), entonces esta serie es convergente también para $|x_1| < |x_1| < |x_2|$.

2738. Determinar el campo de convergencia de la serie de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{-n}} x^n$$

y hallar su suma.

2739. Hallar los campos de convergencia (absoluta y condicional) de las series de Newton

a)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^{(n)}}{n!}$$
; b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{x^{(n)}}{n!}$; c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-x)^n y^{(n)}}{n!}$,

donde

$$x^{(n)} = x(x-1) \dots [x-(n-1)]$$

2740. Demostrar que, si la serte de Dir chlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ es convergente para $x = x_0$, entonces también es convergente para $x > x_0$.

2741. Demostrar que para la convergencia uniforme en un conjunto X de una sucesión $f_n(x)$ (n=1,2) hacia la funcion límite f(x), ès necesario y suficiente que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x\in X} |r_n(x)| = 0, \right.$$

donde $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742 Qué significa que la suces.ón $f_n(x)$ (n-1, 2, ...) a es convergente en el intervalo $(x_0, +\infty)$ by as uniformemente convergente en cada intervalo finito $(a, b) \in (x_0, +\infty)$, c les uniformemente convergente en el intervalo $(x_0, +\infty)$?

2743. Hallar, para la sucesión

$$f_n(x) = x^n$$
 $(n = 1, 2, ...)$ $(0 < x < 1)$

e, subíndice m nimo $N=N(\epsilon,x)$, comenzando desde el cual, la desvizción de los términos de la sucesión en el punto dado x de la función

limite no es superior a 0,001, si $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{1\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \dots$

¿Es uniformemente convergente esta sucesión en el intervalo (0.1.2.2744. ¿Cuántos términos de la sene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s \cdot nx}{n(n+1)}$$

se deben tomar para que la suma parcial $S_n(x)$ difiera de la suma de a sene para $-\infty < x < +\infty$ menos que ϵ^n Efectuar el calculo numérico para, a) $\epsilon \neq 0$, 1, b) $\epsilon = 0.01$; c) $\epsilon = 0.001$.

2745. Para qué valores de n puede garantizarse la validez de la desigualdad

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \le x \le 10)$$
?

Avenguar si son uniformemente convergentes las sucesiones en los intervalos indicados:

2746.
$$f_n(x) = x^n$$
; a) $0 \le x \le \frac{1}{2}$, b) $0 \le x \le 1$.

2747.
$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}; \quad 0 \le x \le 1.$$

2748.
$$f_n(x) = x^n + x^{4n}; \quad 0 \le x \le 1.$$

2749.
$$f_n(x) = \frac{1}{x+n}$$
; $0 < x < +\infty$.

2750.
$$f_a(x) = \frac{nx}{1 + n + x}$$
; $0 \le x \le 1$.

2751.
$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$$
; a) $0 \le x \le 1 - e$; b) $1 - e \le x \le 1 + e$; c) $1 + e \le x < + \infty$, donde $e > 0$.

2752.
$$f_n(x) = \frac{2nx}{-n^2x^2}$$
; a) $0 \le x \le 1$; b) $1 < x < +\infty$.

2763.
$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \infty < x < + \infty$$
.

2754.
$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right); \quad 0 < x < +\infty.$$

2755. a)
$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$
; $-\infty < x < +\infty$; b) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$; $-\infty < x < +\infty$

$$0 < x < +\infty,$$
 b) $f_n(x) = \arctan(nx); \quad 0 < x < +\infty; \quad b) \quad f_n(x) = x \arctan(nx);$

2757.
$$f_n(x) = e^{n(x-1)}; \quad 0 < x < 1.$$

2758. $f_n(x) = e^{-(x-x)^2}$; a) -1 < x < t, donde l es un número positivo arbitrano, b) $-\infty < x < +\infty$

2759.
$$f_n(x) = \frac{x}{n} \cdot n \cdot \frac{x}{n}, \quad 0 < x < 1.$$

2760. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; a) en el intervalo finito (a, b), b) en el intervalo $(-\infty, +\infty)$

2761.
$$f_n(x) = n(x^{-\frac{1}{n}} - 1), \quad 1 \le x \le a$$
.

2762.
$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$$
 $0 \le x \le 2$.

2763.
$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x, & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n}; \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x\right), & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{si } x \ge \frac{2}{n} \end{cases}$$

on el segmento $0 \le x \le 1$.

2764. Sea f(x) una función arbitraria, definida en el segmento [a, b], y

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Demostrar que

$$f_a(x) \supset f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

cuando n -- 00.

2765 Supongam o que la función f(x) tiene derivada continua f'(x) en el intervalo (a,b) y

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right],$$

Demostrar que $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ en el segmento $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, donde $\alpha \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$.

2766. Sea $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$, donde f(x) es una función

continua Demostrar que la sucesión $f_n(x)$, es uniformemente convergente en cualquier segmento finito [a,b].

Estudiar el carácter de convergencia de las siguientes series.

2767. $\sum_{r=0}^{\infty} x^{r}$, a) en el infervalo x < q, donde q < 1; b) en el intervalo |x| < 1.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \text{ en el segmento} - 1 \leqslant x \leqslant 1.$

2768. 1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ en el intervalo $(0, +\infty)$,

2769. $\sum_{n=2}^{\infty} (1-x) x^n$ en el segmento $0 \le x \le 1$.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 \le x \le 1.$

277). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}; \ 0 < x < +\infty.$

2772. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; \ 0 < x < +\infty.$

2773. $\frac{nx}{(1+x)(1+2x) \cdot (1+nx)^{\frac{1}{2}}}$

a) $0 \le x \le \varepsilon_1$ donde $\varepsilon > 0$; b) $\varepsilon \le x < +\infty$

2774. Aplicando el criterio de Weierstrass, demostrar la convergencia uniforme en los intervalos indicados de las siguientes series funcionales

a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty;$

b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2 < x < +\infty$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, \quad 0 \leqslant x < +\infty;$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} , x^1 < +\infty,$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant 2$,

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, |x| < a, donde a es un número positivo arbitrario,

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, \quad |x| < +\infty;$

 $h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x < +\infty;$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \qquad |x| < +\infty;$

j) $\sum_{n=a}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^a n}\right)$, |z| < a;

 $k) \sum_{n=1}^{\infty} x^{k} e^{-nx}, \qquad 0 \le x < +\infty;$

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arcig} \frac{2x}{x^k + n^k}$, $|x| < +\infty$.

Avenguar si son uniformemente convergentes las siguientes series funcionales en los intervalos indicados

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \sin \ a) \text{ en el segmento } \varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon, \text{ donde } \varepsilon > 0,$ b) en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \ 0 < x < +\infty.$

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

Indicación Acotar el resto de la sene.

2778.
$$\sum_{n=\pm}^{\infty} \frac{(-j^n)^n}{n+\sin x}; \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

2779.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + \varepsilon^2}}, \quad |x| \le 10.$$

2780.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{\frac{2n\pi}{3}}}{\sqrt{n+x^{2}}} = -\infty < x < +\infty$$

2781.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n x s_n xx}{1 + x + x}$$
; $0 \le x < +\infty$.

2782.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/n \rfloor}}{\lfloor \lfloor n/n \rfloor + 2 \rfloor}, \quad 0 \le x < +\infty$$

2783. Puede converger uniformemente hacía una función continua una sucesión de funciones discontinuas?

Examinar el ejemplo

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \psi(x)$$
 $(n-1, 2, 1)$

donde

$$\psi(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ si } x \text{ es irracional,} \\ 1, \text{ si } x \text{ es racional,} \end{array} \right.$$

2784. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ les uniformemente convergente en [a, b], la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ también es uniformemente convergente en [a, b].

2785. Si la sene $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es absoluts y uniformemente convergente en [a, b], entonces: eserá también necesanamente uniformemente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ en $[a, b]^2$

Examinar el ejemplo
$$\sum_{n=a}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$$
, donde $0 \le x \le 1$

2786. Demostrar que la sene absoluta y uniformemente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (0 \le x \le 1),$$

donde

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le x \le 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{si} \quad 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{si} \quad 2^{-n} \le x \le 1. \end{cases}$$

no puede mayorarse por una serie numérica convergente de términos no negativos.

2787. Demostrar que, si la sene

$$\sum_{n=\pm 1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

cuyos términos son funciones monótonas en el segmento [a,b], es absolutamente convergente en los extremos de este segmento, entonces es absoluta y uniformemente convergente en el segmento [a,b]

2788. Demostrar que una sene de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

es uniformemente convergente en cualquier segmento comprendido en el intenor de su intervalo de convergencia.

2789. Supongamos que $a_n \to \infty$ de tal modo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ es convergente. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto cerra do y acotado que no contenga puntos a_n $(n=1,2,\dots)$

2790. Demostrar que, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^n}$$

es uniformemente convergente para x > 0.

2791. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\eta}$$

es uniformemente convergente en la región x > 0.

2792. Comprobar que la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

es continua y tiene derivada contínua en la región $-\infty < x < +\infty$. 2793. Comprobar que la función

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^4}$$

a) está definida y es continua en todos los puntos, a excepción de los puntos enteros. $x = 0, \pm 1, \pm 2, ..., b$) es periodica, de periodo igual a l 2794. Comprobar que la serie

$$\sum_{n=\pm}^{\infty} \left[n x e^{-n\pi} - (n-1) x e^{-(n-1)x} \right]$$

es convergente, pero no uniformemente, en el segmento $0 \le x \le 1$ a pesar de que su suma es una función continua en este segmento

2795 Determinar los campos de existencia de las funciones f(x) y estudiar la continuidad, sí

$$a_{j} = \int_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{n};$$
 c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^{2})^{n}}.$

b)
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + n(x-1)^n}{x^2 + n^2};$$

2796. Sean r_k $(k=1,\ 2,\)$ los números racionales del segmento [0, 1]. Comprobar que la función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \le x \le 1)$$

posee las siguientes propiedades: 1) es continua, 2) es derivable en los puntos irracionales y no derivable en los racionales.

2797. Demostrar que la función Zeta de Riemann

$$\zeta(z) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

es continua en la región x>1 y tiene en esta región derivadas continuas de todos los órdenes

2798. Demostrar que la función Theta

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n x_n^2}$$

está definida y es infinitamente denvable para x > 0.

2799. Determinar el campo de existencia de la función f(x) y estudiar su derivabilidad, si.

a)
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x};$$
 b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{|x|}{2} + x^2}.$

2800. Comprobar que la sucesion

$$f_n(x) = \frac{1}{1} \operatorname{arctg} x^n \quad (n = 1, 2, ...)$$

es uniformemente convergente en el intervalo (- 00, + 00), pero

$$\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]_{n=1}^r\neq\lim_{n\to\infty}f_n'(1).$$

2801. Comprobar que la sucesion

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

es uniformemente convergente en el intervalo (~ 00, + 00), pero

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. ¿Para qué valores del parámetro α: a) la sucesión

$$f_{\alpha}(x) = \pi^{\alpha} x e^{-n\pi} \tag{1}$$

(n = 1, 2, ...) es convergente en el segmento (0, 1], b) la sucesión (1) es uniformemente convergente en (0, 1], c) es posible el paso al límite bajo el signo de la integral

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{1}f_{n}\left(x\right) dx$$
?

2803. Comprobar que la sucesión

$$f_n(x) = nx e^{-nx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

es convergente en el segmento [0, 1], pero

$$\int_{a}^{1} \left[\lim_{n \to \infty} f_{n}(x) \right] dx \neq \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{1} f_{n}(x) dx.$$

2804. Comprobar que la succsión

$$f_n(x) = nx (1 - x)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

converge no uniformemente en el segmento (0, 1], a pesar de que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}f_{n}(x)\,dx=\int_{0}^{1}\lim_{n\to\infty}f_{n}(x)\,dx.$$

2805. Es lícito el paso al límite bajo el signo de la integral en la expresión

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+n!x^{n}}dx$$
?

Hallar

2806.
$$\lim_{x \to 1} \int_{0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \right)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}$$
.

$$2807, \ \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - - x^{n+1}), \ 2808, \ \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}.$$

2808.1.
$$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + n^n x^n}$$

2809. Es lícita la derivación término a término de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^n}$$
?

2810. Es lícita la integración término a término de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{x^{4n} \xrightarrow{\frac{1}{1-\delta}} - x^{\frac{1}{1-\delta}} - x^{\frac{1}{1$$

en el segmento [0, 1]?

2811. Sea f(x) ($-\infty < x < +\infty$) una función infinitamente derivable y supongamos que la sucesión de sus derivadas $f^{(n)}(x)$ (n = 1, 2, ...) es uniformemente convergente en todo intervalo finito (a, b) hacia una función $\varphi(x)$. Demostrar que $\varphi(x) = Ce^x$, donde C es una constante Examinar el ejemplo $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, n = 1, 2.

2811.1. Supongamos que las funciones $f_n(x)$, n=1, 2, ..., están definidas y acotadas en $(-\infty, +\infty)$ y que $f_n(x) \supset \varphi(x)$ en todo segmento [a, b]. Umplica esto que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x} f(x) = \sup_{x} \varphi(x)^{n}$$

§ 5. Senes potenciales

1.º Intervalo de convergencia, Para cada serie de potencias

$$a_n + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + \dots$$

existe un intervalo de convergencia: |x-a| < R tal que en el interior del mismo la serie es convergente y en el exterior es divergente. El radio de convergencia R se determina por la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\sigma_n|}$$

El radio de convergencia R también puede determinarse por la formula

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \Big| .$$

si este límite existe.

2. Teorema de Abel. Si la serie de potencias $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (|x| < R) es convergente en el extremo x = R del intervalo de convergencia, se tiene

$$S(R) := \lim_{x \to R - a} S(x).$$

3.º Serie de Taylor. Una función f(x), analítica en el punto a, es desarrollable en serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

El resto de esta sene

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

puede expresarse en la forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

(forma de Lagrange), o en la forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x - a))}{n!} (1 - \theta_1)^n (x - a)^{n+1} \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

(forma de Cauchy).

Es necesario recordar los cinco desarro, los fundamentales siguien es

$$1 e^{x} - 1 + x + \frac{x^{3}}{2!} + \frac{x^{n}}{n!} + \dots + \infty < x < + \infty$$

II
$$\sin x = x - \frac{x^n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots + (-\infty < x < +\infty)$$

III
$$\cos x - 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots (-\infty < x < +\infty).$$

1V
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^n + \dots$$

$$,\quad +\frac{m\left(m-1\right) \ldots \left(m-n+1\right) }{n!}x^{n}+\ldots \left(-1< z<\ \right) .$$

V.
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots + (-1)^{n-x} \frac{x^n}{n} + \dots + 1 < x < 1$$

4.° Operaciones con las series de potencias. En el interior del intervao de convergencia común |x-a| < R, se tiene:

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x-a)^n$$
;

b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

donde

$$c_n = a_1b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_n$$

C)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$
 = $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n$

d)
$$\int \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

5 ° Senes de potencias en el campo complejo. Examinemos la sene

donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

$$a_n = a_n + ib_n$$
, $a = a + i\beta$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$

Para cada serie de éstas existe un círculo de convergencia $z = a \mid < R$. ral que en el interior del mismo la serie es convergente (y, además. absolutamente) y en el exterior es divergente. El radio de convergencia R es igua, al radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| r^n$$

en el campo real.

Problemas

Determinar el radio y el intervalo de convergencia y estudiar el comportamiento en los puntos de la frontera del intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

2812.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$
.

2815.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^3} \cdot x^n \ (0 < \alpha < 1).$$

2813.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$
. 2816. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2816.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

2814.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

2814.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(2n)!} x^n$$
. 2817. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^{n}} x^n \quad (a > 1)$

2818.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2n)} \right]^{p} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{n}.$$

2819.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^4}{(2n+1)} \right]^p x^n.$$

2820.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m (m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^{n}.$$

2821.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^n} \right) x^n$$
 $(a > 0, b > 0).$

2822.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \qquad (a > 0, b > 0).$$

2828,
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{Y_n}}$$
 (a>0)

2824.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \sqrt{n} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$
. 2828. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n!} \right)^n \left(\frac{n}{e} \right)^n x^n$.

2825.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n, \qquad 2827. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

2828.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n.$$
 2829.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{2tn}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

2830,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$
,

2831.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|V_n|}}{n} x^n \text{ (serie de Pringsheim)}$$

2831.1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n/m}}{n} (1-x)^n$$
, donde $\nu(n)$ es el número de cifras de n .

2831.2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x \cdot n \cdot n} \right)^n$$

Problemas

2832. Determinar el campo de convergencia de la serie hipergeomé-

$$1 + \frac{\alpha \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha (\alpha + 1) \beta (\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma (\gamma + 1)} x^{\beta} + \dots$$

$$+ \frac{\alpha (\alpha + 1, \dots (\alpha + n - 1) \beta (\beta + 1) \dots (\beta + n - 1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma (\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)} x^{n} + \dots$$
Hallow all some

Hallar el campo de convergencia de las series de potencias generaliza-

2833.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$
.

2834.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{x}{2^n}$$
. 2836. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} e^{-nx}$.

2835.
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n!}}.$$
 2837.
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3^{1n} (n!)^n}{(3n)!} tg^n x.$$

2838. Desarrollar la función

$$f(x) = x^*$$

en sene de potencias enteras no negativas del binomio x + 1.

2839. Desarrollar la función

$$f(x) = \frac{1}{a - x} \qquad (a \neq 0)$$

en sene de potencias. a) en potencias de x; b) en potencias del binomio s = b, donde $b \neq a$, c) en potencias de $\frac{1}{x}$ Indicar los campos de convergencia correspondientes.

2840. Desarrollar la función $f(x) = \ln x$ en serie de potencias enteras no negativas de la diferencia x-1 y hallar el intervalo de convergencia del desarrollo.

Ha lat la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l-1)^{n+1}}{n}.$$

Escribir los desarrollos de las siguientes funciones en sene de potencas enteras no negativas de la variable x y hallar los intervalos de convergencia correspondientes

2841.
$$f(x) = \sin x$$
.
2842. $f(x) = \cot x$
2843. $f(x) = \sin^2 x$.
2846. $f(x) = \cos (\mu \arcsin x)$
2846. $f(x) = \cos (\mu \arcsin x)$

2847. Escribir tres términos del desarrollo de la función $f(x) = x^x$ en sene de potencias enteras no negativas de la diferencia x=1

2848. Escribir tres términos del desarrollo de la función $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{e}} (x \neq 0)$ y f(0) = e en serie de potencias enteras no negativas de la variable x

2849. Desarrollar las funciones sin (x + h) y cos (x + h) en serie de potencias enteras no negativas de la variable h.

2850. Determinar el intervalo de convergencia del desarrol o en serie de potencias de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

a) en serie de potencias de x, b) en serie de potencias del binomio x - 5, sin efectuar el desarrollo mismo.

2850.1. ¿Se puede afirmar que

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-2} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} \Longrightarrow \sin x \text{ en } (-\infty, +\infty) \text{ cuando } N \to \infty?$$

Aplicando los desarrollos 1 · V, escribir los desarrollos en sene de potencias respecto de x de las siguientes funciones

2853. sm² x.

2856. VI Zx

2854. $\frac{x^{-9}}{-x}$

2857. In $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2858. $\frac{x}{1+x-2x^4}$.

Indicac on. Des omponer la fracción dada en fracciones simples

2859.
$$6 \frac{2-5x}{-5x-x^2}$$
.

2863.
$$\frac{x \cos \alpha - x^{2}}{1 - 2x \cos \alpha + x^{2}}.$$

2860.
$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$
.

2864.
$$\frac{x \sin x}{1 - 2x \cos x + x^3}$$
.

2861.
$$\frac{1-x-x^2}{1-x^2-x^2}$$

2865.
$$\frac{x \sin a}{1 - 2x \cot x + x^2}$$
.

2862.
$$\frac{1}{1+x+x^2}$$
.

2868.
$$\frac{1}{(1-x^2, V^2-x^2)}$$

2862.1.
$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^2}$$
.

2867.
$$\ln(1+x+x^2+x^3)$$
.

Indicación. Aplicar las formulas de Euler.

Desarrollando previamente las derivadas e integrando luego término a termino, obtener los desarrollos en serie de potencias de las siguientes funciones

2869
$$f(x) = arctg + Hallar la suma de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+n}}{2^n - 1}$$$$

2870.
$$f(x) = \arcsin x$$
.

2871.
$$f(x) = -\pi (x + \sqrt{1 + x^2})$$
.

2872.
$$f(x) = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2)$$

2873. Aplicando diversos métodos, hallar los desarrollos en serie de potencias de las siguientes funciones:

a)
$$f(x) = (1 + x) \ln (1 + x);$$

b)
$$f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{+x}{-x} + \frac{1}{2} \arccos x;$$

c)
$$f(x) = \arg \frac{2 - 2x}{1 + 4x}$$
;

d)
$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x}$$
;

e)
$$f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$$
;

f)
$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$
:

g)
$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$
:

h)
$$f(x) = x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$$

2874. Aplicando la unicidad del desarrollo

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots$$

ballar las derivadas de n-ésimo orden de las siguientes funciones

a)
$$f(x) = e^{x^2}$$
; b) $f(x) = e^{\frac{a}{x}}$; c) $f(x) = \operatorname{arcig} x$.

2875. Desamollar la función

$$f(x) = \ln \frac{1}{2 + 2x + x^2}$$

en sene de potencias enteras positivas del binomio x + 1.

2876. Desarrollar la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

en serie de potencias negativas de la variable x.

2877. Desarrollar la función

$$f(x) = \ln x$$

en serie de potencias enteras positivas de la fracción $\frac{x-1}{x+1}$.

2878. Desarrouar la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

en sene de potencias enteras positivas de la fracción $\frac{x}{1+x}$.

2879. Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} x^n$$

Demostrar directamente que

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

2880. Sea por definición

У

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!}$$

 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$

Demostrar que

a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

2881. Escribir unos cuantos términos del desarrollo en serie de

$$f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}.$$

Efectuando las operaciones correspondientes con las senes de polencias, obtener los desarroi os en sene de potencias de las siguientes funciones

2882. $f(x) = (1+x)e^{-x}$

2887. $f(x) := e^x \sin x$.

2883. $f(x) = (1-x)^{x} \operatorname{ch} \sqrt{x}$, 2884. $f(x) = \ln^{x} (1-x)$.

2888. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

2885. $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arcig} x$,

2889. $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$.

2886. $f(x) = e^x \cos x$.

2890. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{a}$

Escribir tres términos del desarrollo (distinto de cero) en serie de potencias positivas de la variable x de las siguientes funciones

2891, $f(x) = \operatorname{tg} x$. 2892, $f(x) = \operatorname{th} x$.

2893. $f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$.

2894. Supongamos que el desarrollo de la función sec x viene escrito en la forma

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)^n} x^{1n}.$$

Deducir una relación de recurrencia para los coeficientes E_n (los números de Euler)

2895. Desarrollar en sene de potencias la función

$$f(x) \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \qquad (|x| < 1).$$

2896. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Escribir el desarrollo de la función $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.

2897. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene el radio de convergencia R_1 y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tiene el radio de convergencia R_2 , ¿qué radio de

convergencia R tienen las series

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$
; b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

2898. Sea

$$I = \underbrace{\mid m \mid}_{a = r} \begin{bmatrix} a_{\underline{a}} & \text{y} & L = \overline{\mid m \mid}_{a = r} \begin{bmatrix} a_{\underline{a}} \\ a_{\underline{a}-r} \end{bmatrix}.$$

Demostrar que el radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ cumple las desigualdades

$$1 \le R \le L$$

2899. Demostrar que, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, siendo

$$n! |a_n| < M \quad (n-1 \ 2. \)$$

donde M es una constante, se tiene. 1) f(x) es infinitamente derivable en cualquier punto a, 2) se verifica el desarrollo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(n)}{n!} (x - a)^n \quad \text{if } x^n < \pm \infty,$$

2899 1. Sea $f(x) \in C^{(m)}(a, b)$ y $|f^{(n)}(x)| \le c^n$ (n = 0, 1, 2, ...) para $x \in (a, b)$. Demostrar que la función f(x) es desarrollable en sene de potencias

$$f(x) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (x_0 \in (a, b)),$$

que es convergente en el intervalo (a, b).

2899.2. Sea $f(x) \in C^{(\infty)}[-1,1]$ y $f^{(n)}(x) \ge 0$ (n > 0, 1, 2, ...) para $x \in [-1,1]$ Demostrar que la función f(x) es desarrollable en serie de potencias

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

en el ntervalo (1 1)

Indicación Teniendo en cuenta que las derivadas $f^{(n)}(x)$ son monótonas, para el resto $R_n(x)$ de la serie de Taylor de la función f(x) obtener la cota

$$\|R_n(x)\| \leq \|x\|^{n+1} f(1),$$

2900. Demostrar que, si 1) $a_n \ge 0$ y 2) existe

$$\lim_{x \to R \to a} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

entonces

$$\sum_{n=a}^{\infty} a_n R^n - S$$

Desarrollar en serie de potencias las funciones

2901.
$$\int_{0}^{z} e^{-t^{2}} dt$$

2903.
$$\int_{-L}^{L} \frac{\sin t}{t} dt.$$

2902.
$$\int_{0}^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^{2}}}.$$

2904.
$$\int_{0}^{x} \frac{\operatorname{arcig} x}{x} dx,$$

2905.
$$\int_{0}^{\pi} \frac{t dt}{\ln(1+t)}$$
 (escribir cuatro términos)

Aplicando la denvación término a término, calcular las sumas de las siguientes senes

2906.
$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} + \dots$$
 2908. $1 + \frac{x^4}{9!} + \frac{x^4}{4} + \dots$

2908.
$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$$

2907.
$$x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} - \dots$$

2907.
$$x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} = \dots$$
 2909. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$

2910.
$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4 \cdot 6}x^2 + \dots$$

Indicación. Multiplicar la derivada de la serie por 1-x.

Aplicando la integración término a término, calcular las sumas de las semes

2911.
$$x+2x^2+3x^3+...$$

2912.
$$x-4x^4+9x^4-16x^4+...$$

2913,
$$1.2x + 2.3x^2 + 3.4x^3 + ...$$

2914. Comprobar que la sene

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

satisface a la ecuación

$$y^{\nu} = y$$

2915. Comprobar que la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

catisface a la ecuación

$$xy' + y' - y = 0$$

Determinar el radio y el circujo de convergencia de las series de potencias en el campo complejo $(z \rightarrow x + iy)$

2916.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(s-1-n)^n}{n \cdot 2^n}$$

2915.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}, \qquad \qquad 2917. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1,(n+2))}.$$

2918.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot e^n}{(1+i)(1+2i) \dots (1+ii)}.$$

2919.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n+\ell}}$$

2919.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{n+2r}}, \qquad 2920. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-e^{iz})^n}{n(1-e^{iz})^n}.$$

2921. Aphcando la fórmula de Newton, calcular aproximadamente 1/9 y acotar el error que se obtiene al tomar tres términos del desarrollo.

2922. Calcular aproximadamente

a) arctg 1,2; b)
$$\sqrt[4]{1000}$$
; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) $\ln 1,25$

y acotar los errores correspondientes.

Aplicando los desarrollos correspondientes, calcular con la precisión indicada los valores signientes de las funciones

2923. sen 18° con exactitud hasta 10°5

2924. cos 1° con exactitud hasta 10-6.

2925. tg 9° con exactitud hasta 10-3.

2926. e con exactitud hasta 10-6.

2927. In 1.2 con exactitud hasta 10-4

2928. Apl.cando la igualdad

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2},$$

hadar el número π con exactitud hasta 10^{-4} .

2929. Aplicando la identidad

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3},$$

calcular el número # con exactitud hasta 0,001.

2930 Aplicando la identidad

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arcig} \frac{1}{5} - \operatorname{arcig} \frac{1}{239},$$

calcular in 2 y in 3 con exactitud hasta 10 9

2931. Aplicando la fórmula

$$\ln (n+1) = \ln n + 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \dots \right],$$

calcular in 2 y in 3 con exactitud hasta 10°5.

2932 Sirviéndose de los desarrollos de las funciones subintegrales en sene, calcular con exactitud hasta 0,001 las siguientes integrales

$$a) \int_{0}^{1} e^{-\kappa^{2}} dx;$$

$$g) \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^{2}};$$

b)
$$\int\limits_{2}^{6}e^{\frac{t}{x}}\,dx;$$

$$h)\int\limits_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^{4}}},$$

c)
$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx;$$

1)
$$\int_{10}^{100} \frac{\ln (1+\lambda)}{4} dx;$$

$$d, \int_{0}^{1} \cos x^{2} dx;$$

$$1) \int_{0}^{x} \frac{a \cot g x}{x} dx;$$

e)
$$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$k) \int_{0}^{x} \frac{dx \sin x}{x} dx;$$

$$f) \int_{1}^{+\infty} \frac{dz}{1+x^2}$$

$$i) \int_{-\infty}^{2} x^{n} dx,$$

2933. Hallar con exactitud hasta 0,01 la longitud del arco de uni semionda de la sinusoide

$$y = \sin x \qquad (0 \leqslant_i x \leqslant_i a).$$

2934. Hallar con exactitud hasta 0.01 la longitud del arco de la el.pse de semiejes a=1 y $b=\frac{1}{2}$.

2935. Un cable, suspendido de dos postes, que están a la distancia de 2l = 20 m, tiene la forma de una parábola. Calcular con exactitud hasta 1 cm la longitud del cable si la sagita de la flexion es igual a h = 40 cm

§ 6. Series de Fourier

1.* Teorema del desarrollo. Si una función f(x) es continua a trozos tiene derivada continua a trozos f'(x) en el intervalo (-1, 1), siendo regulares todos sus puntos de discontinuidad (o sea, $f(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi - 0) + f(\xi + 0)])$, entonces, esta función puede expresarse en este intervalo por la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{t} + b_n \sin \frac{n\pi x}{t} \right), \tag{1}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{t} \int_{-t}^{t} f(x) \cos \frac{n\pi x}{t} dx$$
 $(n = 0, 1, 2, ...)$ (2)

У

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$
 $(n = 1, 2, ...).$ (2)

En particular:

a) si la función f(x) es par, se tiene

$$I(x) = \frac{a_s}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$
 (3)

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$
 $(n = 0, 1, 2, ...),$

b) si la función f(x) es impar, se tiene

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{5}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz$$
 $(n-1, 2, ...)$

Una función f(x), definida en el intervalo (0, l) y que posee en el musmo las propiedades expuestas anteriormente de continuidad, puede expresarse en este intervalo tanto por la fórmula (3) como por la fórmula (3)

2.° Condición de complitud. Para toda función f(x), integrable en el intervalo junto con su cuadrado, la serie (1) construida formalmente con los coeficientes (2), (2'), satisface a la igualdad de Liapunov*)

$$\frac{a_n^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n+1}^2\,b_n^2\right)=\frac{1}{l!}\int_{l}^{l}f^2\left(x\right)\,dx,$$

3.º Integración de las series de Fourier. La serie de Fourier (1), incluso si es divergente, de una función f(x) que es integrable según Riemann en el intervalo (-1, 1), puede integrarse término a término en este intervalo.

Problemas:

2936. Desarrollar la función

$$f(x) := s_i n^i x$$

en serie de Fourier

2937. ¿Cuál será la serie de Founer para un polinomio ingonométrico

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)?$$

2938. Desarrollar en sene de Fourier la función

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Dibujar la gráfica de la función y las gráficas de unas cuantas sumas parciales de la sene de Fourier de esta función.

Aplicando el desarrollo, hallar la suma de la serie de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Desarrollar las siguientes funciones en serie de Fourier en los intervalos indicados:

2939.
$$f(x) = \begin{cases} A_1 & \text{si } 0 < x < \xi_1 \\ 0_1 & \text{si } 1 < x < 2\xi_1 \end{cases}$$

donde A es una constante, en el intervalo (0, 2/)

2940.
$$f(x) = x$$
 en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2941.
$$f(x) = \frac{x - x}{2}$$
 en el intervalo (0, 2π).

2942.
$$f(x) = |x|$$
 an el intervalo $(-\pi, \pi)$

2943.
$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{si} & -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{si} & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

Jonde a y b son constantes, en el intervalo ($-\pi$, π)

2944.
$$f(x) = \pi^2 - x^2$$
 en el intervalo $(-\pi, \pi)$

2945.
$$f(x) = \cos ax$$
 en el intervalo $(-\pi, \pi)(a \text{ no es entero})$.

2946.
$$f(x) = \sin ax$$
 en el intervalo $(-\pi, \pi)$ (a no es entero)

2947.
$$f(x) = \sinh ax$$
 en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2948.
$$f(x) = e^{ax}$$
 en el intervalo $(-h, h)$.

2949.
$$f(x) = x$$
 en el intervalo $(a, a + 2l)$

2950.
$$f(x) = \sin x$$
 en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2951.
$$f(x) = x \cos x$$
 en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Desarrollar en serie de Fourier las siguientes funciones periódicas

2952.
$$f(x) = sgn(cos x)$$
.

2953.
$$f(x) = \arccos (\sin x)$$
.

2954.
$$f(x) = \arcsin(\cos x)$$
.

2955.
$$f(x) = x - [x]$$
.

2956. f(x) = (x) que es la distancia de x hasta el número entero más próximo.

2957.
$$f(x) = \sin x$$
.

2958.
$$f(x) = \cos x$$
.

2959.
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{\sin nx}{\sin x}$$
 ([a]<1).

2960. Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x) = \sec x \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

Indicación. Deducir una relación entre los coeficientes a_n y a_{n-2}

2961. Desarrollar la función $f(x) = x^2$ en serie de Fourier: a) de cosenos de arcos múltiples, b) de senos de arcos múltiples, c) en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Dibujar la gráfica de la función y las gráficas de las sumas de las series de Fourier para los casos a), b) y c).

^{*)} Conocida frecuentemente como igualdad de Parseval. (N. del T.).

Aplicando estos desarrollos, hallar las sumas de las series.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Basándose en el desarrollo

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < x),$$

obtener por integración término a término los desarrollos en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi,\pi)$ de las funciones x^3 , x^3 y x^4

2963. Escribir la igualdad de Liapunov para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| < \alpha; \\ 0 & \text{para } \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Basándose en la igualdad de Liapunov, hallar las sumas de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2} n\alpha}{n^{2}} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^{2} n\alpha}{n^{2}}.$$

2964. Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{st} & 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{st} & 1 < x < 2; \\ 3 - x, & \text{st} & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Sirviéndose de las formulas

$$\cos \pi = \frac{1}{2} \langle t + \tilde{t} \rangle$$
, $\sin \pi = \frac{1}{2l} \langle t - t \rangle$

donde $t = e^{ix}$ y $\overline{t} = e^{-ix}$, obtener el desarrollo en serie de Fourier de la siguientes funciones.

2965. cos^{2 m} x (m es un número entero positivo).

2966.
$$\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$$
 (|q|<1).

2967.
$$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$$
 (191<1).

2968.
$$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} \qquad (|q|<1).$$

2969.
$$\ln (1 - 2q \cos x + q^*)$$
 $(|q| < 1)$.

Desarrollar en serio de Fourier las funciones periodicas no acotadas

2970.
$$f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$$
.

2971.
$$f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|$$
.

2972.
$$f(x) = \ln \left| \lg \frac{x}{2} \right|$$
.

1973. Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x) = \int_{0}^{x} \ln \sqrt{\left| \operatorname{cig} \frac{t}{2} \right|} dt \ (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

2974. Desarrollar en serie de Fourier las funciones

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \le s \le 4a),$$

que dan la expresión paramétrica del contorno del cuadrado 0 < x < d, 0 < y < a donde s es la longitud del arco, tomado desde el punto 0 (0,0), en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj

2975. ¿Como debe prolongarse al intervalo $(-\pi, \pi)$ una función integrable f(x), dada en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, para que su desarrollo en sene de Fourier tenga la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n - 1) x \qquad |-\pi| < x < \pi$$

2976. ¿Cómo debe prolongarse al intervalo $(-\pi,\pi)$ una función integrable f(x), dada en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, para que su desarrollo en serie de Fourier tenga la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1) x \qquad (-\pi < x < \pi)?$$

2977. Desarrollar la función

en el intervalo
$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
;

a) en serie de cosenos de arcos impares; b) en serie de senos de arcos impares.

Dibujar las gráficas de las sumas de las senes de Fourier para los casos a) y b).

2978. La función f(x) es antipenódica de período π , o sea,

$$f(x+\pi) = -f(x)$$

¿Qué particularidad posee la serie de Fourier de esta función en el mitervalo $(-\pi,\pi)^2$

2979 ¿Qué particularidad poses la sense de Fourier de una funcion f(x) en el intervalo $(-\pi, \pi)$, si $f(x + \pi) = f(x)$?

2980. Qué particularidades poseen los coefficientes de Fourier a_n b_n (n=1,2,-) de una función f(x) de período 2π , si la gráfica de la función a) tiene centros de simetría en los puntos (0,0), $(\pm \frac{\pi}{2},0)$, b) tiene un centro de simetría en el origen de coordenadas y los ejes de simetría $x=\pm \frac{\pi}{2}$?

2981. ¿Cómo están ligados entre si los coeficientes de Fourier a_n . b_n y α_n , β_n (n=0,1,2,...) de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, si

$$\varphi(-x) - \psi(x^2)$$

2982. "Cómo están ligados entre sí los coeficientes de Fourier a_n . b_n y α_n , β_n (n=0,1,2,...) de las funciones φ (x) y ψ (x), sí

$$\psi \{ -x, \pm z + \psi_{x}x_{z}\}$$

2983. Conociendo los coeficientes de Fourier a_n , b_n (n=0, 1, 2) de una función integrable f(x), de período 2π , calcular los coeficientes de Fourier a_n , \overline{b}_n (n=0, 1, 2, ...) de la función "desplazada" f(x+h) (h=const).

2984. Conociendo los coeficientes de Fourier a_n , b_n (n=0,1,2,...) de una función integrable f(x), de período 2π , calcular los coeficientes de Fourier A_n , B_n (n=0,1,2,...) de la función de Steklov

$$f_h(x) == \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi^{-1}_{n-1}$$

2985. Sea f(x) una función continua de período 2π y a_n , b_n (n=0, 1, 2), sus coeficientes de Fourier. Determinan los coeficientes de Fourier A_n , B_n (n=0, 1, 2, ...) de la función "convolucionada"

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{x} f(t) f(x+t) dt.$$

Basandose en el resultado obtenido, deducir la igualdad de Liapunov.

§ 7. Sumación de series

1° Sumación inmediata Si

$$u_n = v_{n+1} + v_n$$
 $(n - 1, 2, ...)$ $y = \lim_{n \to \infty} v_n + v_{\infty}$

ce tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_{\infty} - v_1.$$

En particular, si

$$a_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdot a_{n+m}}$$

donde los números a_i $(i=1,\ 2,\ldots)$ forman una progresión antmética con la diferencia d_i se tiene

$$t_n = \frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdot a_{n+m-1}}$$

En algunos casos se consigue expresar la serie dada en forma de una combinación uneal de las series conocidas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \ln 2; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{6}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n^2} \right) = \frac{n^2}{12} \text{ etc.}$$

2° Método de Abel. Si la sene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

En los casos más elementales, la suma de la sene de potencias $\sum_{n=x_0}^{\infty} a_n x^n$ se halla mediante la derivación e mtegración término a término.

3º Sumación de series trigonométricas. Al buscer las sumas de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

éstas se consideran como la parte real y como el coeficiente de la parte imaginaria, respectivamente, de la suma de la sene de potencias en el

campo complejo
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
, donde $z = e^{ix}$

A menudo, suele ser útil la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1 - z}.$$

Problemas.

Hallar las sumas de las senes

2986.
$$\frac{1}{13} + \frac{1}{35} + \frac{1}{57} + \dots$$

2987.
$$\frac{1}{12\cdot 3} + \frac{1}{234} + \frac{1}{345} + \dots$$

2989.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1,(n+2,+n+3))}.$$

2990.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$$
 (m es un número natural)

2991.
$$\frac{1}{1\cdot23} + \frac{1}{3\cdot45} + \frac{1}{5\cdot67} + \dots$$

2992.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$
. 2997. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2993.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n! (n+1)!}$$
 2998.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (n+1)! (n+2)!}$$

2994.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$$
 2999.
$$\sum_{n=n}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$$

2995.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!},$$
 3000.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2},$$

2996.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}$$

3001. Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n,$$

Hallar las sumas de las siguientes series

3002.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{2^n n!} x^n,$$
 3003.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)!} x^n,$$

3004.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^n + 1)}{(2n)!} \, x^{2n}, \qquad 8005. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n \, x^n}{(2n + 1)!} \, .$$

Mediante la derivación término a término, hallar las sumas de las senes:

3006.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$
 3008.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

3007.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n(2n+1)}.$$

3009.
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a(a+a) \cdot [a+(n-1)d]}{d 2d \cdot nd} x^n \qquad (d > 0).$$

Indicación. Multiplicar la derivada de la serie por 1 - x.

3010.
$$\frac{1}{3} \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2}\right)^{4} + \frac{1}{3} \frac{4 \cdot 7}{6} \left(\frac{x}{2}\right)^{4} + \dots$$

Mediante la integración término a término, hallar las sumas de las senes.

3011.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^{n-1}.$$
 3013.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) x^{2n}}{n}.$$

3012.
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) x^n$$
.

Aplicando el método de Abel, hallar las sumas de las siguientes senes

3014.
$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \dots$$
 3016. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$

3015.
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$
 3017. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

Hallar las sumas de las siguientes series tingonométricas:

3018.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$
. 3019. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

3020.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$$
.

3021.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \Big(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Big), \qquad 3024. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

3022.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$
 3025.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

3023.
$$\sum_{n=a}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos rx}{n^2 - 1}, \qquad 3026. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

3027. Construir la curva

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin nx - \sin ng}{n^2} = 0.$$

Hahar las sumas de las signientes series

3028.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-n)^{\frac{n}{2}}}{(2n)^n} (2n)^{2n}, \quad \text{3029.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^{\frac{n}{2}})^n}{(2n)^n} x^n.$$

3031.
$$\frac{a}{a_x+x^{-\frac{1}{4}}}\frac{a}{a_x+x^{-\frac{1}{4}}}\frac{a}{a_x+x^{-\frac{1}{4}}}\cdots$$
 suponendo que $x>0, a_n>0$

$$(n = 1, 2, ...)$$
 y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ es divergente

3032.
$$\frac{x}{1-x^2}$$
: $\frac{x^4}{1-x^4} - \frac{x^4}{1-x^4} + \dots$, sta', $x < 1$; b) $|x| > 1$.

3033.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}, \text{ st a) b) } x < 1, b) x > 1.$$

§ 8. Cálculo de integrales definidas por medio de series

Desarrollando las funciones subintegrales en serie, calcular las siguientes integrales.

3034.
$$\int_{0}^{x} \ln \frac{1}{1-x} dx.$$
 3035.
$$\int_{0}^{x} \frac{\ln (x+y') + x^{2}}{x} dx$$

$$036. \quad \int_{0}^{\ln(1+x)} dx.$$

3037.
$$\int_{0}^{1} x^{p-1} \ln(1-x^{q}) dx \quad (p>0, q>0).$$

3038.
$$\int_{0}^{1} \ln x \cdot \ln (1-x) \, dx.$$

3039.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^{x \cdot x} - 1} .$$
 3040.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^{x} + 1} :$$

3041. Desarrollar en serie de potencias enteras positivas del módulo $k (0 \le k < 1)$ la integral elíptica completa de 1^n especie.

$$F(k) = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{V_{k} - \kappa^{2} \sin^{2} \varphi}$$

3042. Desarrohar en sene de potencias enteras positivas del módulo $k \ (0 \le k < 1)$ la integral elíptica completa de 2^a especie

$$E(h) = \int_{1}^{\frac{\pi}{2}} V 1 - \frac{h^{2} \sin^{2} \varphi}{h^{2} \sin^{2} \varphi} d\varphi.$$

3043. Expresar la longitud del arco de la elipse

$$x = a \cos t, \quad x = b \sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

mediante una serie de potencias enteras positivas de la excentricidad. Demostrar las igualdades

3044.
$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{x^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n}}.$$

3045.
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}} \sin ax \ dx = \frac{1}{2} \sum_{n=20}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n!}{(2n+1)!} a^{n+1}.$$

3046.
$$\int_{0}^{2\pi} e^{\cos x} \cos (\sin x) \cos nx \, dx = \frac{n}{n} \qquad (n = 0 1, 2, ...)$$

Hallar

3047.
$$\int_{0}^{2\pi} e^{\pi \cos x} \cos (a \sin x - nx) dx \quad (n \text{ es un número natural}).$$

3048.
$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin \alpha}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} dx,$$

Indicación. Véase el ejemplo 2864,

3049.
$$\int_{0}^{x} \ln (1 - 2\alpha \cos x - |-\alpha^{2}|) dx.$$

3050. Demostrar la fórmula

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx - \int_{0}^{1} -\frac{11}{a^{2}} + \frac{21}{a^{2}} - \dots$$

$$\frac{1}{1} \cdots \frac{1}{n} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \frac{1}{1} (-1)^n \frac{\theta_{n} n}{a^{n+1}},$$
 (1)

donde a > 0 y $0 < \theta_n < 1$.

"Con qué precisión se expresará la integral

$$\int_{c}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx,$$

si en la fórmula (1) se toman dos términos?

§ 9. Productos infinitos

1.º Convergencia de un producto infinito. Un producto infinito

$$p_1 p_2 \dots p_n \dots = \prod_{n=2}^{\infty} p_n \tag{1}$$

se llama convergente, si existe el límite finito

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n p_i = \lim_{n\to\infty} P_n = P_n^*$$

y es distinto de cero,

Si P=0 y ninguno de los factores p_n es igual a cero, el producto (1) se llanta divergente hacia cero, en caso contrario, el producto se llanta convergente hacia cero.

La convergencia del producto (1) es equivalente a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln p_{n^*} \tag{2}$$

La condición necesaria de convergencia es:

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1$$

Si $p_n=1+\alpha_n$ (n=1, 2,...) y α_n no cambia de signo, para la convergencia del producto (1) es necesario y suficiente que sea convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1). \tag{5}$$

En el caso general, cuando α_n no conserva el signo constante y la sene (3) es convergente, el producto (1) es convergente o divergente hacia cero conjuntamente con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_n - 1)^2.$$

2.º Convergencia absoluta. El producto (1) se llama absolutamente o condicionalmente (no absolutamente) convergente según que sea absolutamente o condicionalmente convergente la serie (2). La condición necesaria y suficiente para la convergencia absoluta del producto (1) es la convergencia absoluta de la serie (3).

3.º Desarrollo de las funciones en productos infinitos. Para $-\infty < x < +\infty$ se verifican los desarrollos

$$\sin x \approx x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 n^2} \right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 n^2} \right].$$

En particular, de la primera, tomando $x = \frac{\pi}{2}$, se obtiene la formula de Wallis.

$$\frac{\tau}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2n-1} \cdot \frac{r_n}{2n+1}.$$

Problemas

Demostrar las siguientes igualdades

3051.
$$\prod_{n=3}^{x} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{2}$$
. 3053. $\prod_{n=3}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}$.

3052.
$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!+1} = \frac{2}{3}.$$
 3054.
$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right] = 2$$

8055.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$$
. 3057. $\prod_{n=1}^{\infty} \cot \frac{x}{2^n} = \frac{s^{n} x}{x}$.

3056.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{5^{n+x}}{x}.$$

3058.
$$\prod_{n=0}^{\infty} 1 + x^{2n} = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1).$$

3059.
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

3060.
$$\prod_{3n=1}^{2n} \frac{3n}{3n+1} = \frac{2n}{3n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

Demostrar la convergencia y determinar los valores de los siguientes productos infinitos

3061.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}.$$

3061.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}.$$
 3063.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+3)}.$$

3062.
$$\prod_{n=1}^{r} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)} \right]$$

3062.
$$\prod_{n=1}^{r} \left[1 + \frac{1}{n \cdot (n+2)} \right].$$
 3064.
$$\prod_{n=1}^{r} a^{-n} = (a > 0)$$

 $_{2}$ 3065. LSe deduce de la convergencia de los productos $\stackrel{\circ}{\Pi}$ p_{n} y $\prod q_n$ la convergencia de los productos

a)
$$\prod_{n=1}^{n} p_n + q_n$$
; b) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$; c) $\prod_{n=1}^{n} p_n q_n - 1$) $\prod_{n=1}^{n} \frac{p_n}{q_n}$?

Avenguar si son convergentes los siguientes productos infinitos

3066.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
.

3069.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

3087.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1/2}{n\sqrt{n+2}}.$$

3070.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^p.$$

3068.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$$
.

3071.
$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{\frac{a_1+a_1+b_1}{a_1+b_1}}{\frac{a_1+a_1+b_1}{a_1+b_1}}, \text{ donde } n^2+an+b>0 \text{ para } n \ge n_0$$

$$8072, \quad \prod_{k=n_0}^{\infty} \frac{(n-b_1)(n-a_2)\dots(n-b_{p^k})}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_p)}, \quad \text{donde} \quad n_0 > b_1 \ (i=1, 2, \dots, r).$$

3073.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$$
. 3074. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

3074.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

3075.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}.$$
 3081.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{2^{n}} \right].$$

$$3081.4 \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right].$$

3076.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^3]{n}.$$

3082.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$$
 $e^{\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}}$.

3077.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$
.

3077.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$
. 3083. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^p}$.

3078.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{c-n}\right) e^{\frac{r}{c}}, \text{ donde } c > 0.$$

3079.
$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda^n)$$

3079.
$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)$$
 3084. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{x}}{x}\right)$.

3080.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^n}{\epsilon^n}\right)$$

3080.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)$$
. 3085. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln n + r} = -\frac{n}{\sqrt{n}}$.

3086. Demostrar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ es convergente si es convergente la serie II x2

3087. Demostrar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} \lg \left(\frac{\pi}{4} + \alpha_n \right) \left(|\alpha_n| < \frac{\pi}{4} \right)$

es convergente si es absolutamente convergente la serie $\sum \alpha_n$

Estudiar la convergencia abscluta y condicional de los siguientes productos infinitos

3088.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right], \qquad 3092. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n},$$

3092.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

3089,
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{V_n}\right]$$
, 3093, $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$,

3093.
$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-n)^n}$$

3090,
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1^{n'+1}}{n^p} \right]$$
. 3094. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{n-1}}^n$.

3094.
$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{n-1}}^n$$

3091.
$$\prod_{n=x}^{\infty} \left[1 - \frac{(-1)^n}{\ln n} \right].$$

3091.
$$\prod_{i=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\ln n}\right].$$
 3095.
$$\prod_{i=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n}\right].$$

3096.
$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \times \times \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$$

8097.
$$\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^6}\right)\left(1+\frac{1}{4^6}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^5}\right)...$$

3098. Comprobar que el producto

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)...$$

es convergente, a pesar de que la serie

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dots$$

es divergente

3099. Comprobar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ donde

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{si } n = 2k - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

es convergente, a pesar de que ambas senes $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ son divergentes.

3100. Sea

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x}}$$

(función Zeta de Riemann) y sea p_n (n=1,2,...) la sucesión de números primos.

Demostrar que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

3101. Demostrar que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\rho_n}\right)^{-1}$$

у la seme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

donde p_n (n-1, 2, ...) es la sucesión de números primos, es divergente (Euler).

3102. Sea
$$a_n > 0 \ (n = 1, 2, ...) \ y$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+1}}\right) \qquad (s > 0).$$

Demostrar que

$$a_n = O^{+}\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right)$$
.

Indicación, Examinar

$$\lim_{n \to \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p a$$

3103. Aplicando la fórmula de Wallis, demostrar que

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4 \cdot 6} \frac{5}{1 \cdot (2n-1)} \sim \frac{1}{\sqrt{nn}}$$

3104. Demostrar que la expresión

$$a_n = \frac{n!e^n}{n+\frac{1}{2}}$$

tiene un límite A, distinto de cero, cuando n > 00.

Deducir de esto la fórmula de Stirling

$$n! := An^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \varepsilon_n),$$

donde $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y $A = \sqrt{2\pi}$.

Indicación. Expresar el límite buscado en forma de un producto infinito

$$A := \lim_{n \to \infty} a_n = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Para determinar la constante A, aplicar la fórmula de Wallis

3105. Según Euler, la función Gamma $\Gamma(x)$ se define por la siguiente fórmula

$$\Gamma(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{n^x n^x}{(x+1) - x + n_x}.$$

Basándose en esta fórmula a) expresar la función $\Gamma(x)$ en forma de un producto infinito; b) comprobar que $\Gamma(x)$ tiene sentido para todos los valores reales de x que no son iguales a un entero negativo, c) deducir la propiedad

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

d) obtener el valor I' (n) para n entero y positivo

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}$$
, $f_m = f(a + i\delta_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{\ell=1}^n (1+\delta_n f_{\ell n}) = e^{\frac{\delta}{n}f(n)dn}.$$

3107. Demostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\prod_{a \to ab}^{n} (a + ab)}{\sum_{b \to b}^{n} (a + b)} = \frac{2}{b},$$

donde a > 0 y b > 0.

3108. Scan $f_n(x)$ (n=1-2, -) functiones Continuas en el intervalo (a, b) y $|f_n(x)| \le c_n (n = 1, 2, ...)$, donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es conver-

Demostrar que la función

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + f_n(x) \right\}$$

es continua en el intervalo (a, b).

3109. Hallar la expresión para la derivada de la función

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + f_n(x) \right]$$

¿Cuáles son las condiciones suficientes para la existencia de F'(x)?

3110. Demostrar que, si 0 < x < y, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x(x+1)...(x+n)}{x(y+1)...(y+n)} = 0$$

§ 10. Fórmula de Stirling

Para calcular n! para valores grandes de n es útil la fórmula de Stirling

$$n! = V \overline{2\pi n} \; n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{2\pi}} \qquad (0 < \theta_n < 1).$$

Problemas.

Aplicando la fórmula de Stirling, calcular aproximadamente

- 3111. lg 100!
- 3112, 1 3.5 ... 1999.
- 3113. 1-3.5.. 10
- 3114. C.00
- 3115. (150)

3116.
$$\int_{0}^{1} (1-x^{2})^{3v} dx.$$

- 3117. $\int_{0}^{2\pi} \sin^{2\phi \phi} x \, dx.$
- 3118. Deducir una fórmula asintótica para el producto

$$(2n-1)^{11} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$$

- 3119. Calcular aproximadamente $C_{2,n}^n$, si n es grande.
- 3120. Aplicando la fórmula de Stirling, hallar los siguientes límires
- a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^n]{n!}$;

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{s/(2n+1)!1}$;

- b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{n}{n}/n!}$; d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$.
- § 11. Aproximación de las funciones continuas mediante polinomios
- 1.º Fórmula de interpolación de Lagrange, El polinomio de Lagrange

$$P_{n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_{0})_{x_{i+1}}(x - x_{i+1})(x - x_{i+1})_{x_{i+1}}(x - x_{n})}{(x_{i} - x_{0})_{x_{i}}(x_{i} - x_{n})(x - x_{i+1})_{x_{i+1}}(x_{i} - x_{n})} y_{i}$$

posee la propiedad $P_n(x_t) = v_t (i = 0, 1, ..., n)$.

2.º Polmomios de Bernstéin. Si f(x) es una función continua en el segmento [0, 1], los polinomios de Bernstéin

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n I\left(\frac{x}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-1}$$

convergen uniformemente hacia la función f(x) en el segmento [0, 1]. cuando $n \longrightarrow \infty$.

3121 Construir el polincimio P_n (x), de graco minimo n, que iome el sistema dado de valores

x -2	0	4	ь
y 5	Т	-3	ı

¿A qué son aproximadamente iguales

$$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)$$
?

3122. Escribir la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$ que para por los tres puntos: $x_0=1, y_0=1, x_1=25, y_1=5, x_2=100, y_2=0$

3123. Deducir la formula para la extracción aproximada de ra es $y = \sqrt{x}$ ($x \le x \le .00$), aprovechando los valores $x_0 = 1$, $x_$

3124 Deducir una fórmu a de aproximación de la forma

$$\sin x^0 \approx ax + bx^*$$
 $(0 \le x \le 90)$,

utilizando los valores

$$\sin 0^{\circ} = 0$$
, $\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$, $\sin 90^{\circ} = 1$.

Aplicando esta fórmula, calcular aproximadamente:

3125 Construct el polinomio de interpolación de Lagrange para la función f(x) = |x| en el segmento [-1, 1], tomando por nodos los puntos $x = 0, +\frac{1}{2} + 1$

3126 Sustituyendo la funcion y (x) per el polinomio de Lagrange ca cular aproximadamente

$$\int_{0}^{1}y\left(x\right) dx,\qquad ,$$

donde

ž	n	0,5	L	1,5	2
y (#)	5	4,5	3	2,5	5

3127. Formar los polinomios de Bernstéin $B_n(x)$ para las funciones x, x^2, x^3 en el segmento [0, 1].

3128 Escribar la fórmula de los polinomios de Bernstein $B_n(x)$ para una función f(x), dada en el segmento $\{a,b\}$

3129. Aproximar la función $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$ en el segmento [-1, 1] mediante el polinomio de Bernstéin $B_4(x)$

Construir las gráficas de las funciones $y = \frac{|x| + x}{2}$ e $y = B_4(x)$

3130. Aproximar la función f(x) = |x| para $-1 \le x \le mediante los polinomios de Bernstéin de orden par$

3131. Escribir el polinomio de Bernstéin B_n (x) para la función

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \le x \le b.$$

3132. Calcular el polinomio $B_n(x)$ para la función $f(x) = \cos x$ en el segmento $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

3133 Demostrar que $x = \lim_{n \to \infty} P_n(x_n, en el segmento [-1, 1],$ donde

$$P_n(x) = -\frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1-3}{2\cdot 4 \cdot i} \frac{(2i-2)}{(2i)} (1-x^2)$$

3133.1. Sea $f(x) \in C[a, b]$ y

$$M_k = \int_a^b x^k f(x) dx = 0$$
 $(k = 0, 1, 2, ...,).$

Demostrar que f(x) = 0 para $x \in [a, b]$.

Indicación Aplicar e, teorema de Weierstrass sobre la aproximación de una función continua mediante polinomios.

3134. Sea f(x) and función continua y penodica de período 2π y sean a_n , b_n (n=0, -, 2, -) sus coeficientes de Fourier Demostrar que los polinomios trigonométricos de Fejér

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

convergen uniformemente hacia la función f(x) en el segmento $[-\pi, \pi]$.

3135. Construir el poli...omio de Fejér a_{2n+1} (v) para la funcion

$$f(x) = |x| \quad \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Capitule 6 CALCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

§ 1, Límite de una función. Continuidad

1° Limite de una funcion. Sea $f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función definida en un conjunto E que tiene un punto de acumulación P_0 . Se dice que

$$\lim_{P \to P_n} J(P) = A$$

si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta$ $(\varepsilon, P_0) > 0$ tal que

$$f(P) - A < \epsilon$$
.

siempre que $P \in E$ y $0 < \rho$ $(P, P_0) < \delta$, donde ρ (P, P_0) es la distancia entre los puntos $P \setminus P_0$

2° Continuidad. Una función f(P) se Lama continua en el punto P_0 ,

$$\lim_{P \to P_0} I(P_0) = I(P_0)$$

Una función f(P) es continua en un recinto dado, si es continua en cada punto de este recinto

3.° Continuidad uniforme. Una función f(P) se llama uniformemente continua en un recinto G, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que depende solamente de ε , tal que, para cualesquiera puntos P' y P'' de G, se venfica la desiguadad

$$||f(P') - f(P'')|| < \varepsilon$$

stempre que sea

$$\varrho\left(P',\ P''\right)<\delta.$$

Una función que es continua en un recinto cerrado y acotado, es uniformemente continua en este recinto.

Problemas:

Determinar y representar los campos de existencia de las siguientes funciones.

$$3136 \quad u = x + V \overline{y}.$$

$$3138 \quad u = 1 \cdot \overline{1} \quad x^{2} \quad y^{2}.$$

$$3139, \quad u = \frac{1}{1} \quad x^{2} + y^{3} - \overline{1}.$$

$$3140$$
 $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$

314)
$$u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y}}$$
 3146 $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin (1 - y)$,

$$\frac{3142}{5142} = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$$
, $\frac{3147}{1147} = \sqrt{\sin(x^1 + y^2)}$.

Set 3.
$$u = v \sin(x^2 + y^2)$$
.

3148 $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + u^2}}$.

3144,
$$u = a \cos \frac{u}{x}$$

3149 $u = \ln(ryz)$
3.45, $u = a \cos \frac{x}{x}$
3150 $u = \ln(-1 - x^2)$

3.45,
$$u = ar_{x} \cos \frac{x}{x^{\frac{2}{3}} u}$$
 3150 $u = \ln(-1 - x^{2} - y^{2} + z)$

Construir as ineas de n vel de las siguientes funciones

$$\begin{array}{lll}
3159 & z = x + |y| - |x + y| \\
3159 & z = x^2 + |y| - |x + y| \\
3153) & z = x^2 + |y| & 3159.1, z = \min(x, y), \\
3154, z = x - y^2, & 3159.2, z = \min(x^2, y), \\
3159.3, z = \min(x^2, y), & 3.59.3, z = \min(x^2, y).
\end{array}$$

$$3153)z = x^2 - y^3$$
 $3159.2.2 = max(x), |y|).$

3.59 3
$$z = x - y^2$$
, 3.59 3 $z = \min(x^2, y)$.

$$3155e \ z = \frac{\pi}{r}$$

$$3160 \ z = e^{\frac{2\pi}{r}}$$

3156
$$z = x^{y} + zy^{z}$$
. 3161 $z = x^{y} + (x > 0)$

$$3162 \ z = x^{y}e^{-x} \ (x > 0).$$

$$3163 \ z = 0.3 / \frac{x - q \cdot y + q^{z}}{x - q \cdot y + q^{z}}.$$

3158
$$z = \{x = y\}$$
 3163 $z = 0$ $\sqrt{\frac{z - ay^2 + y^2}{(z + ay^2 + y^2)}}$ $(a > 0)$.

3164
$$z = a \log_{-x^{2} + a} \frac{2au}{x^{2} + a^{2}} \sqrt{a} > 2i$$
.

3165.
$$z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$$
.

Hallar las superficies de nivel de las siguientes funciones: /

3168
$$u = x^3 + y^2 - x^3$$
.

3167
$$a - x^2 - y^2 + z^2$$

$$3169 = x + y)^3 + z^2$$

Avenguar el caracter de la superficie por su ecuación

3171.
$$z = f(y - ax)$$
.

3173.
$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$
.

3172,
$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$
.

$$3174 = f\left(\frac{g}{x}\right).$$

3175. Construir la gráfica de la función

$$F(t) = f(\cos t, \sin t).$$

donde

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \ge x, \\ 0, & \text{si } y < x. \end{cases}$$

3176 Haller
$$f(1, \frac{y}{x})$$
 si $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

3177. Hallar f(x), si

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^0 + y^2}}{x} \quad (x > 0).$$

3178. Sea

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$$

Determinant las funciones f(y)z, si z - x para y = 1

3179 Sea

$$z = x + y + f(x - y).$$

Hallar las funciones f y z, si $z = x^2$ para y = 0.

3180 Hallar
$$f(x, y)$$
, si $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$.

3181 Demostrar que, para la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

se tiene

$$\lim_{x\to 0} \{\lim_{y\to 0} f(x, y)\} = 1; \quad \lim_{y\to 0} \{\lim_{x\to 0} f(x, y)\} = -1,$$

mientras que lim f(x, y) no existe.

3182. Demostrar que, para la función

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

se Lene

$$\lim_{x \to 0} \left\{ \lim_{y \to 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \to 0} \left\{ \lim_{x \to 0} f(x, y) \right\} = 0,$$

a pesar de que $\lim f(x, y)$ no existe.

3183. Demostrar que, para la función

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

ambos limites
$$\lim_{x\to 0} \{ \lim_{y\to 0} f(x, y) \}$$
 y $\lim_{y\to 0} \{ \lim_{x\to 0} f(x, y) \}$

no existen, a pesar de que existe lam f(x, y) = 0.

3183.1. Existe el límite

$$\lim_{\substack{\kappa \to 0 \\ \lambda \to 0}} \frac{2\kappa y}{x^2 + y^2}$$
?

3183.2. A qué es igual el límite de la función

$$f(x, y) = x^3 e^{-(x^3-y)}$$

a lo largo de cualquier rayo

$$x = t \cos \alpha$$
, $y = t \sin \alpha$ $(0 \le t < +\infty)$

cuando $t \rightarrow + \infty$?

, Se pued. llamar a esta funcion infinitesima cuando a + ∞ e

3184, Hallar

$$\lim_{x\to a} \{\lim_{y\to b} f(x, y)\} \ y \ \lim_{y\to b} \{\lim_{x\to a} f(x, y)\},$$

a)
$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$
, $a = \infty$, $b = \infty$

b)
$$f(x, y) = \frac{x^y}{1 - x^y}$$
, $a = \infty$, $b = -\infty$;

c)
$$f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}$$
, $a = \infty$, $b = \infty$

d.
$$f(x, y) = \frac{1}{xu} tg \int_{1-xu}^{xv} a = 0, b = \infty;$$

e)
$$f(x y) = \log_x (x + y)$$
, $a = 1$, $b = 0$,

Hallar os siguientes límites dobles

3185.
$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$$
. 3187. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{x}$.

3186.
$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ y \to \infty}} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^4}$$

3186.
$$\lim_{\substack{y \to +\infty \\ y \to \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$$
. 3188. $\lim_{\substack{y \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^4 + y^2) e^{-(x+y)}$.

3189.
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

3189.
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}, \qquad 3191. \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to x}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x^2} + y}.$$
3190.
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to x}} (x^2 + y^2)^{x^2y^2}, \qquad 3192. \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to x}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3190.
$$\lim_{x \to 0} (x^x + y^x)^{x^2y^2}$$

3192.
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^x + y^x}}$$
.

3193. ¿Sobre qué direcciones p existe el limite finito

a)
$$\lim_{n \to +0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$
;

a)
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$
; b) $\lim_{n\to+\infty} e^{x^2-y^2} \cdot \sin 2xy$,

 $g = x = g \cos \varphi$, $y = g \sin \varphi$?

Hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones

(3194)
$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
.
(8195) $u = \frac{x}{x + y}$.
(3196) $u = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$.

(3194)
$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
.
(8195) $u = \frac{x}{x + y}$
(8196) $u = \frac{x}{x + y}$
(3196) $u = \frac{x}{x + y}$
(3196) $u = \frac{1}{xy^2}$.

3197).
$$a = s \pi \frac{1}{xy}$$

3201)
$$u = \ln \frac{1}{1 (a - a)^2 + g - 5)^2 + a - c_1^2}$$

3202. Comprobar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^4}, & \text{sf} \quad x^4 + y^4 \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad x^3 + y^2 = 0. \end{cases}$$

es continua respecto de cada variable x e y por separado (para un valor fijado de la otra vanable), pero no es continua respecto del conjurto de estas variables.

3203. Comprobar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{si } x^1 + y^2 = 0, \end{cases}$$

es continua en el punto 0 (0, 0) a lo largo de cada rayo

$$x=t\cos\alpha$$
, $y=t\sin\alpha$ $(0 \le t < +\infty)$,

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha) - f(0,\ 0);$$

sin embargo, esta función no es continua en el punto (0,0)

3203.1. Estudiar la continuidad uniforme de la función lineal

$$u = 2x - 3y + 5$$

en el plano infinito $E^* = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}.$

3203.2. Estudiar la continuidad uniforme de la función

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$
.

en el plano $E^2 = \{x \mid < +\infty, |y| < +\infty\}$

3203.3. ¿Es uniformemente continua la función

$$f(x, y) \Longrightarrow \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$$

en el recinto $x^2 + y^2 < 1$?

3203 4 ¿Es continua la función

$$u == arcs \pi \frac{x}{\pi}$$
.

en su campo de definición E?

¿Será esta función uniformemente continua en el recinto E?

3204. Comprobar que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función f(x, y) = x sen $\frac{1}{y}$, si $y \neq 0$ y f(x, 0) = 0, no es cerrado.

3205. Demostrar que, si la función f(x, y) es continua respecto de la variable x en un recinto G y es continua respecto de y uniformementa respecto de x en G, entonces esta función es continua en el recinto considerado.

3206. Demostrar que, si en un recinto G la función f(x, y) es continua respecto de la variable x y satisface a la condición de Lipschitz respecto de la variable y, o sea,

$$|f(x,y')-f(x,y')|\!<\! L|y'-y'|,$$

donde $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ y Les una constante, entonces esta funcion es continua en el recinto dado

3207. Demostrar que, si la función f(x, y) es continua respecto de cada variable $x \in y$ por separado y es monótona respecto de una de ellas entonces esta función es continua respecto del conjunto de las vanables (teorema de Young).

3208. Supongamos que la función f(x, y) es continua en el recento $a \le x \le A$, $b \le y \le B$, y que la sucesión de las funciones $\varphi_n(x)$ (n = .2, ...) es uniformemente convergente en $[a \ A]$ y cumple la condición $b \le \varphi_n(x) \le B$. Demostrar que la sucesión de funciones

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

también es uniformemente convergente en [a, A]

3209. Supongamos que: 1) la función f(x, y) es continua en el recinto R ($a \le x \le A, b \le y \le B$), 2) la función $\phi(x)$ es continua en el intervalo (a, A) y toma valores que pertenecen al intervalo (b, B). Demostrar que la función

$$F(x) := f(x, \varphi(x))$$

ದ continua en el intervalo (a, A).

3210 Supongamos que 1) la función f(x, y) es continua en el recinto R ($a \le x \le A$, $b \le y \le B$), 2) las funciones $x = \varphi(u, v)$ e $y = \psi(u, v)$ son continuas en el recinto $R'(a' \le u \le A', b' \le v \le B')$ y toman valores pertenecientes a os intervalos (a, A) y (b, B), respectivamente. Demostrar que la función

$$f(u, v) \Longrightarrow f(\phi(u, v), \psi(u, v))$$

es continua en el recinto R'

§ 2. Derivadas parciales. Diferencial de una función

1.º Derivadas parciales. El resultado de la derivación parcial de una función de vanas variables no depende del orden de derivación, si todas las derivadas que figuran en el cálculo son continuas.

2.º Diferencial de una función Si el incremento total de una función f(x, y, z), de las variables independientes x, y, z, puede expresarse en la forma

$$\Delta I(x, y, z) = A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + o(0)$$

donde A, B, C no dependen de Δx , Δy , Δz y $q = V(\Delta z)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. In función f(x, y, z) se llama diferenciable en el punto (x, y, z) y la parte lineal del incremento $A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z$, igual a

$$dt (x, y, z) = f'_x (x, y, z) dx + f'_y (x, y, z) dy + f'_z (x, y, z) dz, \qquad (1)$$

donde $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, se llama diferencial de esta función La formula (1) conserva su valor también en el caso en que las variables x, y, z son funciones diferenciables de otras variables independientes.

Si $\lambda \to z$ son variables independientes, entonces para las diferencia es de orden superior se verifica la formula simbólica

$$d^{n}l\left(\mathbf{x},\,y,\,z\right) = \left(d\mathbf{x}\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y} + dz\,\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n}f\left(\mathbf{x},\,y,\,z\right).$$

3.° Derivada de una función compuesta. Si w=f(x,y;z) Jonde $\kappa=\phi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v)$ y las funciones $f,\ \varphi,\ \psi,\ \chi$ son diferenciales, se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Para calcular las derivadas de segundo orden de la función w es conveniente utilizar las fórmulas simbólicas:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \omega^2} = \left(P, \frac{\partial}{\partial x} + Q, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{R_1} \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \omega + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{1}{x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$= \left(P, \frac{\partial}{\partial x} + Q, \frac{\partial}{\partial y} + R, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(P, \frac{\partial}{\partial x} + Q, \frac{\partial}{\partial y} + R, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\begin{split} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z} &= \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \\ &+ \frac{\partial P}{\partial v} \left(\frac{\omega}{z} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) \end{split}$$

donde

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial a}$$
 $Q_1 = \frac{\partial y}{\partial a}$ $\varphi_1 = \frac{\partial y}{\partial a}$

У

$$P_{z} = \frac{\partial x}{\partial z} \qquad Q_{z} = \frac{\partial y}{\partial z}, \quad P_{z} = \frac{\partial y}{\partial z}$$

4.º Derivada en una dirección dada. Si la dirección l en el espacio Oxvz se caracteriza por los cosenos directores v cos o, cos β , cos γ v la función u = f(x, v, z) es diferenciable, la denvada según la dirección l se calcula por la formula

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

La velocidad del crecimiento máximo de la función en un punto dade se determina, en su valor absoluto así como su dirección por el vector denominado gradiente de la función.

grad
$$u = \frac{\partial u}{\partial x}I + \frac{\partial u}{\partial u}J + \frac{\partial u}{\partial z}h$$
,

cuya magnitud es igual a

| grad
$$u$$
 | = $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

Problemas 3211 Comprobar que

$$f'_x(x,b) = \frac{d}{dx}[f(x,b)].$$

(3212.) Hallar f'_x (x, 1), si

$$f(x, y) = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3212) Hallar f_x^* (0, 0) y f_y^* (0, 0),

51

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$$
.

Es esta función diferenciable en el punto 0 (0-0)?

3212.2. Es diferenciable la función $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ en el punto $0(0, 0)^2$

3212.3. Avenguar si es diferenciable en el punto 0 (0, 0) la función

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$$
 is $x^2 + y^2 > 0$

y f(0, 0) = 0.

Hallar las derivadas parciales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones.—

3213.
$$u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$$
.

3221.
$$u := \ln(x + y^3)$$
.

$$3214$$
, $u = xy + \frac{x}{y}$.

3222.
$$u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$
.

3215.
$$z = \frac{z}{z^2}$$
.

3223.
$$u = arctg \frac{x+y}{1-xy}$$

3216.
$$u = \frac{x}{1 + x^2 + u^2}$$
.

3224.
$$u = \arcsin \frac{x}{1 + \frac{1}{x^2 + x^2}}$$

(3217),
$$u = x \sin (x + y)$$
.

3225.
$$u = \frac{1}{V_{-1}^2 + y^2 + z^2}$$

3218.
$$u = \frac{\cos x^2}{y}$$
.

3226.
$$a = \left(\frac{z}{\bar{y}}\right)^{z}$$
.

3219.
$$u = \lg \frac{x^n}{a}$$

3227.
$$u = x^{\frac{1}{2}}$$
.

3220.
$$a = 1^y$$

3228.
$$\mu = p^{*}$$

3229 Comprobar la igualdad

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

si

a)
$$u = x^2 = 2xy = 3y^2$$
; b) $u = xy^2$; c) $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$.

$$f_{xy}^{*}(0,0) \neq f_{yx}^{*}(0,0).$$

3230 1. "Existe f" (0, 0), si

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{c_{xy}}{x^2 + y^2} & \text{st} & x^4 - y^4 > 0; \\ 0 & \text{st} & x - y = 0 \end{cases}$$

3231 Sea u = f(x, y, z) una función homogenea de grado n. Comprobar el teorema de Euler de las funciones homogéneas en los siguientes ejemplos

a)
$$u = (x - 2y + 3z)^{\frac{y}{2}}$$
; b) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, c) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{y}}$.

3232 Demostrar que, si una función diferenciable u = f(x, y, z) sa fisface a la ecuación

$$z \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = n\mu,$$

entonces esta es una función homogénea de grado n.

Indicación Examinar la función auxiliar

$$F\left(f\right) =\frac{f\left(tx,\,ty,\,tz\right) }{t^{n}}\,.$$

3233. Demostrar que, si f(x, y, z) es una función diferenciable homogénea de grado n, sus derivadas parciales $f_x'(x, y, z)$, $f_y'(x, y, z)$, f_z (x y, z) son funciones homogéneas de grado n-1

3234. Sea u = f(x, y, z) una función homogénea de grado n, dos veces diferenciable. Demostrar que

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x}u=n,n-1)u.$$

Hallar las diferenciales de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones (x, y, z son variables independientes)

3235.
$$a = x^m y^n$$
.

3239. a == \$\frac{1}{2}\frac{1}{2}.

3236.
$$\mu = \frac{\chi}{\mu}$$
.

8240. u = xy + yz + zx.

3237.
$$u = \sqrt{x^2 + y^4}$$
.
3238. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

3241.
$$u = \frac{3}{x^2 + y^2}$$

3247 Haliar
$$df(1, 1, 1)$$
 y $d^2f(1, 1, 1)$, si

$$f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{x}{x}}.$$

2 DERIVADAS PARCIALES. DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

3243. Comprobar que, si

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

we there $d^2u \ge 0$.

3244. Suponiendo que x, y son pequeños en valor absoluto, deducir unas formulas de aproximación para las siguientes expresiones

- a) $(1+x)^m (1+y)^n$;
- b) $\ln (1 + x) \cdot \ln (1 + y)$;
- c) arctg x + y

3245 Sustituyendo el incremento de la función por la diferencial calcular aproximadamente

- a 1,002.2,0032.3,0042;
- c) $V_{1,02^3+1,97^3}$;
- b) $\frac{1.03^{\circ}}{\sqrt[3]{0.98 \cdot \sqrt[4]{1.05^{\circ}}}}$ d) $\sin 29^{\circ} \cdot \text{tg } 46^{\circ}$; e) $0.97^{\pm .05}$,

3246. ¿Cuánto variará la diagonal y el área de un rectángulo de lados x = 6 m e y = 8 m, si el primer lado se aumenta en 2 mm y el segundo se disminuve en 5 mm?

3247. El ángulo central de un sector $\alpha = 60^{\circ}$ aumentó $\Delta \alpha = 1^{\circ}$ Cuanto hay que disminuir el radio del sector R = 20 cm, para que su área no varie?

3248. Demostrar que el error relativo del producto es aproximadamente igual a la suma de los errores relativos de los factores.

3249. Al medir el radio R de la base v la altura H de un cilindro se obtuvieron los siguientes resultados.

$$R = 2.5 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}; \qquad H = 4.0 \text{ m} \pm 0.2 \text{ m}$$

$$H = 4.0 \text{ m} \pm 0.2 \text{ m}$$

Con qué error absoluto A y error relativo \(\delta \) se puede calcular el volumen del calindro?

3250. Los lados de un triángulo son: $a = 200 \text{ m} \pm 2 \text{ m}, b = 300 \text{ m} \pm 2 \text{ m}$ ± 5 m, y el ángulo formado por elos es C = 60° ± 1°. Con qué error absoluto puede calcularse el tercer lado e del triángulo?

3251. Comprobar que la función

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

es continua en el punto (0, 0) y tiene en este punto ambas derivadas parciales $f_x'(0, 0)$ y $f_y'(0, 0)$, sin embargo, no es diferenciable en el punto (0, 0).

Estudiar el comportamiento de las denvadas $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0).

3252. Comprobar que la función

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0,$$

es continua y tiene derivadas parciales acotadas $f_{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}_{+})$ y $f_{\mathbf{y}}'(\mathbf{x}_{+})$ en un entorno del punto (0, 0) sin embargo esta funcion no es diferencable en el punto (0, 0)

3253. Comprobar que la funcion

$$f(x, y) = (x^3 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^3}, \quad \text{si} \quad x^3 + y^3 \neq 0$$

 $\bullet f(0, 0) = 0.$

tiene derivadas parciales $f_x'(x, y)$ y $f_y'(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0). las quales son discontinuas en este punto y no están acotadas en cualquier entorno del mismo a pesar de esto, la función es diferencia ble en el punto (0, 0)

3254. Demostrar que una función f(x, y) que tiene derivadas parcisles acotadas $f_x'(x, y)$ y $f_y'(x, y)$ en un recinto convexo E_x es uniformemente continua en este recinto.

3255. Demostrar que, si una función f(x, y) es continua respecto de la variable x para cada valor fijado de y, y tiene derivada acotada f_{v}^{\prime} (v-v) respecto de la vanable y, entonces esta funcion es continua respecto del conjunto de las variables x e y.

Hallar las derivadas parciales indicadas en los signientes ejercicios

3256.
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$
, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^1 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$,

$$u = x - y + x^{2} + 2xy + y^{2} + x^{3} - 3x^{2}y - y^{3} + x^{4} - 4x^{2}y^{2} + y^{4}.$$

3257.
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$$
, $\sin u = x \ln(xy)$

3258.
$$\frac{\partial^{9} u}{\partial x^{3} \partial y^{4}}$$
. Si $u = x^{4} \sin y + y^{4} \sin x$.

3259.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z}$$
, si $u = \operatorname{arctg} \frac{x + y + z - x y z}{1 - x y - x z - \mu z}$.

3260.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial u \partial z}$$
, Si $u = e^{xyz}$.

3261.
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$$
, si $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^3 + (u-\eta)^3}}$.

3262.
$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$$
, si $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$.

3263.
$$\frac{\partial^{m+\sigma_u}}{\partial x^m \partial y^n}$$
, $\sin u = \frac{x+y}{x-y}$.

3264.
$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$$
, SI $u = (x^3 + y^3) e^{x+y}$.

3265.
$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial u^p\partial z^p}, \qquad \text{si } u = xyze^{x+y+z}.$$

3266. Hallar
$$f_{x_0,y_0}^{m,+,n}(0, 0)$$
, si $f(x, y) = e^x \sin y$.

$$u := f(xyz),$$

se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial u \, \partial z} := F(t),$$

donde t = xyz, y hallar la función F

3268. Hallat
$$d^4u$$
, si $u = x^4 - 2x^3y - 2xy^2 + x^4 + x^4 - 3x^3y - 3xy^2 + y^4 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$

$$_{\nu}$$
A qué son iguales las derivadas $\frac{d^{4}u}{d^{-1}}$, $\frac{\partial^{4}u}{\partial x^{2}}$, $\frac{\partial^{4}u}{\partial x^{2}\partial y^{2}}$, $\frac{d^{4}u}{\partial x\partial y^{3}}$ y $\frac{d^{4}u}{\partial y^{2}}$

Hallar las diferencia/es totales del orden indicado en los siguientes ejercicios

3269.
$$d^3u$$
, $s_1 \quad u = x^3 + y^3 + 3xy \quad (x - y)$.
3270. d^3u , $s_2 \quad u = s_{10} \quad x^2 + y^3$.

3270.
$$d^3u$$
, $s_1 u = \sin v^2 + v^3$

3271.
$$d^{10}u$$
 5. $u = 10 \times -11$

$$5272. \ d^3u, \qquad 5. \ u = \cos x \cosh y.$$

3273.
$$d^3a$$
, Si $b = x$, ε

3274.
$$d^4u$$
, Si $u = \ln(x^xy^yz^y)$.
3275. d^nu , Si $u = e^{e^x+iy}$

3275,
$$d^n u$$
, $s_1 \ a = e^{ix + iy}$

3276.
$$d^n u$$
, $s_1 u = X(x) Y(y)$.

3277.
$$d^n u$$
, Si $u = f(x + y + z)$.
3278. $d^n u$, Si $u = e^{ax + bx + cz} + z$.

3279. Sea
$$P_n$$
 (x y, z) un polinomio homogéneo de grad

3279. Sea P_n (x y, z) un polinomio homogéneo de grado n. Demostrar que

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

3280. Sea

$$Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hallar $Au \vee A^{2}u = A(Au)$, si

a)
$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
; b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

3281. Sea

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

У

Hallar A u. si

a) $u = \sin x \cosh y$; b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

3282. Sea

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^3$$

$$\Delta_{\mathbf{a}} u = \tfrac{\partial^{\mathbf{a}} u}{\partial x^{\mathbf{a}}} + \tfrac{\partial^{\mathbf{a}} u}{\partial y^{\mathbf{a}}} + \tfrac{\partial^{\mathbf{a}} u}{\partial z^{\mathbf{a}}}.$$

Hallar A, u y A2u, si

a)
$$u = x^{4} + y^{6} + z^{6} - 3xyz$$
; b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^{2} + y^{3} + z^{4}}}$.

Hallar las denvadas de primero y segundo órdenes de las siguientes funciones compuestas.

(3283,
$$u = f(x^1 + y^1 + z^2)$$
. 3284. $u = f(x, \frac{x}{y})$.

3285. u = f(x, xy, xyz).

3286. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, si

$$u = f(x + y, xy)$$

3287. Hallar

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} ,$$

51

$$u = f(x + y + z, x^2 + y^3 + z^2).$$

Hallar las diferenciales totales de primero y segundo órdenes de las signientes funciones compuestas (x, y, z) son variables independientes)

3288. u = f(t), donde t = x + y. 3291. u = f(t), donde t = xyz.

3289.
$$u = f(t)$$
, donde $t = \frac{y}{x}$. 3292. $u = f(x^2 + y^3 + z^2)$.

3290.
$$u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$
.

3293. $u=f(\xi, \eta)$, donde $\xi=ax$, $\eta=by$.

3294. $u = f(\xi, \eta)$, donde $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

3295.
$$u = f(\xi, \eta)$$
, donde $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$ 3296. $u = f(x + y, z)$.

3297.
$$u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$$
. 3298. $u = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$.

3299. u = f(x, y, z), donde x = t, $y = t^2$, $y = t^3$

3300.
$$u = f(\xi, \eta, \zeta)$$
, donde $\xi = ax$, $\eta = by$, $\zeta = cz$.

3301.
$$u = f(\xi, \eta, \zeta)$$
, donde $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$

Hallar dau, sı

3302. u = f(ax + by + cz). 3303. u = f(ax, by, cz).

3304. $a = f(\xi, \eta, \xi)$, donde $\xi = a_1x + b_1y + c_1z$, $\eta = a_2x + b_2y +$ $+ c_3 t_1 \zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z$.

3305. Sea u = f(r), donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^6}$ y f es una función dos veces diferenciable. Comprobar que

donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es el operador de Laplace, y hallar la fun-

3306. Sean u y v funciones dos veces diferenciables y A el operador de Laplace (véase el problema 3305). Demostrar que

$$\Delta (uv) = u \Delta v + v \Delta u + 2\Delta (u \ v),$$

donde

$$\Delta(u, \tau) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Comprobar que la función

$$u = .\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(q y b son constantes) satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^1} + \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} = 0.$$

3308. Demostrar que, si la función u = u (x, y) satisface a la ecuación de Laplace (véase el problema 3307), la función

$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

lambién satisface a esta ecuación

3309. Comprobar que la función

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\kappa - b)^2}{4d^2t}}$$

(a y b son constantes) satisface a la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = = a^{1} \frac{\partial^{1} u}{\partial x^{2}}.$$

3310. Demostrar que s' la función u = u(x, t) satisface a la ecuación del calor (véase el problema 3309), la función

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{i\frac{x^2}{4a^2t}} u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^2t}\right)$$
 $(t > 0)$

también satisface a esta ecuación.

3311. Demostrar que la funcion

$$u = \frac{1}{r}$$
,

donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, sat's face a lectuación de

Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

para $r \neq 0$.

3312. Demostrar que, si la función u = u (x | v): satisface a la ecuación de Laplace (véase el problema 3311), la función

$$v := \frac{1}{r} \, u \left(\frac{k^2 x}{r^4} \, , \, \frac{k^2 y}{r^4} \, , \, \frac{k^4 y}{r^2} \, \right) \, ,$$

donde k es una constante y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + x^2}$, tarrien satisface a esta ecuación

3313.) Demostrar que la función

$$u = \frac{C_1 e^{-\sigma r} + C_2 e^{\alpha r}}{r},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y C_1 , C_2 son constantes, satisface a la ecuación de Helmholz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 u.$$

3314. Supongamos que las funciones $u_1 = u_1$ (x, y, z) y $u_2 = u_2$ (x, y, z) satisfacen a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$. Demostrar que la funcion

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2) u_2(x, y, z)$$

estisface a la ecuación biarmónica

$$\Delta (\Delta v) == 0.$$

3315. Sea f(x, y, z) una función homogénea, de grado n, y m veces diferenciable.

Demostrar que

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,\ y,\ z) := n(n-1)\dots(n-m+1)f(x,y,z).$$

3316. Simplificar la expresión

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y}$$
,

9

$$z = \sin y + f(\sin x - \sin y),$$

donde f es una función diferenciable.

3317. Comprobar que la función

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right).$$

donde f es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. Comprobar que

$$z = y f(x^3 - y^3),$$

donde f es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$y^{z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1}{1} xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. Simplificar la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z}$$
,

- 51

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^5(y+z) + \frac{1}{2}x^4yz + f(y-x, z-x),$$

donde f es una función diferenciable.

3320 Sea

$$z^* = vw, \ y^* = uw, \ z^* = uv$$

f(x, y, z) := F(u, v, w).

Demostrar que

$$xf'_{x} + yf'_{y} + zf'_{z} = uF'_{x} + vF'_{y} + vF'_{y}$$

Suponiendo que las funciones arbitrarias φ , ψ , etc., son diferenciab es un número suficiente de veces, comprobar las siguientes igualdades

3321.
$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
, st $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

3322.
$$x^{2} \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^{2} = 0$$
, $s_{1} z - \frac{z^{2}}{3x} + \varphi(xy)$.

3323.
$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$
, $s_1 \quad z = e^y + y e^{\frac{x^2}{2}}$.

3324.
$$x \frac{\partial u}{\partial x} = 2y \frac{\partial u}{\partial y} = \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu$$
, so $u = x^{\alpha} \gamma \left(\frac{u}{x^{2}} + \frac{z}{x^{3}} \right)$.

3325.
$$x = \frac{3u}{3}$$
 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xu}{z}$, so $u = \frac{xy}{z} \ln x = x\phi \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

3326
$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$
, Si $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$

3327.
$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 x}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
 s. $u = x \phi (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

3328.
$$x^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \rightarrow 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
, so $u = \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$

3329
$$e^{2\frac{\sigma^2 u}{\partial x^2}} = 2\pi y \frac{\partial^2 u}{\partial x \nabla_{\theta}} + \frac{1}{1} y^2 \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} = n (n-1) u,$$

Si
$$u = x^n \phi\left(\frac{d}{x}\right) \frac{1}{t} x^{t-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

3330.
$$\frac{\partial_{+}}{\partial x} \frac{\partial^{2} u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial_{+}}{\partial y} \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}}, \quad \text{si} \quad u = \phi \left[x + \phi \left(y \right) \right].$$

Mediante la denvación sucesiva, eliminar las funciones arbitrarias &

3331.
$$z = x + \varphi(x)$$

3332. $z = x \varphi(x)$
3333. $z = \varphi(x)$
3334. $u = \varphi(x - y, y - z)$

3335.
$$z = \phi(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$$
.
3336. $z = \phi(x) + \psi(y)$.
3337. $z = \phi(x) \psi(y)$.
3338. $z = \phi(x + y) + \psi(x - y)$.
3339. $z = x\phi(\frac{x}{y}) + y\psi(\frac{x}{y})$.
3340. $z = \phi(xy) + \psi(\frac{x}{y})$.

3341. Hallar la derivada de la función

$$z = x^2 - y^2$$

en el punto M (1, 1), en la dirección I que forma el ángulo $\alpha = 60^\circ$ con la dirección positiva del eje Ox

3342. Hallar la derivada de la función

$$z = x^3 - xy + y^1$$

en el punto M (1, 1) en la dirección l que forma un ángulo α con la dirección positiva del eje Ox. ¿En qué dirección esta derivada a) alcanza el valor máximo, b) alcanza el valor mínimo, c) es igual a 0

3343. Hallar la denvada de la función

$$z = \ln(x^0 + y^2)$$

en el punto $M(x_0, y_0)$ en la dirección que es perpendicular a la línea de nivel que pasa por este panto

3344. Hallar la denvada de la función

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^2}\right)$$

en el punto $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ en dirección de la normal interior a la

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
.

en este punto.

3345. Hallar la derivada de la función

$$u - xyz$$

en el punto M (1, 1, 1), en la dirección I{cos α, cos β, cos γ}

A qué es igual la magnitud del gradiente de la función en este punto?

3346. Hallar la magnitud y la dirección del gradiente de la función

$$u = \frac{1}{r}$$

en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) , donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3347. Determinar el ángulo formado por los gradientes de la función

$$u - x^2 + y^2 - z^2$$

en los puntos A (ϵ , 0, 0) y B (0, ϵ , 0).

3348. ¿Cuánto se diferencia la magnitud del gradiente de la función

$$a = x + y + z$$

en el punto M (1, 2, 2) de la magnitud del gradiente de la función

$$v = x + y + z + 0.001 \sin(10^{4} \pi) \sqrt{x^{2} + y^{2} + z^{2}}$$

en el mismo punto?

3349. Comprobar que en el punto M_0 (x_0, y_0, z_0) , el ángulo formado por los gradientes de las funciones

y
$$u = ax^{2} + by^{2} + cz^{2}$$

 $v = ax^{2} + by^{2} + cz^{2} + 2mx + 2ny + 2pz$

(a, b, c, m, n, p son constantes y $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) tiende a cero cuando el punto M_0 se aleja al infinito

3350. Sea u = f(x, y, z) una función dos veces diferenciable. Hallar $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$, si cos α_i cos β_i cos γ son los cosenos directores de la dirección l.

3351. Sea u = f(x, y, z) una función dos veces diferenciable y

tres direcciones perpendiculares entre sí.

a)
$$\left(\frac{\partial u}{\partial I_1}\right)^{n} + \left(\frac{\partial u}{\partial I_2}\right)^{n} + \left(\frac{\partial u}{\partial I_2}\right)^{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{n} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{n}$$
;

b)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_s^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_s^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$$
,

3352. Sea u = u(x, y) una diferenciable tal que para $y = x^2$ se tiene:

$$u(x, y) = 1$$
 $y \frac{\partial u}{\partial x} = x$.

Hallar $\frac{\partial u}{\partial y}$ para $y = \chi^2$

3353. Supongamos que la función u=u (x, y) satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

y también a las siguientes condiciones.

$$u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^3.$$

Halar

$$u_{xx}^{*}(x, 2x), \quad u_{xy}^{*}(x, 2x), \quad u_{yy}^{*}(x, 2x).$$

Suponiendo que z = z (x, y), resolver las signientes ecuaciones:

3354.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$
. 3355. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. 3356. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

3357. Supomendo que u = u(x, y, z), resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial u \, \partial z} == 0.$$

3358. Hallar la solución z = z (x, y) de la ecuación

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -x^2 + 2y_1$$

que satisface a la condición: $z(x, x^2) = 1$.

3359. Hallar la solución z = z(x, y) de la ecuación

$$\frac{\partial^{a_2}}{\partial y^4} = 2,$$

que cumple las condiciones. $z(x, 0) = 1, z'_y(x, 0) = x$

3360. Haliar la solución z = z(x, y) de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = x + y,$$

que cumple las condiciones. z(x, 0) = x, $z(0, y) = y^2$.

§ 3. Derivación de las funciones implícitas

1° Teorema de existencia. Si: 1) la función F(x, y, z) se anula en un punto $A_0(x_0, y_0, z_0)$; 2) F(x, y, z) y $F_z(x, y, z)$ están definidas y son continuas en un entorno del punto A_0 ; 3) $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces en cierto entorno suficientemente pequeño del punto $A_0(x_0, y_0)$ existe una función uniforme continua única

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

que satisface a la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

y tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$

2.° Diferenciabilidad de la función implicita. Si, además, 4) la función F(x, y, z) es diferenciable en un entorno del punto A_0 (x_0, y_0, z_0) , entonces la función (1) es diferenciable en un entorno del punto A_0 (x_0, y_0) y sus derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ pueden hallarse por las ecua-

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Si la función F(x, y, z) es diferenciable un número suficiente de veces, entonces, derivando sucesivamente las iguadades (2) pueden calcularse también las derivadas de orden superior de la función z.

3.º Funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones. Su-

pongamos que las funciones $F_I(x_0,...,x_m,y_0,...,y_n)$ (r=1,2,...,n) cump en les condiciones siguientes

- Dise anulan en el punto Aa (xio, xmo: 4 co. . .. 4no).
- Tison diferenciables en un entorno del punto \tilde{A}_0 .
- 3) el determinante funcional $\frac{\partial (F_1, \dots, F_n)}{\partial (y_1, \dots, y_n)} \neq 0$ en el punto A_0

Entonces, el sistema de ecuaciones

$$P_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = 0 \ (i = 1, 2, ..., n),$$
 (3)

determina univocamente en un entorno del punto $A_0(x_{10}-,x_{m0})$ un sistema de funciones diferenciables

$$y_1 = f(x_1, ..., x_m)$$
 (i = 1.2, ..., n),

que satisfacen a las ecuaciones (3) y a las condiciones

$$f_i(x_{10}, ..., x_{m0}) = y_{i0} (i = 1, 2, ..., n)$$

Las diferenciales de estas funciones implicitas pueden hallarse mediante el sistema

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = 0$$

 $(i = 1, 2, ..., n)^{*}$

Problemas

3361. Comprobar que la función de Dinchlet

$$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

que es discontinua en cada punto, satisface a la ecuación

$$y^2 - y = 0$$

3362. Sea f(x) una función definida en el intervalo (a, b) ¿En qué caso la ecuación

$$f(x)y=0$$

tiene la solución continua única v=0 para $a < x < b^{\circ}$

^{*)} En los enunciados de la mayoría de los problemas de este capítulo se supone, sin reser
"a, que se cumpien las condiciones de existencia de las funciones implicitas y de sus derivadas conespondientes.

3363 Supongamos que las funciones f(x) y g(x) están definidas y son continuas en el intervalo (a, b). En qué caso la ecuación

$$f(x) y = g(x)$$

tiene una solución continua única en el intervalo (a, b)?

3364 Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

sea

$$y = y(x) \quad (-1 \le x \le 1) \tag{3}$$

una función uniforme que satisface a la ecuación (1).

1) ¿Cuántas funciones uniformes (2) satisfacen a la ecuación (1)

2) Cuantas funciones umformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1)º

3) ¿Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1), si y(0) = 1; b) y(1) = 0?

3365. Dada la ecuación

$$x^2 = y^3$$

sea

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

una función uniforme que satisface a la ecuación (1),

1) "Cuántas funciones uniformes (2) satisfacen a la ecuación (1)º

2) Cuántas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1)º

3) Cuantas funciones uniformes diferenciables (2) satisfacen a la ecuación (1)?

4) Cuantas funciones uniformes continuas (2) satisfacen a la ecuación (1) si a) y (1) = 1, b) ν (0) = 0?

5) ¿Cuántas funciones uniformes continuas $y = y(x)(1 - \delta < x < 1 + \delta)$ satisfacen a la ecuación (1), si y(1) = 1 y δ es suficientemente pequeño?

3366. La ecuación

$$x^{3} + y^{3} = x^{4} + y^{4}$$

determina a y como función multiforme de x. ¿En qué regiones esta función: 1) es uniforme, 2) es biforme, 3) es triforme, 4) es tetraforme? Determinar los puntos de ramificación de esta función y sus ramas un formes continuas.

3367. Determinas los puntos de ramificación y las ramas uniformes continuas $y = y(x) (-1 \le x \le 1)$ de la función multiforme y, definida por la ecuación

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2.$$

3368. Supongamos que f(x) es continua para a < x < b y que $\varphi(y)$ es monótona creciente y continua para c < y < d. En qué caso la ecuación

$$\varphi(y) = f(x)$$

determina la función uniforme

$$y = \varphi^{-1} (f(x))?$$

Examinar los ejemplos a) sen $y + \sinh y = x$, b) $e^{-y} = -\sin^2 x$ 3369. Sea

$$x = y + \varphi(y), \tag{1}$$

donde $\varphi(0)=0$ y $|\varphi'(y)| \le k \le 1$ para $-a \le y \le a$. Demostrar que, pa ra $-\epsilon \le x \le \epsilon$, existe una función diferenciable única y = y(x) que satisface a la ecuación (1) y tal que y(0) = 0,

3370. Sea y = y(x) una función implícita determinada por la ecuación

$$x = ky + \varphi(y),$$

donde la constante $k \neq 0$ y $\varphi(y)$ es una función diferenciable periódica, de período ω , tal que $|\varphi'(y)| < |k|$. Demostrar que

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

donde $\psi(x)$ es una función periodica, de período $|k| \omega$.

Hallar ν' e j " para las funciones j, determinadas por las signientes ecuaciones.

3371.
$$x^4 + 2xy - y^3 = a^4$$
. 3372. $\ln \sqrt{x^2 + y^3} = \arctan \frac{y}{x}$.

3373.
$$y - \epsilon \sin y = x$$
 $(0 < \epsilon < 1)$.

3374.
$$x^y = y^x$$
 $(x \neq y)$. 3375. $y = 2x \arctan \frac{y}{x}$.

$$1 + xy = k(x - y),$$

donde k es una constante, se venfica la igualdad

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$$

3377. Demostrar que, si

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

entonces, para xy > 0 se verifica la igualdad

$$\frac{dx}{V + \frac{dy}{V + q^4}} + \frac{dy}{V + q^4} = 0.$$

3378. Demostrar que, en un entorno del punto x = 0, y = 0, la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = a^k (x^2 - y^k)$$
 $(a \neq 0)$

determina dos funciones diferenciables: $y=y_1$ (x) e $y=y_2$ (x). Hailar y_1' (0) e y_2' (0)

3379. Hallar y' para x=0 e y=0, si

$$(x^3 + y^3)^2 = 3x^4y - y^3$$
.

3380. Hallar y', y'', y''', si $x^2 + xy + y^2 = 3$

3381. Hallar y', y'', y''' para $x = 0, y = 1, s_1$

$$x^{x} - xy + 2y^{2} + x - y - 1 = 0$$

3382. Demostrar que para la curva de 2º orden

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

se venfica la igualdad

$$\frac{d^4}{dx^3}[(y')^{-\frac{4}{3}}] = 0,$$

Hatlar, para la función " z = z(x, y), las derivadas parciales de primero y segundo órdenes, si

3383.
$$x^2 + y^3 + z^2 = a^3$$
.

3385,
$$x+y+z=e^{z}$$
.

3384.
$$z^4 = 3xyz = a^4$$
.

3386.
$$z = \sqrt{x^2 - y^2}$$
. 1g $\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. 3387. $x + y + z = e^{-xx^2y + z}$.
3388 Sca $x^2 + y^2 + z^3 - 3xyz = 0$ (1)

3

$$f(x, y, z) = xy^{i}z^{i}.$$

Halar a) $f_x'(1, ..., 1)$, si z = z(x, y) es la función implicita determinada por la ecuación (1), b) $f_x'(1, ..., 1)$, si y = y(x, z) es la función implicita determinada por la ecuación (1). Explicar por que estas cerivadas son distintas

3389. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2}$ para x = 1, y = -2, z = 1, so $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ Hallar $dz \vee d^2 z$, so

3390.
$$\frac{x^{3}}{a^{3}} + \frac{y^{3}}{b^{3}} + \frac{z^{3}}{c^{3}} = .$$
 3391. $xyz = x + y + z$. 3392. $\frac{x}{z} = \ln \frac{x}{y} + 1$. 3393. $z = x + \arctan \frac{y}{z} + x$.

3394. Ħal.ar du, si

$$a^{2} - 3(x + y) a^{2} + z^{2} = 0.$$

3395 Hallar
$$\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y}$$
. Si $F(x+y+z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$

3396 Ha.lar
$$\frac{\partial z}{\partial x}$$
, $\frac{\partial z}{\partial y}$, so $F(x-y, y-z, z-x) = 0$

3397. Hallar
$$\frac{\partial z}{\partial x}$$
, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si $P(x, x+y, x+y+z) = 0$.

3398. Haliar
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
, st $F(xz, yz) = 0$.

3399. Hallar d'z, st

a)
$$F(x \stackrel{\iota}{\leftarrow} z, y + z) = 0$$
; b) $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$.

3399 1. Sea $z=z_{-}(x,y)$ ia función diferenciable, determinada por la ecuación

$$z^2 - xz + y = 0$$
,

que para x = 3, y = -2 toma el valor z = 2. Hallar dz (3, -2) y d^2z (3, -2).

3400. Sean x = x (y, z), y = y (x, z), z = z (x, y) functiones definidas por la ecuación F(x, y, z) = 0.

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$
.

3401. Hallar
$$\frac{dx}{dz}$$
 y $\frac{dy}{dz}$, so $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$

3402. Hallar
$$\frac{dx}{dz}$$
, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ y $\frac{d^2y}{dz^2}$ para $x=1$, $y=-1$, $z=2$,

Si
$$x^4 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$$
, $x + y + z = 2$,

3403 Hallar
$$\frac{\partial u}{\partial x}$$
, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, $v = xu - yv = 0$, $yu + xv = ...$

3403 L. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^{a+v} + 2uv = 1, \\ ye^{a-v} - \frac{u}{1+u} = 2x \end{cases}$$

determina unas funciones diferenciables u = u(x, y) y v = v(x, y) tales que u(1, 2) = 0 y v(1, 2) = 0. Hallar du(1, 2) y dv(1, 2).

3404. Hallar du, dv, d2u, d2v, s1

$$u=v=x-y,\ \frac{e^{-\gamma}u}{s-y}=\frac{x}{y}.$$

3405. Hallar du dv, $d^{\dagger}u + d^{\dagger}v$ para $x = 1 \neq -1$, u = 0, $v = \frac{\pi}{4}$.

51

$$e^{\frac{u}{v}}\cos\frac{v}{u}$$
, $\frac{v}{v}$ e^{v} so $\frac{v}{u} = \frac{v}{\sqrt{2}}$.

3406 Sean

$$x = t + t^{-1}$$
 $y = t^2 + t^{-2}$, $z = t^2 + t^{-2}$.

Hadar $\frac{d}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ y $\frac{d^2z}{dx^2}$

3407. ¿En qué región del plano Oxy el aistema de ecuaciones

$$x = a + v$$
, $y = a^{2} + v^{3}$, $z = a^{2} + v^{3}$.

dende los parametros u v v toman todos los valores reales posibles de termina a z como función de las variables x e y? Hallar las denvada θ : θ :

3407 1 Hailar
$$\frac{\partial z}{\partial x}$$
 y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el punto $u = 1$, $y = 1$, si:

$$\begin{aligned}
 x &= u + \ln u, \\
 y &= v - n u, \\
 z &= 2u + v.
 \end{aligned}$$

3407.2. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en el punto u = 2, y = 1, si

$$\begin{array}{cccc}
x & -u + v^{2}, \\
y & -u^{2} & v^{3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
z & 2uv.
\end{array}$$

3408. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si

$$\mathscr{A} = \cos \varphi \cos \psi$$
, $y = \cos \varphi \sin \psi$, $z = \sin \varphi$.

3409. Hallar
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. SI

$$x = u \cos v_1$$
 $y = u \sin v_1$ $z = v$.

3410. Supongamos que z = z (x x) es una función que se determina por el sistema de ecuaciones

$$x = e^{a+a}$$
, $y = e^{a-a}$, $z = uv$

(u y y son parametros). Hallar $dz y d^2 z$ para u = 0, y = 0.

3411, Hallar
$$\frac{dz}{dx}$$
 y $\frac{d^2z}{dx^2}$, si

$$z = x^{2} + y^{2}$$
,

donde y = y(x) se determina por la ecuación

$$x^t - xy + y^2 = 1.$$

3412. Hallar
$$\frac{\partial u}{\partial x}$$
 y $\frac{\partial u}{\partial y}$, si

$$y = \frac{x+z}{y+z}$$

donde z se determina por la ecuación

$$ze^{x} = xe^{x} + ye^{y}$$
.

3413. Supongamos que las ecuaciones

$$x := \varphi(u, v), \quad y := \psi(u, v), \quad x := \chi(u, v)$$

determinan a z como función de x e y. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. 3414 Sean

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

Hallar las denvadas parciales de primero y segundo ordenes de las funciones inversas. u = u(x, y) y v - v(x, y)

3415. Hallar
$$\frac{\partial u}{\partial x}$$
, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, s_1

a)
$$x = u \cos \frac{v}{u}$$
, $y = u \sin \frac{v}{u}$; b) $x = e^u + u \sin v$, $y = e^u - u \cos v$.

3416. La función u = u(x) se determina por el sistema de ecuaciones

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

Hallar $\frac{du}{dx}$ y $\frac{d^3u}{dx^2}$.

3417. La función $u=u\ (x,\ y)$ se determina por el sistema de ecuaciones

$$a = f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0.$$

Hallar $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial u}$.

3418, Sean

$$x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), z = h(u, v, w).$$

Hallar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial u}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$.

3419. Supongamos que la función z = z (x > 3) satisface al sistema de ecuaciones

$$f(x, y, z, t) = 0, g(x, y, z, t) = 0,$$

donde t es un parámetro variable. Hallar dz.

3420. Sea u=f(z), donde z es una función implicita de las variables $z = x + y \varphi(z)$.

Demostrar la fórmula de Lagrange

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ {}_1 \varphi \left(x \right) \right]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\},\,$$

Indicación. Demostrar la fórmula para $n \approx 1$ y aplicar el método de inducción matemática

3421. Comprobar que la función z = z (x, y), determinada por la еспас.оп

$$\Phi(x-az, y-bz)=0, \tag{1}$$

Jonde Φ (a, 1) es una función diferenciable arbitraria de las variables uy » (a y b son constantes), es solución de la ecuación

$$a\,\frac{\partial z}{\partial x} + b\,\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Averiguar las propiedades geométricas de la superficie (1).

3422. Comprobar que la función z = z (x, y), determinada por la ecuación

$$\Phi\left(\frac{z-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0,$$
(2)

donde Φ (u, v) es una función diferenciable arbitraria de las variables u y v. satisface a la ecuación

$$(x-x_{\rm e})\frac{\partial z}{\partial \bar{z}}+(y-y_{\rm e})\frac{\partial z}{\partial y}-z-z_{\rm e}$$

Avenguar las propiedades geométricas de la superficie (2).

3423. Comprobar que la función z = z (x, y), determinada por la ecuación.

$$ax + by + cz = \Phi(x^z + y^z + z^z), \tag{3}$$

donde Φ (u) es una función diferenciable arbitraria de la variable u, y a, b, e son constantes, satisface a a ecuación

$$(c_j - b_2) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

Avenguar las propiedades geométricas de la superficie (3).

3424. La función z = z (x, y) viene dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$$
,

Comprobar que

$$(x^{z}-y^{z}-z^{z})\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

3425. La función z = z (x, y) viene dada por la ecuación

$$F(x+zy^{-1}, y+zx^{-1})=0.$$

Comprobar que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

3426. Comprobar que la función z = z (x, y), determinada por el suciena de ecuaciones

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln x = f(\alpha),$$

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha),$$

donde $\alpha = \alpha(x, y)$ es un parâmetro variable y $f(\alpha)$ es una función diferenciable arbitraria, satisface a la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{1} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2} - z^{3}$$
.

3427. Comprobar que la función

$$z = z(x, y)$$

dada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} z = \alpha x + \frac{g}{\alpha} + f(\alpha) \\ 0 = x - \frac{g}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{cases}$$

satisface a la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

3428. Comprobar que la función z = z (x, y), dada por las equaciones

$$\begin{cases} [x - f(\alpha)]^2 = x^3 (y^2 - \alpha^4), \\ [z - f(\alpha)] f'(\alpha) = \alpha x^4. \end{cases}$$

estisface a la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \stackrel{\sim}{=} xy.$$

3429. Comprobar que la función z = z (x, y), dada por las ecuaciones

$$z = \alpha x + y \varphi(\alpha) + \psi(\alpha),$$

$$0 := x + y \varphi(\alpha) + \psi(\alpha),$$

catisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^a} \frac{\partial^2 z}{\partial y^b} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^a = 0.$$

3430. Comprobar que la función implícita z-z (x, y), determinada por la ecuación

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

satisface à la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{3} \frac{\partial^{2} z}{\partial x^{2}} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^{2} z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2} \frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}} - 0$$

§ 4 Cambio de variables

1.º Cambio de variables en una expresión que contiene derivadas ordinarias. Supongamos que en la expresion diferencia.

$$A := \Phi (x_i \mid y_i \mid y'_{xi} \mid y'_{xxi} \mid \ldots)$$

se necesita pasar a las nuevas variables t será la variable independiente y u la funcion, que están ligadas con las variables anteriores x e t por las ecuaciones

$$z = l(t, u), y = g(t, u),$$
 (1)

Denvando las ecuaciones (1), se obtiene

$$y'_{x} = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \mu} u'_{t}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \mu} u'_{t}}$$

Análogamente se expresan las derivadas superiores y''_{xx}, \dots Definitivamente, resulta.

$$A := \Phi_1(t, u, u'_0, u''_0, \dots).$$

2.º Cambio de las variables independientes en una expresión que contiene derivadas parciales. Si en la expresión diferencial

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^3}, \dots\right)$$

se hace

$$y = f(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{2}$$

donde u y v son nucvas variables independientes, entonces las derivadas parciales sucesivas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... se hallan de las signientes ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial l}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v}.$$

etc.

3.º Cambio de las variables independientes y de la función en una expresión que contiene derivadas parciales. En el caso más general, si se tienen las ecuaciones

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, v), \quad z = h(u, v, w),$$
(3)

donde d y ν son nuevas variables independientes y w = w (u, v) es la nueva función, entonces, para las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial z}$, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \, .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial w} \right) = \frac{\partial h}{\partial w} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \, .$$

etc

En algunos casos de cambio de variables, es conveniente utilizar las diferenciales totales.

Problemas

3431. Transformar la ecuación

$$y'y''' - 3y'^2 - x$$

tomando y por nueva variable independiente

3432. Transformar del mismo modo la ecuación

$$y''y''y''+5y''=0$$
.

3433. Transformar la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$$
,

iomando x por función y t = xy por variable independiente Introduciendo nuevas variables transforma as siguientes ecuaciones

Affecenciales ordinarias

3434.
$$x^{1}y' + xy' + y = 0$$
, SI $x = e^{t}$.

3435.
$$y''' = \frac{6y}{x^2}$$
, Si $\ell = \ln |x|$.

3436.
$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$
, si $x=\cos t$.

3437.
$$y'' + y' + th x + \frac{m^2}{ch^2 x} y = 0$$
, so $x - \ln \lg \frac{t}{2}$.

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}p\left(t\right) dt$$

3438. y' + p(x)y' + q(x)y = 0, so $y = ue^{-\frac{x}{x_0}}$ $y p(x) \in C^{(1)}$

3439.
$$x^ty' + xyy' - 2y^t = 0$$
, si $x = e^t$, $y = ue^{tt}$, donde $u = u(t)$.

3440.
$$(1+x^2)^2 y^2 = y$$
, Si $x = \lg t$, $y = \frac{u}{\cos t}$, donde $u = u(t)$.

3441.
$$(1-x^2)^n y^n = -y$$
 St $x = \ln t$, $y = \frac{u}{\cosh t}$, donde $u = u(t)$.

3442.
$$y'' + (x + y)(1 + y')^2 = 0$$
, si $x = u + t$, $y = u - t$, donde $u = u(t)$.

3443.
$$y''' - x^3 y' + xy' - y = 0$$
, Si $x = \frac{t}{t}$, $y = \frac{u}{t}$, dende $u = u(t)$.

3444. Transformar la ecuación de Stokes

$$y' = \frac{Ay}{(x-a)^2 (x-b)^3}$$
,

hactendo

$$\mu = \frac{\mu}{x-b}, \quad t = \ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

y tomando u por función de la variable t.

3445. Comprobar que si se transforma la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

mediante la sustitución $x = \varphi(\xi)$, en la ecuación

$$\frac{d^3y}{d\xi^2} + P(\xi)\frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

4 CAME O DE VARIABLES

 $[2P(\xi) Q(\xi) + Q'(\xi)] [Q(\xi)]^{-\frac{1}{2}} - [2p(x)q(x) + q'(x)] [q(x)]^{-\frac{1}{2}}.$

3446 En la ecuación

$$\Phi(y, y', y') = 0$$

donde Φ es una función homogénea de las variables y, y', y'', hacer

3447. En la ecuación

$$F(x^{1}y^{0}, xy^{\prime}, y) = 0,$$

donde F es una función homogénea de sus argumentos, hacer

$$u = x \frac{v'}{y},$$

3448 Demostrar que la ecuación

$$y''(1+y'^2) - 3y'y'^2 = 0$$

no cambia de forma a, hacer una transformación homografica

$$x = \frac{a_{5}^{2} + b_{1}\eta + c_{3}}{a_{5}^{2} + b_{1} + c_{2}}, \quad y = \frac{a_{5}^{2} + b_{1}\eta + c_{2}}{a_{5}^{2} + b_{1} + c_{2}}$$

Indicación. Expresar la transformación dada en forma de una composición de las transformaciones elementales.

$$x = \alpha X + \beta Y + \gamma, \quad y = Y,$$

$$Y = \frac{1}{X_1} \qquad Y = \frac{Y_1}{X_2} + \frac{1}{X_2}$$

У

$$X_1 = a\xi + b\eta + c$$
 $Y_1 = a_2\xi + b_2\eta + c_3$

3449 Demostrar que el Schwarziano

$$S\left[x\left(t\right)\right] = \frac{x^{\prime\prime\prime}\left(t\right)}{x^{\prime}\left(t\right)} = \frac{3}{2} \left[\frac{x^{\prime\prime}\left(t\right)}{x^{\prime\prime}\left(t\right)}\right]^{4}$$

no cambia su valor al hacer una transformación lineal fraccionaria

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \qquad (ad - bc \neq 0).$$

Transformar a coordenadas polares r y φ , haciendo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, las siguientes ecuaciones:

3450.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}.$$

3451.
$$(xy'-y)^2 = 2xy(1+y'')$$
.

3452.
$$(x^2 + y^2)^2 y^2 = (x + yy')^2$$

3453. Transformar a coordenadas polares la expresión

$$\begin{array}{c} x \leftarrow y_y \\ x_y = y \end{array}$$

3454. Expresar la curvatura de una curva plana

$$K = \frac{\{y_{x,x}^{T}\}}{\{1 - y_{x}^{T}\}^{\frac{2}{2}}}$$

en coordenadas polares r y \u03c3.

3455. Pasar a coordenadas polares en el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

3456. Transformar la expresión

$$W = x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}.$$

introduciendo nuevas funciones $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$.

3457. En la transformación de l'egendre, a cada punto (x, y) de la curva y = y(x) se le pone en correspondencia el punto (X, Y), donde

$$X = y'$$
, $Y = xy' - y$.

Hallar Y', Y", Y"

Introduciendo nuevas variables independientes ξ y η , resolver las siguientes ecuaciones

3458.
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$
, si $\xi = x + y^2$, $\eta = x - y$.

3459.
$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
, so $\xi = x + y^2 + y^2$.

3460.
$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$
 $(a \neq 0)$, so $\xi = x + \eta = y - hz$.

3461.
$$\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{z}$$
, SI $\xi = \mathbf{r}$, $\eta = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$.

Tomando u y ν por nuevas variables independientes, transformar t_{as} significates equationes

3462.
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^k} \frac{\partial z}{\partial y} = xy_k$$
 so

$$u = \ln x$$
 , $v = \ln (y + \sqrt{1 + y^2})$

3463.
$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
, si

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$
 , o are $g \frac{v}{v}$

3464.
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial \hat{y}} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
 51

$$h = \frac{y}{z} \qquad t = z + \sqrt{\lambda^2 + y^2 + z^2}$$

3465.
$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = \frac{x}{z}$$
 s.

$$u = 2x - z^2$$
 , $v = \frac{y}{z}$.

8466.
$$(x+z)\frac{\partial z}{\partial z} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x+y+z$$
, so

$$u=x+s$$
 , $v=y+z$

3467. Transformar la expresion

$$(z+e^{z})\frac{\partial z}{\partial z}+(z+e^{y})\frac{\partial z}{\partial v}+(z^{z}-e^{x+v}),$$

tomando por nuevas variables independientes

$$\xi = y + ze^{-x}$$
, $\eta = x + ze^{-y}$,

3468. Transformar la expresión

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^z$$
,

haciendo

$$x = av, \quad y = \frac{1}{2} (a^x - v^x).$$

3469. En la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

hacer

$$\xi = x$$
, $\eta = y - x$, $\xi = z - x$.

3470. Transformar la ecuación

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

tomando x por función e y, z por variables independientes

3471 Transformar la ecuacion

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

tomando x por función y

$$u=y-z, \quad v=y+z$$

por variables independientes.

3472. Transformar la expresión

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^* + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^*,$$

tomando x por función y

$$u = zz$$
, $v = yz$

por var ables independientes.

3473. En la ecuación

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$$

hacer

$$e^{\xi} = x - u, \quad e^{\eta} = y - u, \quad e^{\xi} = x - u.$$

Pasar a las nuevas variables u, v, w, donde w = w (u, v), en las siguientes ecuaciones:

CAPITULO 6 CALCULO DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VAR AS VARIABLES

3474.
$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x) z$$
, si
 $u = x^2 + y^1$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $w = \ln z - (x + y)$.

8475.
$$x^{2} \frac{\partial z}{\partial x} + y^{2} \frac{\partial z}{\partial y} = z^{2}$$
, so $u = z$, $v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, $w = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}$.

3476
$$(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} - x + yz$$
 51 $a - yz - x$, $x = xz - y$, $w = xy - z$.

3477.
$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{x} = \left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{x} = z^{x}\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$
, so $x = ue^{u}$, $y = ve^{u}$, $z = we^{u}$.

3478 Transformar la expresión

$$z$$
 3) $\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial \mu}\right)$,

haciendo

$$\omega = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg} z, \quad \omega = x - y + z,$$

donde w = w(u, v),

3479. Transformar la expresión

$$A = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y},$$

hariendo $u = \langle e^z \rangle = ye^z$, $w - ze^z$, donde w - w(u, x)

3480. En la ecuacion

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = u - \frac{xy}{x}$$

nater
$$\xi = \frac{x}{\epsilon}$$
, $\eta = \frac{y}{\epsilon}$, $\zeta = \epsilon$, $w = \frac{u}{\epsilon}$, donde $w = \pi$ (ξ , η , ξ).

Transformar a coordenadas polares r y φ , haciendo $x = r \cos \varphi$. *r s.n φ, ias signientes expresiones.

3481.
$$w = x \frac{\partial_x}{\partial y} - y \frac{\partial_x}{\partial x}$$
. 8483. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^x$.

3482.
$$w = x \frac{\partial x}{\partial x} + y \frac{\partial x}{\partial y}$$
. 3484. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

3485.
$$\omega = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
.

3486.
$$\pi = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^3} - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

3487. En la expresión

$$I = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

 $hacer x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

3488. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^3 u}{\partial I^2} = a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2},$$

introduciendo as nuevas variables independientes

$$\xi = x - at$$
, $\eta = x + at$.

Tomando u y v por nuevas variables independientes, transformar las signientes ecuaciones

3489,
$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - 0$$
, si
$$u = x + 2y + 2 \qquad v = x - y - 1$$

9450.
$$(1 + x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
 so $u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

349!.
$$ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$
 (a, t, c son constantes),

$$u = \ln x$$
 , $t = \ln y$,

8492.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{si}$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = -\frac{y}{x^2 + v^2}.$$

8493.
$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}z}{\partial y^{3}} + m^{2}z = 0$$
, SI

$$z = e^{x} \cos v$$
, $y = e^{x} \sin v$.

8494,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} (y > 0)$$
, si

$$u = x - 2\sqrt{y}$$
, $y = x + 2\sqrt{y}$

3495,
$$x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - y^4 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$$
, so $u = xy$, $v = \frac{x}{2}$.

3496.
$$x^{1} \frac{\partial^{2} z}{\partial x^{0}} = (x^{0} + y^{0}) \frac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y} + y^{0} \frac{\partial^{2} z}{\partial y^{0}} = 0$$
, so $u = x + y$, $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

3497.
$$xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (x^3 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
, so $u = \frac{1}{2} (x^3 + y^2)$, $v = xy$

3498.
$$x^{1} \frac{\partial^{2} z}{\partial x^{1}} = 2x \sin y \frac{\partial^{2} z}{\partial x \partial y} + \sin^{1} y \frac{\partial^{2} z}{\partial y^{2}} = 0$$
, si $u = x \lg \frac{y}{2}$, $v = x$.

3499.
$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0, y > 0), \quad \text{SI}$$

 $x = (u + v)^2, \quad y = (u - v)^2,$

3500.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$$
, si $u = x$, $v = y + z$.

3501. Mediante el cambio lineal

$$\xi = x + \lambda, y, \quad \eta = x + \lambda, y$$

transformar la ecuación

$$A\frac{\partial^{3}u}{\partial x^{3}} + 2B\frac{\partial^{3}u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^{3}u}{\partial y^{7}} = 0.$$
 (1)

donde A B y C son constantes y $AC - B^2 < 0$, a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0$$

Hallar la forma general de una función que satisface a la ecuación (1). 3502 Demostrar que la forma de la ecuación de Laplace

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

no varia a, hacer cualquier sustitución no degenerada de vanables

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

que cumpla las condaciones

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$$
, $\frac{\partial \psi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$.

3503. Transformar las equaciones

a)
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} = 0$$
, b) $\Delta (\Delta u) = 0$.

hac endo u = f(r), donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3504. ¿Qué forma toma la ecuación

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} + \varepsilon w = 0,$$

si se hace

$$w = f(u)$$

donds $u = (x - x_0)(y - y_0)?$

3505 Transformar la expresion

$$A = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x},$$

haciendo

$$x = y = X$$
, $y = XY$.

3506 Comprobat que la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$$

no cambia su forma al hacer la transformación de variables

$$x = uv \cdot y = \frac{1}{v}$$

3507. Comprobar que la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$$

no cambia su forma al hacer el cambio de variables

CAPITULO 6 CALCULO DIFFRENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

3508. Transformar la ecuación

$$xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$$

haciendo

$$x = \eta \zeta, y = \xi \zeta, z = \xi \eta$$

3509 Transformar la ecuación

$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial x_{x}^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial x_{x}^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial x_{x}^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial x_{1}\partial x_{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial x_{1}\partial x_{3}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial x_{2}\partial x_{3}}=0,$$

hactendo

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1$$
, $y_2 = x_1 + x_3 - x_2$, $y_3 = x_1 + x_3 - x_4$

3510. Transformar la ecuación

$$x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{\frac{3}{2}}}+y^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{\frac{3}{2}}}+z^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{\frac{3}{2}}}+2xy\frac{\partial^{3}u}{\partial x\partial y}+2\kappa z\frac{\partial^{3}u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^{3}u}{\partial y\partial z}-z0$$

haciendo

$$\xi = \frac{y}{z}, \quad \eta = \frac{\varepsilon}{x}, \quad \zeta = y - z.$$

Indicación. Escrib e la ecuación en la firma $4^{\circ}x = 4x = 0$, dende

$$A = x \, \frac{\partial}{\partial x} + \mu \, \frac{\partial}{\partial y} + z \, \frac{\partial}{\partial z} \, .$$

3511. Transformar las expresiones

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{t} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{t} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{t}$$

$$\Delta_{z}u := \frac{\partial^{z}u}{\partial x^{z}} + \frac{\partial^{z}u}{\partial y^{z}} + \frac{\partial^{z}u}{\partial z^{x}}$$

a coordenadas esfencas, haciendo

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$
, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Indicación Expresar el cambio de variables en forma de la composición de dos sustituciones parciales

$$x = R \cos \varphi$$
, $y = R \sin \varphi$, $e = c$

$$R = r \sin \theta$$
, $\varphi = \varphi$, $z = r \cos \theta$.

3512. En la ecuación

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

introducir una nueva función w, haciendo $w = z^2$.

Tomando u y v por nuevas variables independientes y w = w (u, v) por nueva función, transformar las siguientes ecuaciones

3513.
$$y \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$$
, so $u = \frac{x}{y}$, $v = x$, $w = xz - y$.

3514.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \text{si} \quad u = x + y, \quad v = \frac{\eta}{x}, \quad w = \frac{z}{x}.$$

3514.
$$\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{1}} + 2 \frac{\partial^{2}z}{\partial x} + \frac{\partial^{2}z}{\partial y} + \frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}} = 0, \quad \text{S1} \quad u = x + y, \quad v = x - y,$$

$$= xy - z$$

$$3516. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z \quad \text{if} \quad u = \frac{x + y}{2}, \quad v = \frac{x - y}{2}, \quad w = z e^y.$$

3517.
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\pi}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad 51$$

$$u=x_1$$
 $v=x-y$, $w=x-y+z$.

3518.
$$(1-x^2)\frac{\sigma^2z}{\sigma x^2} + (1-y^2)\frac{\sigma^2z}{\bar{\sigma}_y} = x\frac{\sigma z}{\sigma x} + y\frac{\bar{\sigma}z}{\bar{\sigma}_y}$$
, so $x = \sin u$,

$$35.9. \ \ (1-x^2) \frac{\sigma^2 z}{\sigma x^2} = \frac{\sigma^2 z}{\sigma x^2} - \frac{\sigma^2 z}{\sigma x^2} - 2x \frac{\sigma z}{\sigma x} - \frac{1}{4} z = 0 \ \ (, x) < 1), \quad \Omega$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot y - \arccos x + \frac{1}{2} \cdot y - \arccos x, w = z \sqrt[4]{1 - x^2}.$$

3520.
$$\frac{\sigma^{2}z}{\sigma x^{2}} = 2 \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}}{x^{2} - z^{2}} = \frac{2 (x^{2} + y^{2})^{2}}{(x^{2} - y^{2})^{2}} (y x) > (y)$$
 S1

$$a=x-y$$
, $v=x-y$, $w=\sqrt{\frac{x}{x-y^2}}$.

3521 Demostrar que toda ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c son constantes) mediante la sustitución

donde α y β son constantes y n=n (x, v), se puede reducir a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_x u = 0$$
 ($c_x = const$).

¥

PH JLD 6. CALCULO DIFF RENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

3522. Comprobar que la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

in pla su forma al hacer la sustitución de variables

$$x' = \frac{x}{y}$$
, $y' = \frac{y}{y}$, $u = \frac{y'}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{\sqrt{y}}}$,

1 / es una función de las variables x', y'

1523. En la ecuación

$$q\left(1+q\right)\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}-\left(1+p+q+2pq\right)\frac{\partial^{2}z}{\partial x\, vy}+p\left(1+p\right)\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}=0,$$

ende
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}$$
 y $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, hacer $u = v + z$, $v + z$ $w = v = 1 + z$
and i q, e $w = w(u, v)$

1504 En la ecuación

$$x^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^* \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^* \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right)^* + \left(y \frac{\partial u}{\partial x} \right)^* + \left(z \frac{\partial u}{\partial z} \right)^*$$

, If
$$x = e^x$$
, $y = e^{\eta}$, $z = e^{\eta}$, $u = e^{\omega}$, donde $w = w \xi$, η , ξ .

125. Comprobar que la forma de la equación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \tau \partial y} \right)^2 = 0$$

14. cualquiera que sea el papel que desempeñen las variables v. y.

26 Resolver la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^{2}z}{\partial x\partial x}+\left(\frac{z}{z}\right)^{2}\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}=0$$

do y por función de las variables y y ;

· '7 Transformar la ecuación

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^0} + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^0} = 0,$$

aplicando la transformación de Legendre

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z.$$

dende Z = Z(X, Y).

§ 5 Aplicaciones geometricas

1,º Recta tangente y plano normal. Las ecuaciones de la recta targente a la curva

$$x = \psi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

en su punto M(x, y, z), tienen la forma

$$\begin{array}{ccc} X & x & Y - t_1 = Z - r \\ dx & dy & d\overline{t} & d\overline{t} \end{array}$$

La ecuación del plano normal en este punto es

$$\frac{dx}{dt}(X-x) + \frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dx}{dt}(Z-y) = 0$$

2° Ptano tangente y recta normal. La ecuación del plano tangente a la superficie z = f(x, y) en su punto M(x, y, z), tiene la forma

$$Z \to z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y \to y).$$

Las equaciones de la normal en el punto M, son

$$\frac{\lambda - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Si la ecuación de la superficie viene dada en forma implícita F(x, y, z) = 0, entonces, se tiene respectivamente, la ecuación del plano tangente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial x}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial x}(Z-z) = 0$$

y las ecuaciones de la normal

$$\frac{\lambda - z}{\frac{\partial F}{\partial x}} - \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

3.º Curva envolvente de una familia de curvas planas. La curva envolvente de una familia monoparamétrica de curvas $f(x, y, \alpha) = 0$ (α es un parámetro), satisface al sistema de ecuaciones

$$f(x_i, y_i, \alpha) := 0, \quad f'_a(x_i, y_i, \alpha) := 0.$$

4 Superficie envolvente de una familia de superficies. La superfic e envolvente de una familia monoparametrica de superficies $F(x, y, z, \alpha) = 0$ satisface al sistema de ecuaciones

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \alpha\right)=0,\quad F_{\alpha}\left(x,\ y,\ z,\ \alpha\right)=0.$$

Fin caso de una familia biparametrica de superficies $\phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$. la superficie envolvente satisface à las signientes ecuaciones

 $\Phi_{\alpha}(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta)=0, \quad \Phi_{\alpha}^{'}(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta)=0, \quad \Phi_{\beta}^{'}(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta)=0$ Problemas:

Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes y planos normales en los puntos dados a las siguientes curvas

3528. $x = a \cos a \cos t$, $y = a \sin a \cos t$, $z = a \sin t$; en el punto $t = t_0$

3529. $x = a \sin^3 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$; en el punto $t = \frac{\pi}{2}$

3530 $x = y = x^2$ en el punto M(1, 1, 1)

3531 $\chi^2 + x^2 = .0$, $v^2 + z^2 = 10$, en el punto M(1, 1, 3).

3532 $x^2 + ... + z^2 - 6$, x + y + z = 0; en el punto M(1, -2, 1).

3533. Hallar un punto en la cuma x = t, $y = t^2$, $z = t^3$, de modo que la recta tangente en este sea paralela al piano y + 2y + z = 4.

3534. Demostrar que la recta tangente a la hélice $x = a \cos t$ $t = a \sin t$, z = bt forma un ángulo constante con el eje Oz

3535. Demostrar que la curva

$$x = ae^t \cos t$$
, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$

corta a todas las generatnees del cono $x^2 + 1^2 = z^2$ bajo un mismo an-

3536. Demostrar que la loxodrómica

$$\lg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{4\pi} \quad (k = \cos \pi st),$$

donde φ es la longitud y ψ la latitud del punto de la esfera, corta todos os meridianos de la esfera bajo un ángido constante.

3537. Hallar la tangente del ángulo formado por la reeta tangente a la curva.

$$z = f(x, y), \quad \frac{x - y_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y}{\sin \alpha},$$

en el punto Mo (x0, y0) y el plano Oxy, donde f es una función diferenciable.

3538. Hallar la derivada de la función

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

en el punto M (1, 2, -2) en dirección de la recta tangente a la curva

$$x=t$$
, $y=2t^2$, $z=-2t^4$.

en este punto,

Escribir las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las siguienles superficies en los puntos indicados.

3539. $z = x^2 + y^2$, en el punto M_0 (1, 2, 5).

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, en el punto M_0 (3, 4, 12)

3541. $z = \operatorname{arcig} = \frac{y}{z}$; en el punto $M_0 \left(1, 1, \frac{\pi}{4} \right)$.

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3543, $z - y + \ln \frac{x}{z}$, en el panto M_0 (1, 1,-1)

3544. 2 + 4 2 = = 8; en el punto Ma (2, 2, 1)

3545, $x = a \cos \psi \cos \varphi$, $y = b \cos \psi \sin \varphi$, $z = c \sin \psi$; en el punto $M_{\alpha}(\varphi_0, \psi_n)$

3546, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r \operatorname{cig} \alpha$; en el punto $M_0(\varphi_0, r_0)$.

3547. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, x = av; en el punto $M_0(u_0, v_0)$.

3548. Hallar la posición límite del plano tangente a la superficie

$$y = u + v$$
, $y = u^2 + v^3$ $z = u^3 + v^3$

cuando e punto de contacto M(u,v) ($u\neq v$) se aproxima indefinidamente hacia el punto M_0 $(u_0 \mid u_0)$ de la línea del borde u=i de la siperficte.

3549. Hallar en la superficie

$$x^{2} + 2y^{3} + 3z^{2} + 2xy + 2xz + 4yz = 8$$

los puntos en los que los planos tangentes son paralelos a los planos coordenados.

3550 En nué punto del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3} + \frac{z^2}{c^4} = 1$$

la normal a éste forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

CAPITULO 6. CALCULO DIFFRENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

3551. Trazar los planos tangentes a la superficie

$$z^{2} + 2y^{2} + 3z^{2} = 21$$

que son paralelos al plano

$$x + 4y + 6z = 0$$

3552 Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz=a^2$ (a>0) forman con los planos coordenados un Litraedro de volumen constante

3553. Demostrar que los planos tangentes a la superficie

$$Vx + V\bar{y} + V\bar{z} = V\bar{a}$$
 $(a > 0)$

cortan en los ejes coordenados segmentos cuyas sumas son constante.
3554. Demostrar que los planos tangentes al cono

$$z = x f\left(\frac{b}{x}\right)$$

pasan por su vertice

3555. Demostrar que las normales a la superficie de revolución

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$
 $(f' \neq 0)$

se cortan con el eje de rotación.

3556. Hallar las proyecciones del elipsoide

$$x^{2} + y^{2} + z^{3} - xy - 1$$

sobre los planos coordenados.

3557. El cuadrado $(0 \le v \le 1, 0 \le y \le 1)$ se ha dividido en un numero finito de partes σ de diámetro $\le \delta$. Acotar superiormente el numero δ , si las direcciones de las normales a la superficie

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

en cualesquiera puntos $P\left(x,y\right)$ y $P_1\left(x_1\mid v_1\right)$, pertenecientes a una misma parte σ , differen menos de 1°

3558 Sea

$$z = f(x, y)$$
, donde $(x, y) \in D_1$ (!)

la ecuación de una superficie y $\varphi(P_1,P)$ el ángulo formado por las normales a la superficie (1) en los puntos $P(x,v) \in D$ y $P_1(x_1,y_1) \in D$.

Demostrar que, si el recinto D esta acotado y es cerrado y la función f(x, y) tiene derivadas acotadas de 2° orden en el recinto D, entonces se ventica la desigualdad de Liapunov

$$\varphi(P_1, P) \leqslant C\varrho(P_2, P), \tag{2}$$

donde C es una constante y p (P_1, P) es la distancia entre los puntos P y P_1

3559. ¿Bajo qué ángulo se cortan el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con la su perficie bz = xy en el punto común M_0 (x_0, y_0, z_0) ?

3560. Comprobar que las superficies coordenadas respectivas a las coordenadas esféricas

$$x^2 + y^2 + z^3 = r^2$$
, $y - x \lg \phi$, $x^3 - y^2 = z^2 \lg^2 \theta$

son ortogonales entre sí

3561 Comprobar que las esferas

$$x^{2} + y^{2} + z^{3} = 2ax$$
, $x^{3} + y^{3} + z^{3} = 2by$, $x^{3} + y^{2}$; $z^{2} - 2cz$

forman un sistema tnortogonal

3562. Por cada punto M(x, y) is pasan para $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ tres superficies de segundo orden

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0).$$

Demostrar que éstas son ortogonales entre si

3563 Hallar la derivada de la función u=x+y+z en la dirección de la normal exterior a la esfera

$$x^4 + y^2 + z^2 = 1$$

en su punto M_0 (x_0, y_0, z_0) .

¿Fn que puntos de la esfera la derivada normal de la función u tiene a) el valor máximo, b) el valor minimo, c) es igual a cero?

3564. Hallar la derivada de la función $u = x^2 + v^2 + z^2$ en la dirección de la normal exterior al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\mu^0}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \Longrightarrow 1$$

en su punto M_0 (x_0, y_0, z_0)

3565 Sean $\frac{\partial u}{\partial n}$ y $\frac{\partial v}{\partial n}$ las derivadas normales de las funciones u y ven un punto de la superficie F(x, y, z) = 0. Demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial n}(nv) = n\frac{\partial v}{\partial n} + v\frac{\partial n}{\partial n}.$$

CAPITULO 6 CALCULO DIFFRENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Hallar las envolventes de las familias monoparamétricas de las $eur_{VB_{ij}}$ planas

3566. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ (p = const).

3567. $(x-a)^2+y^2-\frac{a^2}{2}$.

3568. $y = kx + \frac{a}{k}$ (a = const). 3569. $y^{a} = 2px + p^{a}$.

3570. Hallar la curva envuelta por un segmento de longitud 4 cuyos extremos se deslizan sobre los ejes coordenados.

3571. Hallar la envolvente de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, de -área constante S.

3572. Hallar la envolvente de las trayectorias de un proyectil lanza de al vacío con una velocidad inicial ν_0 , al variar en el plano vertical el angulo de lanzamiento α

3573. Demostrar que la envolvente de las normales de una curva pla na es la evoluta de esta curva

3574. Avenguar el carácter de las curvas discriminantes de las families de líneas siguientes (e es un param, tro variable,

a) parábolas cúbicas y (1 (3)

b) parábolas semicubicas $v^2 = (x - e^{-3})$

c) parabolas de Neil $y^3 = (x + c)^2$

diestrofoides $(y + y)^2 = \chi^2 \frac{d - \chi}{d + \chi}$

3575. Determinar la envolvente de la familia de esferas de radios r cuvos centros están situados en la circunferencia $x - R \cos t$, $y = R \sin t$ z = 0 (t es un parâmetro, R > r)

3576. Hallar la envolvente de la familia de esferas

$$(x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 + (z - t \cos \gamma)^2 - 1$$

deade $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ y r es un parâmetro vanable

3577. Determinar la envolvente de la familia de elipsoides

$$\frac{x^4}{a^2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{h^2}{b^4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{e^2}{e^2} = 1,$$

de volumen constante V

3578. Hallar la envolvente de la familia de esferas de radio p_1 cayos centros están situados en la si perfícte del cono $x^2 + y^2 = z^2$

3579. Un punto lummoso esta situado en el origen de coordenadas Determinar el cono de la sombra arrojada por la esfera

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le R^2$$

 $s(x_0^2 + x_0^2 + z_0^2) > R^2$

3580. Hallar la envolvente de la familia de planos

$$z - z_{\scriptscriptstyle 0} := p \left(x - x_{\scriptscriptstyle 0} \right) + q \left(y - y_{\scriptscriptstyle 0} \right),$$

si los parâmetros p y q están ligados por la ecuación

$$p^2+q^2=1.$$

§ 6 Fórmula de Taylor

1.° Fórmula de Taylor. Si la función f(x, y) tiene en un entorno del punto (a, b) derivadas parciales continuas hasta el orden n + 1 inclusive, entonces en este entorno es válida la fórmula

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left[(x - a) \frac{\partial}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{i} f(a, b) + R_{n}(x, y), \quad (1)$$

donde

$$R_n\left(x,\,y\right) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\left(x-a\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y-b\right) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f\left(a+\theta_n\left(x-a\right), \, b+\theta_n\left(y-b\right)\right)$$

$$\left(0 < \theta_n < 1\right).$$

2° Serie de Tavior. Si la función f(x, y) es infinitamente diferenciable $y \stackrel{!}{=} R_n x \stackrel{!}{=} 0$, entonces esta función admite una expresión en forma de serie de potencias

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{i! \, j!} f^{(a,+j)}_{x^i y^j}(a, b) (x-a) (y-b)^j. \tag{2}$$

Los casos particulares de las formulas (1) v (2) para a=b+0 se llaman formula de Mus-Laurin y serie de Mus-Laurin respectivamente

Subsisten unas formulas análogas para las funciones de más de dos variables.

3. Puntos singulares de las curvas planas. Un punto M_0 (x_0, y_0) de una curva diferenciable F(y, y) = 0 se llama singular, si

$$F(x_0, y_0) = 0, F_{\infty}(x_0, y_0) = 0, F_{\infty}(x_0, y_0) = 0$$

Sea M_0 (x_0, y_0) un punto singular aislado y supongamos que

$$A = F_{xy}^* (x_{ax}, y_a), \quad B = F_{xy}^* (x_{ax}, y_a), \quad C = F_{xy}^* (x_a, y_a)$$

no son todos iguales a cero. Si

1) $AC - B^2 > 0$, M_0 es un punto aislado,

2) AC - B² < 0, M₀ es un punto doble (nodo),
 3) AC - B² = 0, M₀ es un punto de retroceso o un punto aislado

En el caso A = B = C = 0, son posibles unos upos más complicados de puntos singulares. Para las curvas que no pertenecen a la clase (12), pueden encontrarse singulandades de natura eza más complicada puntos de interrupción, puntos angulosos, etc.

Problemas:

3581. Desarrollar la función $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ segun la fórmula de Taylor en un entorno del punto A(1, -2).

3582. Desarrollar la función $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2 + 3xyz$ segun la fórmula de Taylor en un entorno del punto A (1, 1, 1)

3583. Hallar el incremento obtenido por la función f(x, y) = $= x^2y + xy^2 - 2xy$, all pasar de los valores x = 1, y = -1 a los valores $x_1 - 1 + h x_1 = 1 + k$

3584. Desarrollar f(x + h, y + k, z + l) según las potencias enteras positivas de h. k. l. si

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2F_{zz}$$

3585. Escribir los térm nos hasta el segundo orden inclusive del desarrollo de la función

$$f(x_1, y) = x^y$$

en un entorno del punto A(1,1)

3586. Desarrollar la funcion

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

segun la fórmula de Mac-Laurin hasta los términos de cuarto orden inclusive

3587. Deducir unas fórmulas de aproximación con precision hasta los términos de segundo orden para las expresiones

a)
$$\frac{\cos x}{\cos y}$$
; b) $\operatorname{arclg} \left(\frac{1}{x} + \frac{x+a}{x+y} \right)$

st v. e 1 v i son pequeños en comparación con L.

3588. Simplificar la expresion

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$$

considerando que v. y. z son pequeños en valor absoluto.

3589. Desarrollar la función

$$f(x, y) = \frac{1}{4} [f(x+h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h)] + f(x, y-h) - f(x, y)$$

gegún las potencias de h con precisión hasta h^4 .

3590. Sea f(P) = f(x, y) y $P_i(x_i, y_i)$ (i = 1, 2, 3) los vértices de un mangulo regular inscrito en una circunferencia con el centro en el purto P(x, y) y de radio ρ , siendo $x_1 = x + \rho$, $y_1 = y$. Desarrollar la fun-

$$F(Q) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)].$$

en potencias enteras positivas de ρ con exactitud hasta ρ^2

3591. Desarrollar la función

$$\Delta_{xy}f(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

según las potencias de h y k

3592 Desarrol ar la función

$$F(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x + \varrho\cos\phi, \ y + \varrho\sin\phi) \, d\phi.$$

según las potencias de p.

Desarrollar en serie de Mac-Laurin las siguientes funciones

3593.
$$f(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$$
.

3594.
$$f(x, y) = \ln(1 + x + y)$$
.

3595.
$$f(x, y) = e^x \sin y$$
.

3596.
$$f(x, y) = e^x \cos y$$

3597.
$$f(x, y) = s \circ x s h y$$

3598.
$$f(x, y) = \cos x \cosh y$$

3599. $f(x, y) = \sin (x^{2} + y^{3})$

3699.
$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$
.
 $g(x, y) = \ln(1 + x) \ln(1 + y)$.

3601. Escribir tres términos del desarrollo en sene de Mac-Laurin de

la función

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{p_y} dt$$

3602. Desarrollar la función exer en sene de potencias enteras positivas de los binomos x - 1 e y + 1.

CANTULO 6 CALCULO INFERENCIAL DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

3603 Escribir el desarrollo en sene de Taylor de la función fix, via = * en un entorno del punto M (1, 1)

3604. Sea x la función implícita de x e y, determinada por la ecuacion $z^3 - 2xz + y = 0$, que para x - 1, y = 1 toma el valor z = 1

Escribir unos cuantos términos del desarrollo de la función z en potencias crecientes de los binomios x 1 e y -1

Estudiar los tipos de puntos singulares de las siguientes curvas y inpresentar aproximadamente estas curvas

oresentar aproximadamente estas curvas
3605.
$$y^2 = ax^2 + x^3$$
. 3609. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2$
3608. $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ 3610. $(y - x^2)^2 = x^2$
3607. $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$. 3611. $(x - x)(y^2 - x^2)^2 = a + x(x^2)$
3603. $x^3 + y^4 = x^4$

3612 Estudiar la forma de la cuna $y^2 = (x - a)(x - b)(x \rightarrow c)$ en dependencia de los valores de los parâmetros a, b, c ($a \le b \le c$) Estudiar los puntos singulares de las curvas transcendentes

3613. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$. 3614. $y^2 = 1 - e^{-x^3}$. 3617. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$. 3819 y sn . 3615. у -- х п х

 $3619 \quad y^2 = 5 \text{ m } x^3$ $3620 \quad y^2 \quad 5 \text{ m}^2 x$. 3616. $y = \frac{\tau}{1 + \epsilon^{\tau}}$

§ 7. Extremos de una función de varias variables

1. Definición de extremo, Sea $f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función definida en un entorno del punto P_0 Si $f(P_0) > f(P)$, o bien $f(P_0) <$ $\leq I(P)$, para $0 \leq p(P_0, P) \leq \delta$, se dice que la funcion f(P) tiene un extremo (un máximo o un mínimo, respecta amente) en el punto P_ϕ

2. Condición accesaria de extrei o Una función diferenciable (P) puede tener extremo solamente en un punto estacionario P_0 , o sea, en an punto tal que $df(P_0) = 0$. Por consiguiente, los puntos de extremo de la función f(P) satisfacen al sistema de ecuaciones $f_{V_I}(x_1, \dots, x_n)^*$ $-\mathfrak{J}_{11} = \{1, ..., a\}$

3.º Condición suficiente de extremo. La función f (P) tiene en el pur-

a) un máximo, si $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$ para $\sum_{i=1}^n |dx_i| \neq 0$.

b) an arrange, so $df(P_a) = 0$, $d^2f(P_a) > 0$ para $\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$,

La avenguación del signo de la diferencial de segundo orden $d^2f\left(P_0
ight)$ quede efectuarse mediante una reduccion de la forma cuapratica corespondiente à la forma canónica.

En particular, para el caso de una función f (x, y) de dos variables independentes xey en el punto estac onario (x_0, y_0) (af $(x_0, y_0) = 0$) con la condicion $D = AC - B^2 \neq 0$, donde $A - f_{xx} = (x_0, y_0)$. $B = f_{xy}^{(i)}(x_0, y_0), C = f_{yy}^{(i)}(x_0, y_0), \text{ se tiene}$

- 1) un mínimo, si D > 0, A > 0 (C > 0).
- 2) un máximo, si D > 0, A < 0 (C < 0),
- 3) no hay extremo, si D < 0
- 4º Extremos condicionados. El problema de a determinación de los extremos de la fonc (n $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ habiendo una serie de relaciones $\varphi_i(P) = 0$ $i_i = 1$, m, m < n) se reduce a la basqueda de los ex tremos ordinarios para la función de Lagrange

$$L^{-P_1}=f_*P_1+\sum_{i=1}^m i \cdot q_i(P)$$

donde λ_i (i=1,...,n) son factores constantes. El problema de la existencia y el caracter del extremo condici il colo se requelve en el caso más elementai, basandose en el estudio del si no de la diferencial de segundo orden de L (Po en el punto estacionario Po de la tunt o a L (P), con ciones

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

5.º Extremos absolutos. Una función f (P), que es diferenciable en un recinto cerrado y acotado, alcanza sus valores máximo y minimo en este recinto en un pinto est iciorario o en un ponto de la frontera del recinto

Problemas

Avenguar los extremos de las siguientes funciones de varias variables:

3621.
$$z = v^2 + (v - 1)^2$$
. 3624. $z = v^2 + xy + v^2 - 2x + y$

3621.
$$z = x^2 + (x - 1)^2$$
.
3622. $z = x^2 + (x - 1)^2$.
3623. $z = (x - y + 1)^2$.
3626. $z = x^2 + y^2 + 3xy$

3627.
$$z = x^{2} + y^{3} - x^{2} - 2xy - y^{2}$$
.
3627.1. $z = 2x^{2} + y^{3} - x^{3} - 2y^{2}$.

3628.
$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$
 (x > 0, y > 0).

3629.
$$z = xy \sqrt{1 - \frac{x^3}{a^2} - \frac{y^3}{b^3}}$$
 ($a > 0, b > 0$).

3630.
$$z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$$

3631.
$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$
.

3632.
$$z = e^{2x+4y} (8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

3633.
$$z = e^{\kappa^2 - y} (5 - 2x + y)$$

3634.
$$z = (5x + 7y - 25) e^{-(x^2 + xy + y^2)}$$

3632.
$$z = e^{2x+4y} (8x^2 - 6xy + 3y^2)$$
.
3633. $z = e^{x^2 - y} (5 - 2x + y)$.
3634. $z = (5x + 7y - 25) e^{-(x^2 + xy + y^2)}$.
3635. $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

3636.
$$z = s \circ x + \cos y + \cos (x - y) \left(0 \le x \le \frac{\pi}{I}; \ 0 \le y \le \frac{\pi}{I}\right).$$

3637.
$$z = \sin x \sin y \sin (x + y)$$
 $(0 \le x \le \pi; 0 \le y \le \pi)$.

3638.
$$z=x-2y+\ln \sqrt{x^2+y^2}+3 \sec \frac{y}{x}$$
.

3639.
$$z = xy \ln (x^2 + y^2)$$

3640.
$$z = x + y + 4 \sin x \sin y$$

3641. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

3642.
$$u = x^2 + y^3 + z^3 + 2x + 4y - 6z$$
.

3643.
$$u = x^3 + y^3 + z^4 + 12xy + 2z$$

3642.
$$u = x^{2} + y^{3} + z^{2} + 2x + 4y - 6z$$
.
3643. $u = x^{3} + y^{3} + z^{3} + 12xy + 2z$
3644. $u = x + \frac{y^{2}}{4x} + \frac{z^{3}}{y} + \frac{2}{z}$ (x>0, y>0, z>0).

3645.
$$u = xy^2z^4 (a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0).$$

3646.
$$u = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^3}{b}$$

 $(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0).$

3647.
$$u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin (x + y + z)$$

 $(0 \le x \le \pi; \quad 0 \le y \le \pi; \quad 0 \le z \le \pi)$

3648.
$$x = x_1 x_1^2 \dots x_n^2 \quad (1 - x_1 - 2x_2 - \dots - nx_n)$$

 $(x_1 > 0, x_1 > 0, \dots, x_n > 0).$

3649.
$$u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$$

 $(x_i > 0, \ i = 1, 2, \dots, n).$

3650. Problema de Huygens Entre dos números positivos a y b hay que introducir n números x_1, x_2, \dots, x_n de tal modo que la fracción

$$\underline{u} = \frac{x_1 x_1 x_2 x_3}{(a + x_1)(x_1 - x_2) (x_n + b)}$$

sea maxima

Hallar los valores extremales de la función z de las variables y 1, deda en forma implícita

and the second section and the second section as the second section as the second section sect

3651.
$$x^2 + y^2 + z^3 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

3651.
$$x^2 + y^2 + z^3 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$
.
3652. $x^2 + y^3 + z^3 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.
3653. $(x^3 + y^3 + z^4)^2 = a^3(x^2 + y^3 - z^4)$.

3653.
$$(x^2 + y^3 + z^4)^2 = a^4(x^2 + y^2 - z^4)$$

Hallar los puntos de extremo condicionado para las siguientes funciones:

$$3654. \ z = xy$$
, $si \ x + y = 1$.

3654.
$$z = xy$$
,
3655. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, SI $x^3 + y^3 = 1$.

9656.
$$z=x^2+y^3$$
, Si $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

9857,
$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$
, si $x^2 + y^2 = 1$.

3657.
$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$
, si $x^2 + y^3 = 1$.
3657. 1. $z = x^2 + 12xy + 2y^3$. si $4x^2 + y^3 = 25$.

3658.
$$z = \cos^2 x + \cos^2 y$$
, si $x - y = \frac{\pi}{4}$

3658.
$$z = \cos^2 x + \cos^2 y$$
, $\sin x - y = 4$
3859. $u = x - 2y + 2z$, $\sin x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
3660. $u = x^m y^n z^p$, $\sin x - y = 4$

3660.
$$\mu = x^m y^n z^p$$
, 51

$$x + y + z = a \quad (m > 0, n > 0, p > 0, a > 0)$$

3661.
$$u=x^2+y^2+z^3$$
, SI

$$\frac{z^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^3} = 1$$
 $(a > b > c > 0)$

3662.
$$u = xy^{2}z^{3}$$
, si $x + 2y + 3z = a$

3663.
$$u = xyz$$
, 51 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.
3663.1. $u = xy$, yz , $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ ($x > 0$, $y > 0$ $z > 0$).

3664.
$$u = \sin x \sin y \sin z$$
, $\sin x + y + z = \frac{\pi}{2}$

3665.
$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2}$$
, $\forall i = x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

$$(a > b > c > 0, \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$$

$$(a > b > c > 0, \cos \alpha + \cos \beta +$$

$$\frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{\xi}{\cos \gamma}, \text{ donde } \cos^{2} \alpha + \cos^{2} \beta + \cos^{2} \gamma = 1.$$

3667.
$$n = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$
 S1

$$\frac{x_0}{a_1} + \frac{x_0}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \quad (a_i > 0; i = 1, 2, \dots, n).$$

3668.
$$n = x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p \quad (p > 1), \quad x_1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \ (a > 0).$$

3669.
$$a = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}$$
, Si

$$\beta_{i}x_{1} + \beta_{2}x_{2} + \ldots + \beta_{n}x_{n} = 1 \ (\alpha_{i} > 0, \ \beta_{i} > 0, \ x_{i} > 0, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n).$$

3670.
$$u = x_1^n (x_1^n \dots x_n^n n_i)$$
 so $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ $(a > 0, a_i > 1, i = 1, 2, \dots, n).$

3671. Hallar los extremos de la forma cuadrática

$$u = \sum_{i,j}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

con la condición

$$\sum_{i=1}^n x_i^i = 1.$$

3672 Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^n+q^n}{2} \ge \frac{x+y}{2} \frac{n}{l},$$

 $sin \ge 1 \ \forall \ x \ge 0, \ y \ge 0$

Indicación. Buscar el mínimo de la función $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ con la condiction x + v + s.

3673. Demostrar la desigualdad de Holder

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{k=1}^n x_i^k\right)^{\frac{1}{k^2}}$$

$$\left(a_{i} \geqslant 0, x_{i} \geqslant 0, d=1, 2, ..., n, k > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1\right)$$

Indicación Buscar el mínimo de la función

$$a = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x^k\right)^{\frac{1}{k^k}}$$

con la condición

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x := A$$

3674. Demostrar la designaldad de Hadamard para un determinante 4 = a (de orden n

$$A^* \leqslant \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^1\right).$$

Indicación. Examinar el extremo del determinante $A = |a_{ij}|$ con las conditiones:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{k} = S_{i} \{i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Determinar los valores máximo (sup) y minimo (inf) de las signientes funciones en los recintos indicados.

3675.
$$z = x - 2y - 3$$
, S1

so
$$0 \le x \le 1$$
, $0 \le y \le 1$, $0 \le x + y \le 1$.

3676.
$$z=x^2+y^2-12x+16y$$
, si $x^2+y^2 \le 25$.

$$35/6$$
. $z = x^2 - xy + y^2$, st $|x| + |y| \le 1$.

3676.
$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$
, 51×7
3677. $z = x^2 - xy + y^2$, $51 |x| + |y| \le 1$
3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $51 |x^2 + y^2 + z^3 \le 100$.
3679. $u = x + y + z$, $51 |x^2 + y^3 \le z \le 1$.

3680. Hallar el infimo (inf) y el supremo (sup) de la función

$$u := (x + y + z) e^{-\sqrt{x} + 4y + 12y}$$

en a región x > 0, y > 0, z > 0

3681. Comprobar que la función $z = (1 + e^y) \cos x + y e^y$ tiene un conjunto infinito de meximos y ningún mínimo

3682. Les suficiente para el mínimo de una función f(x, x) en un punto M_0 (x0. 10) que esta función tenga minimo a lo largo de cada recta que pasa por el punto Mo?

Examinar el ejemplo $f(x, y) = (x - y^2) (2x - y^2)$

3683. Descomponer un numero positivo dado a en n factores pos. tivos de tal modo que la suma de sus inversos sea mínima.

3684. Descomponer un número positivo dado a en n sumandos de tal modo que la suma de sus cuadrados sea mínima.

3685. Desco nponer un número positivo dado a en a factores postivos de tal modo que la suma de unas potencias positivas dadas de dichos factores sea mínima

3686 Se dan " puntos materiales en el plano P_1 (x_1, y_1) , $P_2(x_2, y_2), \dots P_n(x_n, x_n)$ cuy as masas son iguales a m_1, m_2, \dots, m_n

¿Cuál tiene que ser la posición del punto P (v. 1) para que el morespectivamente. mento de mercia del sistema respecto de este punto sea mínimo?.

3687. Cuales deben ser las dimensiones de ima bahera rectangu ar abierta de una capacidad dada 1', para que su superficie sea minima?

3688) Chales deben ser las dimensiones de una banera cilíndrica

abierta, con una sección transversal semicircular, cuya superficic es $_{\rm 1DQ}$ a S, para que su capacidad sea máxima?

3690. Un cuerpo consta de un cilindro circular recto que temmo con un cono circular recto. Dada la superficie total del cuerpo, iguil; Q, determinar sus dimensiones de tai modo que su volumen sea máximo.

3691. Un cuerpo, cuyo volumen es igual a V, representa un parile lepípedo rectangular recto, cuyas bases inferior y superior vienen les minadas por pirámides regulares y cuadrangulares iguales. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación de las caras laterales de las pirámides respecto de sus bases, para que la superficie total del cuerpo sea mínima?

3692) Hal ar un rectangalo de un perímetro dado ? p, de tal modo que al guar alrededor de uno de sus lados se forme un cuerpo de volumen máximo

3693) Haliar un friangulo de un perimetro dado 2 p, de môdo que al girar alrededor de uno de sus lados se forme un cuerpo de volumen máximo.

3694. Inscribir en una semiesfera de radio R un paralelepípedo no tangular de volumen máximo

3695. Inscribir en un cono circular tecto un paralejepípedo rectangular de volumen máximo.

3696. Inscribir en el elipsoide

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^4}{c^2} = 1$$

un paralelepípedo de volumen máximo.

3697. Inscribir en un cono circular recto, cuya generatriz I forma un angulo α con el plano de la base, un parale epipedo rectangular ta, que su superficie total sea maxima

3698. Inscribir en el segmento de paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{v^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$ z z c un parafelepípedo rectangular de volumen máximo

3699. Hallar la distancia mínima del punto M_0 (x_0, y_0, z_0) al plano $4x + B_1 + Cz + D = 0$

3700. Determinar la distancia mínima d entre dos rectas en el espa-

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{p-p_1}{n_2} = \frac{p-r_2}{p_2}$$

$$x - \frac{x_2}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

Hallar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta x = y - 2 = 0

3702. Hallar los semuejes de una curva central de segundo orden $Ax^4 + 2Bxy + Cy^2 = 1.$

3703. Hallar los semiejes de una superficie central de segundo orden
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1$$

3704. Determinar el área de la elipse formada en la intersección del cilindro

$$\frac{x^t}{a^2} + \frac{y^t}{b^2} = 1$$

y el plano

$$Ax + By + Cz = 0$$

3705. Determinar el área de la sección del el psoide

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 1$$

por el piano

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$
,

donde

$$\cos^{4}\alpha + \cos^{4}\beta + \cos^{4}\gamma = 1$$
.

3706. Según el principio de Fermat, la luz que sale del punto A y que mode en el punto B se propaga por aquella curva, para cuyo recorrido se invierta el tjempo mínimo.

Supomendo que los puntos A y B están situados en distintos medios opticos, divididos por un plano, siendo la velocidad de propagación de la luz en el primer medio igual a P1 y en el segundo igual a P2, deducir la ley de refracción de la luz.

3707 ¿Cuál debe ser el angulo de incidencia para que la desviación del rayo luminoso (o sea, el ángulo formado por el rayo incidente y el rayo emergente) que pasa por un prisma, que tiene el ángulo de refracción o y el índice de refracción o, sea mínima.

3708. Las variables x e y satisfacen a una ecuación lineal

$$y = ax + b$$

cuyos coeficientes se necesitan determinar. Como resultado de una serio de mediciones de igual precisión de las magnitudes x e y se han obtenido los valores x_i , y_i (i = 1, 2, ..., n)

Aplicando el método de los cuadrados mínimos, determinar los valores más probables para los coefficientes a v b

Indicación. Según el metodo de los cuadrados mínimos, los valores más probables de los coeficientes a y b son aquellos para los que la su ma de los cuadrados de los errores.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (ax_{i} + b - y_{i})^{2}$$

es mínima

3709. En el plano se ha dado un sistema de n puntos M_i (x_i, y_i) (i = 1, 2, ..., n)

Cuál debe ser la posición de la recta

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho = 0$$

para que la suma de los cuadrados de las desviaciones de los puntos dados de esta recta sea mínima?

3710. Sustituir aproximadamente la función x^2 en el intervalo (1,3) por una función lineal ax + b, de tal modo que la desviación absoluta

$$\Delta = \sup |x^n - (ax + b)| \qquad (1 \le x \le 3)$$

sea min.ma

4 100

7 INTEGRALES PARAMETRICAS

§ 1. Integrales propias paramétricas

I. Continuidad de la integral. Si la función f(x, y) está definida y es continua en la región acotada $R[a \le x \le A, b \le y \le B]$, entonces

$$F(y) = \int_{a}^{\pi} f(x, y) dx$$

representa una función continua en el segmento $b \leqslant y \leqslant B$

2.º Derivación bajo el signo de la integral Si, además de lo indicado en 1º, la derivada parcial $f_v^+(x,y)$ es continua en la región R, entonces, para b < y < B, se verifica la formula de Leibniz:

$$\frac{d}{dy}\int_{a}^{A}f(x, y) dx = \int_{a}^{A}f_{y}'(x, y) dx.$$

En el caso más general, en que los límites de integración son funciones diferenciables $\varphi(y)$ y $\psi(y)$ del parámetro y, y $a < \varphi(y) < A$, $a < \psi(y) < A$ para b < y < B, se tiene

$$\frac{d}{dy}\int_{0}^{d}\int_{0}^{dy}f(x,y)\,dx =$$

$$= f\left(\psi\left(y\right),\,y\right)\,\psi'\left(y\right) + f\left(\phi\left(y\right),\,y\right)\,\phi'\left(y\right) + \int\limits_{\psi\left(y\right)}^{\psi\left(y\right)} f_{y}'\left(x,\,y\right)\,dx \qquad (b < y < b).$$

3.º Integración bajo el signo de la integral. En las condiciones 1º, se tiene

$$\int_{a}^{B} dy \int_{a}^{A} f(x, y) dx = \int_{a}^{A} dx \int_{b}^{B} f(x, y) dy.$$

Problemas:

3711. Comprobar que la integral de la función discontinue $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$

$$F(y) = \int_{a}^{b} f(x, y) dx$$

es una función continua. Construir la gráfica de la función u = F(y)3712. Estudiar la continuidad de la función

$$F(y) = \int_{0}^{2} \frac{y/(x)}{x^2 + y^2} dx_1$$

donde f(x) es una función continua y positiva en el segmento [0, 1], 3713. Hallar

a)
$$\lim_{x\to 0} \int_{0}^{1+x} \frac{dx}{1+x^2+a^2}; \qquad c) \lim_{x\to 0} \int_{0}^{x} x^2 \cos \alpha x \, dx;$$

c)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{n} x^{n} \cos \alpha x \, dx$$
;

b)
$$\lim_{x \to 0} \int_{0}^{1} \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$$

b)
$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$$
; d) $\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1} \frac{cx}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$.

3713.1. Hallar

$$\lim_{R \to \infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta,$$

3714. Sea f(x) una función continua en el segmento $\{A, B\}$, Demos trar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{a}^{x} [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a) \quad (A < a < x < B).$$

3714.1. Supongamos que: 1) $\varphi_n(x) \ge 0 (n = 1, 2, ...) e_n [-1, 1], 2$ $\varphi_n(x) \Longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ en $0 < \varepsilon \le |x| \le 1, 3$) $\int |\varphi_n(x)| dx \longrightarrow 1$ cuando n --- > 00.

Demostrar que, si $f(x) \in C[-1, 1]$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f(x)\,\varphi_{n}(x)\,dx=f(0).$$

3715. ¿Es posible efectuar el paso al límite bajo el signo integral en la expresión

$$\lim_{y \to \infty} \int_{0}^{1} \frac{x}{y^{2}} e^{-\frac{x^{2}}{y^{2}}} dx?$$

3716. ¿Es posible calcular por la regla de Leibniz la derivada de la función

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} \, dx$$

para y = 0?

3717. Calcular F'(x), si

$$F(x) = \int_{0}^{x^{n}} e^{-xy^{n}} dy.$$

3718. Calcular F' (α), si

a)
$$F(\alpha) = \int_{x-\alpha x}^{\cos x} e^{\alpha x} e^{-x^2} dx$$
 c) $F(\alpha) = \int_{0}^{\pi} \frac{\ln(x-\alpha x)}{x} dx$,

b)
$$F(\alpha) = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \pi x}{x} dv$$
,

d)
$$F(\alpha) = \int_0^a f(x + \alpha, \quad v - \alpha) dv$$
;

e)
$$F(\alpha) = \int_{0}^{\alpha^{3}} dx \int_{x=-2}^{x+\alpha^{2}} s.\pi(x^{2} + y^{2} - \alpha^{2}) dy$$

3719. Hallar F" (x), s1

$$F(x) = \int_{0}^{x} (x+y) f(y) dy,$$

donde f(x) es una función diferenciable.

3720. Hallar F '(v), st

$$F(x) = \int_{0}^{b} f(y)^{\top} x - y \, dy,$$

donde $a < b \ y \ f(y)$ es una función continua en [a, b].

3721. Hallar F" (x), si

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta \quad (h > 0),$$

donde f(x) es una función continua

3722. Hallar $F^{(n)}(x)$, si

$$F(x) := \int_{0}^{x} f(t)(x-t)^{n-x} dt,$$

3722.1. Demostrar la fòrmula

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_{0}^{x}y^n\cos\left(y+\frac{n\pi}{2}\right)dy \qquad (n=1, 2, \ldots). \quad \{1\}$$

Aplicando la fórmula (1), obtener la cota

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{para } x \in (-\infty, +\infty).$$

3703. Sustituir aproximadamente la función $f(x) = x^2$ en el segmento $1 \le x \le 3$ por la función líneal a + bx, de tal modo que

$$\int_{x}^{x} (a + bx - x^{2})^{2} dx = \min.$$

3724 Obtener una formula de aproximación de la forma

$$\sqrt{1+x^2} \approx a + bx$$
 $(0 \leqslant x \leqslant 1)$

de modo que la desviación media cuadratica de las funciones a + bx y $\sqrt{1 + x^2}$ en el segmento dado [0, 1] sea min.ma

3725. Hahar las derivadas de las integrales elipticas totales

$$E(k) = \int_{0}^{\frac{\pi}{k}} \int_{0}^{\infty} 1 - k^{\frac{\pi}{k}} \sin^{2} \varphi \, d\varphi$$

У

$$F(k) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^{2} \sin^{2} \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

y expresarlas mediante las funciones E(k) y F(k)

Comprobar que E (k) satisface a la ecuación diferencial

$$E''(k) + \frac{1}{k}E''(k) + \frac{E'(k)}{1-k!} = 0.$$

3726. Demostrar que la función de Bessel de índice entero n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \cos(n\varphi - x \sin\varphi) d\varphi$$

satisface a la ecuación de Bessel

$$x^2 J_n^*(x) + x J_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

3727. Sea

$$I(\alpha) = \int_{0}^{\pi} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha - x}},$$

donde la función $\varphi(x)$ es continua junto con su denvada $\varphi'(x)$ en el segmento $0 \leqslant x \leqslant a$

Demostrar que, para $0 < \alpha < a$, se tiene

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_{0}^{\pi} \frac{\varphi(x)}{1/\alpha - x} dx.$$

Indicación, Hacer $x = \omega t$

3728. Comprobar que la función

$$u(x) = \int_{a}^{b} K(x, y) v(y) dy.$$

donde

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{si } x \leq y; \\ y(1-x), & \text{si } x > y, \end{cases}$$

y P (y) es continua, satisface a la ecuación

$$u'(x) = -x(x) \quad (0 \le x \le 1).$$

3729. Hallar F " (x, y), st

$$F(x, y) = \int_{-\frac{x}{y}}^{xy} (x - yx) f(z) dz,$$

donde f(z) es una función diferenciable

3730. Sea f(x) una función dos veces diferenciable y F(x) una función diferenciable.

Demostrar que la función

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{z - at}^{z + at} F(z) dz$$

satisface a la ecuación de las vibraciones de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} := d^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y a las condiciones iniciales. $u(x, 0) = f(x), u'_t(x, 0) = F(x)$

3731. Comprobar que, si la función f(x) es continua en el segmento [0, l] y $(x - \xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ para $0 \le \xi \le l$, entonces la función

$$\mu(x, y, z) = \int_{0}^{z} \frac{1}{\sqrt{x - \frac{1}{2}y^{2} + z^{2}}}$$

satisface a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Aplicando la derivación respecto del parámetro, calcular las siguientes integrales

3732.
$$\int_{0}^{x} \ln (a^{2} \sin^{2} x + b^{2} \cos^{2} x) dx.$$
 3734.
$$\int_{0}^{x} \frac{\arctan (a \lg x)}{\lg x} dx.$$

3733.
$$\int_{0}^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^{2}) dx, \quad 3735. \int_{0}^{\pi} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \left(|a|_{1} < 1\right)$$

3736. Aplicando la fórmula

$$\frac{\operatorname{arctig}\,v}{v} = \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+\lambda^{2}x^{2}} \,,$$

calcular la integral

). INTEGRALES IMPROPIAS PARAMETRICAS, CONV. UNIFORME DE LAS INTEGRALES

3737. Aplicando el método de integración bajo el signo de la integral, calcular la integral

$$\int_{a}^{1} \frac{x^{b}-x^{a}}{\ln x} dx \quad (a>0, \quad b>0).$$

3738. Calcular las integrales

$$\mathrm{a)}\,\int\limits_{a}^{1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^{b}-x^{a}}{\ln x}\,dx;\quad \mathrm{b)}\,\int\limits_{a}^{x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^{b}-x^{a}}{\ln x}\,dx\quad (a>0,\,b>0).$$

3739. Sean F(k) y E(k) las integrales elípticas totales (véase el problema 3725). Demostrar las formulas

a)
$$\int_{a}^{k} F(k) h dk = E(k) - k^{2} F(k);$$

b)
$$\int_{a}^{b} E(k) k dk = \frac{1}{3} \{(1 + k^{2}) E(k) - h^{2} F(k) \},$$

donde $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. Demostrar la fórmula

$$\int_{a}^{x} x J_{a}(x) dx \Longrightarrow x J_{a}(x),$$

donde $J_0(x)$ y $J_1(x)$ son las funciones de Bessel de índices 0 y 1 (véase el problema 3726).

§ 2. Integrales impropias paramétricas. Convergencia uniforme de las integrales

1.º Definicion de convergencia uniforme. Una integral impropia

$$\int_{a}^{+\infty} \int (x, y) dx, \qquad (1)$$

donde la funcion f(x, y) es continua en la region $a \le x < +\infty$, $y_1 < y_2$, se llama uniformemente convergente en el intervato

 (y_1,y_2) , si para qualquier $\epsilon>0$ existe un número B=B (ϵ) tal que, para qualquier $b\geqslant R$, se tiene

$$\Big|\int_{b}^{+\infty} f(x, y) dx\Big| < s \quad (y_1 < y < y_2).$$

La convergencia uniforme de la integral (1) es equivalente a la convergencia uniforme de todas las series de la forma.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x_1 \ y) \ dx, \tag{2}$$

donde $a=a_0 < a_1 < a_2 < . < a_n < a_{n+1} < .$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Si la integral (1, es uniformemente convergente en el intervalo en esta representa una función continua del para netro , en ese intervalo.

2" Criterio de Cauch). Para la convergencia uniforme de a riega, (1) en el intervalo (y_1, y_2) es necesario y suficiente que para che que $\varepsilon > 0$ exista un número B = B (e) tal que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} /(x,y) \, dx < \varepsilon \text{ para } y_1 < y < \dots$$

sempre que b' > B y b'' > B

3° Criterio de liveierstrass. Para la convergencia un forme de la mtegral (1) es suficiente que exista una función mayorante F(x), ro dependiente del parámetro x, tal que

$$2) \int_{0}^{+\infty} F(x) dx < +\infty,$$

4. Se verifican unos teoremas similares para las integrales impropias de las funciones discontinuas.

Problemas

Determinar los campos de convergencia de las integrales:

3741
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dv$$
 3743. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x^7}{4x^7} dv$ 3744. $\int_{-1+x^2}^{\infty} \frac{1}{1+x^7} dv$

INTEGRALES IMPROPIAS PARAMETRICAS, CONV. UNIFORME DE LAS INTEGRALES

3745.
$$\int_{0}^{1} \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^{2}}} dx$$
 3746.
$$\int_{0}^{1+\infty} \frac{\sin x}{x^{p} + \sin x} dx \, (p > 0).$$

Comparando con series, averiguar la convergencia de las siguientes integrales

3747.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x + \hat{u}} dx.$$
 3749.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{p_{1}^{+}} \frac{\sin (x + x^{2})}{x^{p_{1}^{+}} \frac{\sin (x + x^{2})}{x^{p_{1}^{+}}}} dx.$$
 3748.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^{p_{1}^{+}} \sin^{2} x} (n > 0).$$
 3750.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin (x + x^{2})}{x^{p_{1}^{+}}} dx.$$

3751. Enunciar en sentido positivo qué significa que la integral

$$\int_{a}^{+\infty} f(x,y) \, dx$$

es convergente, pero no uniformemente, en el intervalo (3 1, 32).

3752. Demostrar que, si 1) la integral

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \, dx$$

es convergente y 2) la función $\phi(x,x)$ está acotada y es monótona respecto de x, entonces la integra:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) \varphi(x, y) dx$$

es aniformemente convergente (en la región correspondiente).

3753. Demostrar que la integral uniformemente convergente

$$I = \int_{-y^{2}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^{2}} \left(x - \frac{1}{y}\right)^{2}} dx \quad (0 < y < 1)$$

no puede may orarse por una integral convergente que dependa de un parámetro.

3754. Comprobar que la integral

$$I = \int_{0}^{+\infty} de^{-\alpha x} dx$$

CAPITULO 7 NIEGRALES PARAMETRICAS

1) es uniformemente convergente en cualquier segmento $0 < a \le a \le b$; 2) es convergente, pero no uniformemente, en el segmento $0 \le a \le b$;

3755. Demostrar que la integral de Dirichlet

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx$$

1) is uniformemente convergente un cada segmento [a,b] que no contenga el valor $\alpha = 0$, y 2) es convergente, pero no uniformemente en cada segmento [a, b] que contenga el valor $\alpha = 0$

3755 1. Estud ar la convergencia uniforme de la integra.

$$\int_{-x^{\bar{a}}}^{\infty} dx$$

en los siguientes intervalos, a) $1 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty$; b) $1 < \alpha < +\infty$

3755 2. Avenguar si es uniformemente convergente la integral

$$\int_{1}^{1} \frac{dz}{z^{\alpha}} \text{ para } 0 < \alpha < 1.$$

3755 3. Comprobar que la integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{n}+1}$$

és convergente, pero no uniformemente, en el intervalo 1 < a < + ... Avenguar si son uniformemente convergentes las siguientes integrales en los intervalos indicados

$$3756. \int_{0}^{+\infty} e^{-2x} \sin x \, dx \quad (0 < \alpha_{d} \le \alpha < \frac{1}{1} \infty).$$

$$8757. \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \, (\alpha \le \alpha \le b). \quad 8758. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^{2}} dx \, (-\infty < \alpha < \frac{1}{1} \infty).$$

$$3759. \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)^{2} + 1} \, (0 \le \alpha < \frac{1}{1} \infty).$$

$$3760. \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} \, dx \quad (0 \le \alpha < \frac{1}{1} \infty).$$

BINTEGRALES IMPROPIAS PARAMETRICAS CONVIENTEGRALES

3760.1.
$$\int_{-x}^{\infty} \frac{\ln^p x}{\sqrt{x}} dx \quad (0 \le p \le 10).$$

8761.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi \frac{\cos \pi}{x^p}} dx \quad (0 \le \alpha < +\infty), \text{ donde } p > 0 \text{ está fijado.}$$

3762.
$$\int \sqrt{a}e^{-ax^2} dx \quad (0 \le a < +\infty).$$

3753.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^3} dx; \ a) \ a < \alpha < b; \ 6) -\infty < \alpha < +\infty.$$

37.64.
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}(1+y^{2})} \sin x \, dy \quad (-\infty < x < -\infty).$$

3765.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{s_{1} a_{2} x^{2}}{1 + x^{2}} dx \quad (p \ge 0).$$

3765... Elegir un número b > 0 de tal modo que

$$0 < \int_{1+z^n}^{+\infty} \frac{dx}{1+z^n} < \epsilon$$
 para $1, 1 \le n \le 10$, donde $\epsilon = 10^{-\epsilon}$.

3766.
$$\int_{a}^{1} x^{p} \cdot \ln^{q} \frac{1}{x} dx, \text{ a) } p \gg p_{a} > 0 \text{ thr} > 0 \quad (q > -1).$$

3767.
$$\int_{0}^{1} \frac{x^{n}}{1 + x^{2}} dx \quad (0 \le n < +\infty).$$

3768.
$$\int_{0}^{1} \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^{n}} \quad (0 < n < 2).$$

3769.
$$\int_{-2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\alpha} dx}{(x-1)(x-2)^{2}} \left(|\alpha| < \frac{1}{2} \right).$$

3770.
$$\int_{1}^{x} \frac{\sin \alpha x}{|x-\alpha|} dx \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$$

3771. Una integral se llama uniformemente convergente para un valor dado del parâmetro, si es uniformemente convergente en cierto entorno de este valor. Demostrar que la integral

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{a \, dx}{1 + x^2 x^4}$$

es uniformemente convergente para cada valor $\alpha \neq 0$ y no es uniforme. mente convergente para \alpha \cdot 0

3772. ¿Es lícito el paso al límite bajo el signo de la integra en la e xpresión

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx?$$

3773. La función f(x) es integrable en el intervalo (0, + ∞). Demos trar la fórmula

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx \Longrightarrow \int_{0}^{+\infty} f(x) dx.$$

3773.1. Demostrar que, si f'(x) es absolutamente integrable en $[a, +\infty]$, entonces existe $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

3774. Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_{x}^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0,$$

sif(x) es absolutamente integrable en el intervalo $(0, +\infty)$

3775. Demostrar que, si i) $f(x, y) \Rightarrow f(x, y_0)$ en cada interiato

into (a, b) 2)
$$f(x, x) | \leq F(x)$$
, donde $\int_{a}^{\infty} F(x) dx < + \infty$ entopies

$$\lim_{y\to y_0}\int_{a}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_{a}^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\,dx.$$

3776. Calcular la integral

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}} dx = \int_{0}^{+\infty} \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{x^{2}}{n} \right)_{n}^{-n} \right] dx,$$

sirviendose del paso al límite bajo el signo de la integral,

3776 1. Sea f (v) una función continca y acotada en [0, + 60] De mostrar que

$$\lim_{y \to 0} \int_{0}^{2} \int_{x^{4} + y^{2}}^{4 + \infty} dx = f(0).$$

I INTEGRALES IMPROPIAS PARAMETRICAS CONV. UNIFORME DE LAS INTEGRALES

3776.2. Hallar

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty\frac{dx}{x^n+1}.$$

3777. Demostrar que la integral

$$F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

es una función continua del parámetro a,

3777.1. Comprobar que

$$F(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^{\alpha}} dx$$

es una función continua en el intervalo $0 < \alpha < 1$.

3778. Determinar los puntos de discontinuidad de la función

$$F(a) = \int_{0}^{+\infty} s^{3} \frac{(1-\sigma^{2})z}{z} dx.$$

Construir la gráfica de la función y = F(a).

Avenguar si son continuas las siguientes funciones en los intervalos indicados:

8779.
$$F(\alpha) = \int_{1}^{4\pi} \frac{x \, dx}{1 + x^2}$$
 para $\alpha > 2$.

8789.
$$F(\alpha) = \int_{-x^{\alpha}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}} dx$$
 para $\alpha > 0$

3781.
$$F(\alpha) = \int_{0}^{x} \frac{\sin x}{x^{2} (x - x)^{2}} dx$$
 para $0 < \alpha < 2$

3782.
$$F(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(\sin x)^2} dx$$
 para $0 < \alpha < 1$.

3783.
$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2} dx$$
 para $-\infty < \alpha < +\infty$

§ 3. Derivación e integración de integrales impropías bajo el signo integral

1.° Derivación respecto del parametro. Si 1) la función f(x, y) es continua junto con su derivada $f_y'(x, y)$ en la región $a \le x < +\infty$ $y_1 < y < y_2$, 2) $\int_a^b f(x, y) dx$ es convergente; 3) $\int_a^b f_y'(x, y) dx$ es uniformemente convergente en el interva o (y_1, y_2) , entonces

$$\frac{d}{dy}\int_{0}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{0}^{+\infty} f_{y}'(x, y) dx$$

para y1 < y < y2 (regla de Leibniz)

2. Fórmula de integración respecto del parámetro. Si 1) la función f(x, y) es continua para $x \ge a$, $y_1 \le y \le y_2$; 2) $\int f(x, y) dx$ es uniformemente convergente en el segmento finito $[y_1, y_2]$, entonces

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\alpha}^{+\infty} f(x, y) dx \approx \int_{\alpha}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy.$$

Si $f(x, y) \ge 0$, entonces la fórmula (1) también es válida para un intervalo infinito (y_1, y_2) , suponiendo que las integrales interiores en la igualdad (1) son continuas y uno de los miembros de la igualdad (1) existe.

Problemas.

3784. Aplicando la fórmula

$$\int_{0}^{1} x^{n-1} dx = \frac{1}{n} (n > 0),$$

calcular la integral

$$I = \int_{0}^{1} v^{n-1} \ln^{m} x \, dx$$
, donde m es un número natural.

3785. Aplicando la fórmula

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2 + a} (a > 0),$$

3. DER EINTEG. DE INTEGRALES IMPROPIAS BAIO EL SIGNO INTEGRAL

calcular la integral

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \text{ donde } n \text{ es un número natural}$$

3786. Demostrar que la integral de Dirichlet

$$I(\alpha) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx$$

admite derivada para $\alpha \neq 0$, sin embargo, no puede hallarse mediante la regla de Leibniz

Indicación. Hacer $\alpha x = y$.

3787. Comprobar que la función

$$F(\alpha) = \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 - x - \alpha x^2} dx$$

es continua y diferenciable en la región

$$-\infty < \alpha < -\infty$$

3°88. Basándose en la igualdad

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy,$$

calcular la integral

$$\int_{a}^{\infty} e^{-\frac{ax}{x}} \frac{e^{-bx}}{x} dx \ (a > 0, b > 0).$$

3789. Calcular la integral de Frullani

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \qquad (a > 0, b > 0),$$

donde f(x) es una función continua y la integral $\int_{x}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ existe para cualquier A > 0.

Aplicando la formula de Fruilani, calcular las integrales.

3790.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \qquad (a > 0, b > 0).$$
3791.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \qquad (a > 0, b > 0)$$
3792.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx \qquad (a > 0, b > 0).$$

Aplicando el método de derivación respecto del parámetro calcular as s guientes integrales.

3793.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^{3}} - e^{-\beta x^{3}}}{x} dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0).$$
3794.
$$\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^{3} dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0).$$
3795.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$
3796.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Calcular las integrales

$$3797. \int_{0}^{z} \frac{\ln(1-\alpha^{2}x^{2})}{x^{2}} dx \quad (|\alpha| \le 1). \quad 3799. \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^{2} \sqrt{x^{2}-1}} dx.$$

$$3798. \int_{0}^{1} \frac{\ln(1-\alpha^{2}x^{2})}{\sqrt{1-x^{2}}} dx \quad (|\alpha| \le 1). \quad 3800. \int_{0}^{+\infty} \frac{-n(\alpha^{2}+x^{2})}{\beta^{2}+x^{2}} dx.$$

$$3801. \int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x \cot \alpha x}{x^{2}} dx. \quad 3802. \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^{2}x^{2}) \ln(1+\beta^{2}x^{2})}{x^{2}} dx.$$

3803. Calcular la integral de Euler-Poisson

$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

basándose en la fórmula

$$P = \int_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2y^2} dy.$$

Sirviéndose de la integral de Euler-Poisson, hallar las integrales:

3804.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+xbx+c)} dx \quad (a>0, ac-b^2>0).$$
3805.
$$\int_{+\infty}^{+\infty} (a_1x^3+2b_1x+c_1) e^{-(ax^3+xbx+c)} dx \quad (a>0, ac-b^2>0).$$
3806.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^3} \cosh bx dx \quad (a>0). \quad 3807. \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a>0).$$
3808.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax^3}-e^{-\frac{a}{2}x^2}}{x^2} dx \quad (a>0, \beta>0).$$
3809.
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx (a>0). \quad 3810. \int_{0}^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx dx (a>0).$$

3811.
$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx \quad (n \text{ es un número natural})$$

8811.1. Demostrar que

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} \int_{b}^{a} e^{-a\pi t^{2}} dt = \sqrt{\frac{n}{a}} \quad (a>0, b>0).$$

3812. Basándose en la integral

$$I(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \ge 0),$$

calcular la integral de Dirichlet

$$D(\beta) \Longrightarrow \int_{a}^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

3812 î. ¿Que forma tiene, aproximadamente, la gráfica del sene integral

$$y = Si x$$
,

donde

$$\operatorname{SL} x = \int_{-t}^{x} \sin t \, dt.$$

CAP TULO 7 INTEGRALES PARAMETRICAS

Sirviéndose de las integrales de Dirichlet y Frullani, calcular la integrales:

3813.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ix^{3}} - \cos \beta x}{x^{3}} dx$$
3817.
$$\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^{3} dx$$
3818.
$$\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^{3} dx$$
3818.
$$\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^{3} dx$$
3819.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx$$
3819.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x^{3}} dx$$
3820.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \sin \alpha x}{x} dx$$
3821.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$
3822.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^{3}} dx$$
3821.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$
3822.
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^{3}} dx$$
3823.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

3823. Haliar el factor discontinuo de Dirichlet

$$D\left(x\right) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\pi} \sin \lambda \cos \lambda x \, \frac{d\lambda}{\lambda}$$

para diversos valores de x. Construir la gráfica de la función v = D(x). 3824. Calcular las integrales

1) v. p.
$$\int_{\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx$$
; b) v. p.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx$$
.

3825 Aplicando la fórmula

$$\frac{1}{1+x^{1}} = \int_{0}^{+\infty} e^{-y(1+x^{2})} dy,$$

calcular la integral de Laplace

$$L = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^{2}} dx.$$

THE REINTEG, DE INTEGRALES IMPROPIAS BAIO EL SIGNO INTEGRA

3826. Calcular la integral

$$L_1 = \int_1^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx.$$

Calcular las integrales.

8827.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^{2} x}{1+x^{2}} dx,$$
 3828.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^{2})^{3}} dx.$$
8829.
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^{2}+2bx+c} dx \qquad (a > 0, ac - b^{2} > 0).$$

3830. Aplicando la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_{0}^{+\infty} e^{-xyz} dy \quad (x > 0),$$

calcular las integrales de Fresnel

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^{2}) dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{V x} dx$$

У

$$\int_{0}^{+\infty} \cos(x^{3}) dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

Hallar las integrales:

3831.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^4 + 2bx + c) dx \qquad (a \neq 0).$$
3832.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^4 \cdot \cos 2ax dx. \qquad 3833. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^4 \cdot \cos 2ax dx.$$

3834. Demostrar las fórmulas:

1)
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^{2} - x^{2}} dx = \frac{\pi}{2a} \sin ax; \quad 2) \int_{0}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^{2} - x^{2}} dx = -\frac{\pi}{2} \cos ax,$$

donde $a \neq 0$ y las integrales tienen el sentido del valor principal de Canchy.

3835. Hallar la transformada de Laplace

$$F(p) = \int_{1}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \qquad (p > 0)$$

para la función f(t), si

- a) $f(t) = t^n$ (n es un número natural),
- b) $f(t) = V \tilde{t}$

e) $f(t) = \cos t$:

- c) $f(l) = e^{\epsilon l}$; f) $f(l) = \frac{1 e^{-t}}{\epsilon}$;
- d) $f(t) = (e^{-tt};$
- e) $f(0) = \sin \alpha V \vec{l}$

3836. Demostrar la fórmula (integral de Lipschitz)

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-at} J_{a}(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^{3} + b^{3}}} \quad (a > 0),$$

donde $J_0\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x\,\sin\,\phi\right)\,d\phi$ es la función de Bessel de índice 0

(véase el problema 3726).

3837. Hallar la transformada de Weierstrass

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy,$$

 S_{λ}

- a) f(y) = 1; c) $f(y) = e^{xay}$;
- b) $f(y) = y^2$; d) $f(y) = \cos ay$.

3838. Los polinomios de Chébichev-Laguerfe se definen por la fórmulas

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

3839. Calcular la integral

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{(x - t)^2}{\sigma_2^2} \right]} d\xi$$

$$(\sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0),$$

de mucha importancia en la teoría de probabilidades.

3840. Sea f(x) una función continua y absolutamente integrable en el intervalo (- eo, + oo).

Demostrar que la integral

$$\mu(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

satisface a la ecuación de propagación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y a la condición inicial

$$\lim_{x\to x^0} u(x, t) \Longrightarrow f(x).$$

§ 4. Integrales eulemanas

1.º Función Gamma Para x > 0, se tiene

$$\Gamma(x) := \int_{x}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

La propiedad fundamental de la función Gamma se expresa por la formula de reducción

$$\Gamma\left(x+1\right)=x\Gamma\left(x\right).$$

Si n es un número entero positivo, se tiene:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

2.5 Fármula de los complementos. Si x no es un número entero, se tiene

$$\Gamma(z)\Gamma(1 \rightarrow z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Esta fórmula permite definir la función Gamma para valores negativos del argumento

3° Función Beta Para x > 0 e y > 0, se tiene.

$$B(x,y) := \int_{0}^{1} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Se venfica la fórmula

$$B\left(x,\ y\right) = \frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x\ \gamma\ y\right)}\;.$$

Problemas.

3841. Demostrar que la función Gamma, $\Gamma(x)$, es continua y admite depos das continuas de todos los órdenes en la region x > 0

3842. Demostrar que la función Beta, B(x, y), es continua y admiternadas continuas de todos los órdenes en la región x > 0, y > 0.

Aplicando las integrales eulenanas, calcular las siguientes integrales

\$843.
$$\int_{0}^{\infty} \sqrt{x-x^{2}} \, dx$$
3847.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2}dx}{1+x^{4}}$$
5844.
$$\int_{0}^{\pi} x^{2} \sqrt{a^{2}-x^{2}} \, dx \, a > 0$$
3848.
$$\int_{0}^{\pi} \sin^{6} x \cdot \cos^{4} x \, dx$$
3846.
$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^{2}} \, dx$$
3847.
$$\int_{0}^{\pi} x^{2} \sqrt{a^{2}-x^{2}} \, dx \, a > 0$$
3848.
$$\int_{0}^{\pi} x^{2} \sqrt{a^{2}-x^{2}} \, dx$$
3849.
$$\int_{0}^{\pi} \sqrt{a^{2}-x^{2}} \, dx \, a > 0$$

3850. $\int_{0}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^{2}} dx$ (n es un número entero positivo)

Determinar el campo de existencia y expresar mediante las integrales julenanas las siguientes integrales

3851.
$$\int_{x}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^{n}} dx \ (n > 0). \quad 3852. \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{n}} dx.$$

3853.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{m}dx}{(x+bx^{n})^{p}} \quad (a > 0, b > 0, n > 0).$$
3854.
$$\int_{0}^{b} \frac{(x-a)^{m}(b-x)^{n}}{(x+c)^{m+n+2}} dx$$
3861.
$$\int_{0}^{1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{p} dx.$$
(0 < $a < b$, $c > 0$).
3862.
$$\int_{0}^{1} \frac{x^{p}e^{-ax} \ln x dx}{(a > 0)}.$$
3863.
$$\int_{0}^{1} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx.$$
3864.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx.$$
3857.
$$\int_{0}^{1} te^{n} x dx.$$
3864.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p}e^{-ax} \ln x dx}{(1+a\cos x)^{n}} dx$$
3864.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x^{1}} dx.$$
3865.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{p-1}}{(1+a\cos x)^{n}} dx$$
3866.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{p-1}}{(1+a\sin x)} dx.$$
3860.
$$\int_{0}^{\infty} x^{m}e^{-x^{n}} dx.$$
3866.
$$\int_{0}^{1} \frac{x^{p-1} - x^{p-1}}{(1+a\sin x)} dx.$$

$$\lim_{\epsilon \to +\infty} |B(p, \epsilon) - B(1-p, \epsilon)|$$

$$3867. \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\sinh \alpha x}{\sinh \beta x} dx \quad \{0 < \alpha < \beta\}. \quad 3869. \int_{\alpha}^{\sigma+1} \ln \Gamma(x) dx \quad (a > 0).$$

$$3868. \int_{\epsilon}^{1} \ln \Gamma(x) dx, \quad 3870. \int_{\epsilon}^{1} \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx.$$

$$3871. \int_{\epsilon}^{1} \ln \Gamma(x) \cos 2\pi x dx \quad (n \text{ es un mûmero natural}).$$

Demostrar las igualdades

3872.
$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} \cdot \int_{0}^{1} \frac{x^{2} dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \frac{\pi}{4}.$$

3873.
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^{4}} dx \cdot \int_{0}^{+\infty} x^{7} e^{-x^{4}} dx = \frac{\pi}{8 \sqrt{2}}.$$

3874.
$$\prod_{m=1}^{n} \int_{0}^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^{n}} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} (2n)^{\frac{n-1}{2}}.$$

3875.
$$\lim_{n \to \infty} \int_{A}^{+\infty} e^{-x^{n}} dx = 1$$
.

Simiéndose de la igualdad $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{0}^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt (x > 0)$ calcular las integrales

3878.
$$-\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx$$
 (0 < m < 1).

3877.
$$\int_{a}^{\pm \frac{\pi}{2}} \frac{\sin ax}{x^m} dx \qquad (0 < m < 2).$$

3878. Demostrar las fórmulas de Euler

a)
$$\int_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t}\cos s\cos (\lambda t\sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^{x}}\cos \alpha x;$$

b)
$$\int\limits_{0}^{+\infty}t^{x-1}e^{-\lambda t}\cos^{\alpha}\sin\left(\lambda t\sin\alpha\right)dt=\frac{\Gamma_{\lambda}(\lambda)}{\lambda^{2}}\sin\alpha x$$

$$\left(\lambda > 0 \quad x > 0, \quad -\frac{\tau}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

3879. Hallar la longitud del arco de la curva

 $r^n = a^n \cos n\phi$ (a > 0, n es natural)

3880. Hallar el area de la figura limitada por la curva

$$|x|^n + |y|^n = a^n$$
 $(a > 0, a > 0).$

§ 5. Fórmula integral de Fourier

le Representación de una función mediante la integral de l'ouner Si, i) la función f(x) está definida en el cje $-\infty < x < +\infty$, 2) es continua a trozos junto con su derivada f'(x) en cada intervalo finito y continua a trozos junto con su derivada f'(x) en cada intervalo finito y continua a trozos juntos con su derivado $(-\infty, +\infty)$ entonces, en 3) es absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ entonces, en todos sus puntos de continuidad, la función admite una representación en forma de integral de Fourier

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(\lambda)\cos \lambda x + b(\lambda)\sin \lambda x] d\lambda, \tag{1}$$

donde

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi \, d\xi \quad , \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi.$$

En los puntos de discontinuidad de la función f(x), el primer miembro de la fórmula (1) debe ser sustituido por

$$\frac{1}{2} \{ f(x + 0) + f(x + 0) \}.$$

Para una función par f (x), teniando en cuerta la observación expuesla respecto de los puntos de discontinuidad, la formula (1) toma la forma

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} a(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda, \tag{2}$$

donde

$$a_1\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_{a}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda_{\lambda}^{\xi} d\xi.$$

Similarmente, para una función impar f(x), resulta

$$f(x) = \int_{a}^{\infty} b(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda, \tag{3}$$

donde

$$b(\lambda) = \frac{2}{n} \cdot \int_{0}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi \, d\xi.$$

CAPITULO 7. INTEGRALES PARAMETRICAS

2.° Representación de una función mediante la integral de Found en el intervalo $(0, +\infty)$. Una función f(x), definica en e. ntervalo $(0, +\infty)$ y continua a trozos junto con su derivada f'(x) en cada intervalo finito $(a, b) \in (0, +\infty)$, absolutamente integrable en $(0, +\infty)$, puede representarse en el intervalo dado según se quiera o mediante la fórmula (2) (prolongación par), o bien mediante la fórmula (3) (prolongación impar).

Problemas

Representar las siguientes funciones mediante la integral de Fourie-

3881.
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0, & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$
3882.
$$f(x) = \begin{cases} sgn x, & \text{si} \quad x < 1; \\ 0, & \text{si} \quad x_1 > 1. \end{cases}$$

3853.
$$f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) - \operatorname{sgn}(x - b)$$
 (b > a

3884.
$$f(x) = \begin{cases} h\left(1 - \frac{|x|}{g}\right), & \text{si } |x| \leq c, \\ 0, & \text{si } |x| > a. \end{cases}$$

3885.
$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$$
 $(a > 0)$. 3886. $f(x) = \frac{\pi}{a^2 + x^3}$ $(a > 0)$

3687.
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si} \quad , x, \leqslant \pi; \\ 0, & \text{si} \quad |x| > \pi. \end{cases}$$

3553.
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{si} \quad |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3889.
$$f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t, & \text{si} \quad |t| \leq \frac{2\pi \pi}{\omega}, \\ 0, & \text{si} \quad |t| > \frac{2\pi \pi}{\omega} \quad (n \text{ es un número natural}). \end{cases}$$

3890.
$$f(x) = e^{-\alpha |x|}$$
 $(\alpha > 0)$.

3891.
$$f(x) = e^{-x/x} |\cos \beta x| (\alpha > 0)$$
. 3893. $f(x) = e^{-x^2}$.

3892.
$$f(x) = e^{-x+x} \sin \beta x (\alpha > 0)$$
. 3894. $f(x) = xe^{-x^2}$.

3895. Representar la función

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 < x < +\infty)$$

mediante la integral de Fourier, prolongándola de tal modo que resulte a) par, b) impar,

Hallar la transformada de Fourier

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-tt\pi} dt$$

para la función f(t), si.

3896.
$$f(x) = e^{-x}$$
 if $(\alpha > 0)$. 3898. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
3897. $f(x) = xe^{-\alpha/x}$ ($\alpha > 0$) 3899. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\cos \alpha x$

3900. Hallar las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, si

a)
$$\int_{0}^{+\infty} \varphi(y) \cos xy \, dy = \frac{1}{1+x^{2}};$$
b)
$$\int_{0}^{+\infty} \psi(y) \sin xy \, dy = e^{-x} \quad (x > 0).$$

§ 1. Integrales dobles

l° Calculo directo de una integral doble. Se llama integral doble de una función continua f(x,y), extendida a un recinto cuadriculable cerrado y acotado Ω , al número

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{\substack{\max i \ i \neq j \ i \neq j}} \sum_{i=0}^{j} \sum_{i} f(x_i, y_j) \, \Delta x_i \, \Delta y_j,$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_f = y_{f+1} - y_f$ y la suma se extiende a aquellos valores de l'y f para los quales $(x_i, y_f) \in \Omega$. Si el recinto Ω -viene dado por las designaldades.

 $a \leqslant x \leqslant b$, $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$.

donde $\{x\} \in \mathcal{Y}_2(X)$ son funciones continuas en el segmento [a,b] entonces a integral doble correspondiente puede calcularse segun la fórmula

$$\int_{\mathbb{R}} \int f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}}^{b} dx \int_{y_{1}(x)}^{y_{1}(x)} f(x, y) \, dy.$$

2ª Cambio de variables en la intégral doble. Si las funciones, con diferenciales continuas,

$$\chi =_{\Xi} \chi \left(g_{A} (p), \quad g =_{\Xi} g_{A}(x, | \mathbf{t}) \right)$$

realizan una transformación biyectiva del recinto cerrado y acotado Ω del plano Oxv en el recinto Ω' del plano Ouv, y el jacobiano

$$I = \frac{D(t^i, \mu^i)}{D(t, \nu)} = 0.$$

entonces se ventica la fórmula

$$\iint_{\Omega} f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} f(x,y), \ y(\mu, v)) \mid I \mid d\mu \, dv.$$

len particular, para el caso del paso a coordenadas polares r y φ según las fórmulas $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, se tiene

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x,y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} f(r\cos \varphi, r\sin \varphi, r dr d\varphi,$$

Problemas.

3901. Calcular la integral

considerándo a como el límite de las sumas integrales, dividiendo el recinto de integración en cuadrados mediante las rectas

$$z = \frac{l}{n}$$
, $y = \frac{l}{n}$ $(l, j = 1, 2, ..., n - 1)$

y tomando los valores de la función subintegral en los ertices de a derecha de estos cuadrados.

3902. Formar las sumas integrales, la inferior S_1 , a superior \overline{S}_2 para la función $f(x,y)=x^2+y^2$ en el recinto $1 \le x \le 2$, $1 \le x \le 3$, dividiendo éste en rectángulos mediante las rectas

$$x = 1 + \frac{t}{n}$$
, $y = 1 + \frac{2f}{n}$ $(i, j = 0, 1, ..., n)$

¿A qué son iguales los límites de estas sumas cuando $n \to \infty^3$ 3903. Calcular aproximadamente la integral

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{3}+Y} \sqrt{\frac{dx\,dy}{24+x^{2}+y^{3}}},$$

aproximando el recinto de integración por un sistema de cuadrados insentos, cuyos vértices. 4,/ esté i situados en sos pri tos enteros, y tomando los vilores de la función subintegral e , los vences de estos cuadrados que está i más mejados del ongen de coordinadas. Companí el resultado obtenido con el valor exacto de la integral.

3904. Calcular aproximadamente la integral

$$\iint_{S} \sqrt{x+y} \, dS,$$

donde S es el triángulo limitado por las rectas x = 0, y = 0, x + y + 1, dividiendo el recinto S por las rectas x = const, y = const, x + y = const, en cuatro triángulos iguales y tomando los valores de la función subintegal en los centros de gravedad de estos triángulos.

3905. El recinto $S_{\{x^2+y^2\leq 1\}}$ está dividido en un número finito de par es cuadriculables ΔS_i $(i=1,2,\dots,n)$ de diámetro menor que δ . Para qué valor de δ puede garantizarse la validez de la desigualdad

$$\left| \int_{S} \sin (x + y) dS - \sum_{i=1}^{n} \sin (x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001,$$

donde x_i , y_i) $\in \Delta S_i$? Calcular las integrales.

3906.
$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} (x+y) dy. \quad 3907. \int_{0}^{1} dx \int_{x^{2}}^{1} xy^{2} dy.$$

3908.
$$\int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\pi} r^{2} \sin^{2} \phi \, dr.$$

3909. Demostrar la igualdad

$$\iint\limits_{R} X(x) Y(y) dx dy = \int\limits_{a}^{4} X(x) dx \cdot \int\limits_{b}^{B} Y(y) dy,$$

n R es el rectángulo

$$a \leq x \leq A, b \leq y \leq B.$$

3910. Calcular

21

$$I = \int_{a}^{A} dx \int_{b}^{B} f(x, y) dy,$$

 $f(x, y) = F_{xy}^*(x, y)$

3911. Sea f(x) una función continua en el segmento $a \le x \le b$ Demostrar la designaldad

$$\left[\int_{a}^{b} f(x) dx\right]^{b} \leq (b-a) \int_{a}^{b} f^{b}(x) dx,$$

donde el signo de igualdad solamente se ventica si f(x) = const.

Indicación, Examinar la integral

$$\int_{0}^{b}dx\int_{0}^{b}[f(x)-f(y)]^{2}dy.$$

3912. Qué signo tienen las integrales

a)
$$\iint_{(x^{\frac{1}{2}}+1)^{y}} \ln(x^{\frac{3}{2}}+y^{2}) dx dy, \quad b) \iint_{x^{\frac{1}{2}}+y^{2} \le 4} \sqrt[y]{1-x^{\frac{3}{2}}-y^{2}} dx dy,$$

c)
$$\int_{\substack{0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 - x}} \operatorname{arcsin}(x+y) \, dx \, dy \, dx$$

3913. Hallar el valor medio de la función

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

en el cuadrado $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$.

3914. Aplicando el teorema del valor medio actitar la infigral

$$I = \int_{\{x + 1\}} \int_{1 \le 10} \frac{dx \, dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

3915. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia de un punto del círculo $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$ al origen de courée nadas. En los ejercicios 3916-3922 hay que conocar los l'mites de integra-

ción en la integral doble $\iint f(x,y) dx dy$, en uno y otro orden, para los recurtos indicados O

- 3916. Ω es el triángulo con los vértices O (0, 0), A (1, 0), B (1, 1).
- 3917. Ω es el triángulo con los vértices O (0, 0), A (2, 1), B (-2, 1).
- 3918. Ω es el trapecio con los vértices O (0, 0), A (1, 0), B (1, 2). C(3, 1)
- 3919. Ω es el eficalo $x^2 + y^2 \le 1$, 3920. Ω es el círculo
- 3921. Ω es el segmento parabólico limitado por las curvas $y=v^2$, 1 = 1.
 - 3922. Ω es el antilo circular $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

3923. Demostrar la formula de Dirichlet

$$\int_{0}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} f(x,y) dx = \int_{0}^{\infty} dy \int_{0}^{\infty} f(x,y) dx \quad (a > 0).$$

Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales.

8924.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x, y) dy.$$
8928.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x, y) dy.$$
8929.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x, y) dy.$$
8929.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x, y) dy.$$
8920.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x, y) dy.$$
8930.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1} f(x, y) dy.$$
8927.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1-x^{2}} f(x, y) dy.$$
8931.
$$\int_{x}^{1} dx \int_{x}^{1-x} f(x, y) dy.$$

Calcular las signientes integrales.

 $y^2 = 2px$ y la recta $x = \frac{p}{2} (p > 0)$

3933. $\iiint_{\mathbb{T}} \frac{dx \, dy}{\frac{N_0 - x}{n}} \quad (a > 0), \text{ s. el recinto } \Omega \text{ está limitado por el}$ ano más pequeño de la ciscunferencia con el centro en el punto (a, a) que es tangente a los ejes de coordenadas, y los ejes de coordenadas

3934. $\iint ||xy|| dx dy$, si Ω es an círculo de radio a con el centro en el origen de coordenadas.

3935. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy, \text{ si } \Omega \text{ es un paralelogramo con los lados}$ y = x, v = x + a, v = a, v = 3a (a > 0).

3936. $\iint |v|^2 dx dv$, si Ω està limitado por el eje de abscisis y el primer arco de la cicloide

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2n)$$

CARITULO 8, INTEGRALES MULTIPLES Y CURVILINEAS

Pasar en la integral doble

$$\iint \int _{\mathcal{X}} f(x,y) \, dx \, dy$$

a coordenadas polares r, φ , haciendo $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, y cologir los límites de integración, si:

3937 Ω es el circulo $x^2 + y^2 \le a^2$

3938. Ω es el círculo $x^2 + y^2 \le ax (a > 0)$.

3939. Ω es el anillo $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

3940. Ω es el triángulo $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x$

3941. Ω es el segmento parabólico – $x \leqslant x \leqslant a$ $\frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant a$.

3942 En que caso, después de pasar a coordenadas polares, los limites de integración resultan constantes?

Pasar a coordenadas po ares $r \varphi$, baciendo $x r \cos \varphi$. $r \sin \varphi y$ colocar los nimites de integración en ano y otro orden en las aguientes integrales.

3943.
$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} f(x, y) dy$$
. 3945. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^{2}} f(\sqrt{x^{2} + y^{2}}) dy$. 3944. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} f(x, y) dy$. 3946. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^{2}} f(x, y) dy$.

3947. $\iint_{Q} f(x, ..., dx) dy$, donde el recinto Ω esta limitado por la cuma

$$(x^{2} + y^{2})^{2} = a^{2}(x^{2} - y^{2}) \quad (x \ge 0)$$

Suponiendo que r y φ son coordenadas polares, cambiar el orden de integración en las siguientes integrales

8948.
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{a \cos x} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$
8949.
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{a \sin x} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$$

8950. $\int_{0}^{\pi} d\phi \int_{0}^{\pi} f(\phi, r) dr$ (0 < a < 2π).

Pasando a coordenadas polares, sustituir las integrales dobles por

9951.
$$\iint_{x^2+y^2 \le z} f(\sqrt{x^2+y^2}) \, dx \, dy.$$

3952.
$$\iint f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy, \, \text{rae } \Omega = \{ , y \leq |x|; \, |x| \leq 1 \}.$$

3953.
$$\int\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \int \left(\frac{y}{x}\right) dx dy.$$

Pasando a coordenadas polares, calcular las siguientes integrales dobles.

3954.
$$\iint_{\mathbb{R}^3_++y^2\leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy. \quad 3955. \iint_{\mathbb{R}^3\leq x^2+y^2\leq x^2} s \, n \, \sqrt{x^3+y^2} \, dx \, dy.$$

3956. El cuadrado $S \{a \le x \le a + h, b \le y \le b + h\}, (a > 0, b > 0)$, mediante el sistema de funciones

$$u = \frac{y^k}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

se transforma en un recinto S' Hallar la razón del area del recinto S' al área del recinto S. $_6$ A qué es igual el limite de esta razón cuando $h \rightarrow 0$?

En lugar de x, y, introducir las nuevas variables u, y, y determinar los límites de integración en las sigulentes integrales dobles

8957.
$$\int_{a}^{b} dx \int_{ax}^{5x} f(x, y) dy \quad (0 < a < b; \quad 0 < \alpha < \beta), \quad \text{SI}$$

$$u = x, \quad \phi = \frac{y}{a}.$$

8958.
$$\int_{0}^{\pi} dx \int_{y-x}^{y-x} f(x, y) dy, \quad \text{so} \quad u = x + y, \quad v = x - y.$$

8959. $\iint f(x, y) dx dy$, si el recinto Ω está limitado por las curvas

$$y = \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0 \ (a > 0), \text{ si}$$

 $x = a \cos^{n} v, y = a \sin^{n} v.$

3960. Comprobar que la sustitución de variables

$$x+y=\xi, y=\xi\eta$$

transforma el triángulo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$ en el cuadrado unidad $0 \le \xi \le 1$, $0 \le \eta \le 1$.

3961. Para qué sustitución de las variables el cuadrilátero mixilineo. Ilimitado por las curvas xy=1, xy=2, x-y+1=0, x-y+1=0, x-y+1=0 (x>0, y>0), se transforma en un rectangulo con los lados paralelos a los ejes de coordenadas?

Efectuando la sustitución correspondiente de las variables, reducir las

integrales dobles a ordinarias.

3962.
$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y) \, dx \, dy.$$

3963.
$$\iint_{a^2+y^2\leq 1} f(ax+by+c) dx dy (a^2+b^2\neq 0).$$

3964 $\iint_{\Omega} f(x_1) dx dy$, donde el recinto Ω esta limitado por as

3965. $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, donde el recurso Ω está imitado por is

$$x^3 + y^3 = x + y.$$

3966.
$$\iint_{|x|+|y| \le 1} (|x|+|y|) dx dy.$$

3967. $\iint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \quad \text{donde el recinto } \Omega \text{ esta limitado}$ por la elipse $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^2} = 1$.

3968.
$$\iint_{x^4+y^1 \leq 1} (x^4 + y^4) dx dy.$$

3969. $\int_{a}^{b} (x+y) dx dy, \text{ double el recinto } \Omega \text{ está limitado por las }$ curvas $y^2 = 2x$, x + y = 4, x + y = 12.

3970. $\int_{\mathbb{R}} \int xy \, dx \, dy, \quad \text{donde el recinto } \Omega \text{ está limitado por las curvas}$ $xy = 1, x + y = \frac{5}{2}.$

3971. $\iint_{\substack{0 \le x \le y \\ 0 \le y \le z}} |\cos(x + y)| dx dy.$

3972.
$$\iint\limits_{x^3+y^2\leq 1} \left| \frac{x+g}{\sqrt{2}} - x^2 - y^3 \right| dx dy. \quad 3973. \quad \iint\limits_{\substack{|x|=1\\0\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y-x^2|} \, dx dy.$$

Calcular las integrales de las funciones discontinuas

3974.
$$\iint_{x^2+y^2 \le 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) \, dx \, dy.$$

3975.
$$\int_{\substack{0 \le x \le x \\ 0 \le y \le x}} [x + y] dx dy. \qquad 3976 \quad \int_{\substack{x \le x \le x \\ 0 \le y \le x}} V(y - x^{1}) dx dy.$$

3977. Demostrar que

$$\int\limits_{x^{n}+x^{n}\leq\sigma}\int\limits_{x^{n}}x^{n}y^{n}\,d\,c\,dy=0,$$

si m y n son números enteros positivos y al menos uno de ellos es impar.

3978, Hallar

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} \int_{y^2 + y^2 \le x^2} f(x, y) dx dy,$$

donde f(x, y) es una función contanua.

3979, Hailar F' (t), st

$$F(t) = \int\limits_{\substack{0 \le x \le t \\ 0 \le y \le t}} \int\limits_{0}^{tx} e^{y} dx dy$$

3980. Hallar F' (1), 81

$$F(t) = \inf_{\{x = t^{\alpha} + Q = 0^{\alpha} \leq 1\}} \sqrt{x^{\alpha} + y^{\alpha}} \, dx \, dy.$$

3981 Hallar F' (t), si

$$F(t) = \iint_{x^1 + y^2 \le t^2} f(x, y) \, dx \, dy \quad (t > 0).$$

3982. Demostrar que, si f(x, y) es continua, entonces la función

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{0}^{x} d\xi \int_{\xi - \xi + y}^{x + y - \xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}} = f(x, y).$$

3983. Supongamos que las líneas de nivel de la función f (x, y) son curvas elementales cerradas y que el recinto S (v1, v2) está limitado por as curvas f (x +) -1, y f (x, 1) -12

Demostrar que

$$\int_{S} \int_{\langle v_1, v_2 \rangle} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{V_1}^{v_2} v F'(v) \, dv,$$

donde F (x) es el área de la figura amitada por las curvas f (x v) = x $f(x, y) = y_2$

Indicación. Dividir el recinto de integración en partes, limitadas por líneas de nivel de la función f(x, y), infinitamente próximas entre sí.

Cálculo de áreas.

El area de un recinto S situado en el plano Oxy viene dado por a formula

$$S = \int \int_{\mathcal{C}} dx \ dx$$

Problemas

Hallar las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas

3984.
$$cy = a^2 - c + y = \frac{5}{2}a \ (a > 0).$$

3955.
$$y^2 = 2px + p^2$$
, $y^3 = 2qx + q^2(p > 0, q > 0)$.
8956. $(x - y)^2 + x^2 = a^2 - (a > 0)$.

3986
$$(x-y)^k + x^k = a^k \quad (a > 0).$$

Pasando a coordenadas polares, calcular las areas de las figuras limitadas por las siguientes curvas.

8987.
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$
. $x^2 + y^2 \ge a^2$.

3988.
$$(x^4 + y^4)^3 = x^2 + y^4, x \ge 0, y \ge 0.$$

9889.
$$(x^3 + y^2)^3 = a(x^3 - 3xy^3)$$
 $(a > 0)$.

3989.
$$(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$$
, $(x - a)^2 + (y - a)^2 \le a^2$ $(a > 0)$.

introduciendo las coordenadas polares generalizadas $r, \, \phi, \, \sec \hat{u}$ n las formulas

$$x = ar \cos^* \varphi$$
, $y = br \sin^* \varphi$ $(r \geqslant 0)$,

donde a, b y a son unes constantes adecuadamente elegidas y $\frac{D(z, y)}{U(z, \phi)} = cz abr \cos^{x-1} \phi \sin^{x-1} \phi$, hallar las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas (los parámetros se consideran positivos);

3891.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{b} + \frac{a}{b}$$
.

3992.
$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{L^3} = \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{k^2} - x = 0, y = 0$$

3993.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2} (x > 0, y > 0)$$

3994.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} (x > 0, y > 0).$$

3994. 1.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \frac{5}{c^4} + \frac{x^2 + 2}{c^4}\right)$$
 3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} \div \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$? $x = 0$ $y = 0$.

Efectuando un cambio de variables adecuado, hallar las áreas de las figuras limitadas por las curvas

3996.
$$x+y=a, x+y=b, y=ax, y=\beta x \ (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta).$$

3997.
$$xy = a^2$$
, $xy = 2a^2$, $y = x$ $y = 2x$ $(x > 0, y > 0)$

3998.
$$y^2 = 2px$$
, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2ry$, $x^2 = 2sy$ (0 < p < q : 0 < r < s).

3998.1.
$$x^2 = ay$$
, $x^2 = by$, $x^3 = cy^2$, $x^3 = dy^2$

3998.2.
$$y = ax^p$$
, $y = bx^p$, $y = ex^q$, $y = dx^q$.

$$0$$

8999.
$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$
, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$.

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{b}, \ 4\frac{c}{a} = \frac{a}{b} \ (a > 0, \ b > 0)$$

3999 1
$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4, \frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

 $8 \frac{x}{a} = \frac{y}{b} (x > 0, y > 0).$

4000. $\frac{z^3}{\lambda} + \frac{v^2}{\lambda - z^3} = 1$, donde λ toma los siguientes valores $\frac{1}{3} e^4$, $\frac{2}{3} e^4$, $\frac{4}{3} e^4$, $\frac{5}{3} e^4$ (x > 0, y > 0).

4001. Hallar el área de la figura limitada por la clipse

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_1x - b_1y + c_2)^2 = 1,$$

donde

420

$$\delta = a_1b_2 - a_2b = \ell$$

4002 Hallar el área de la figura (mitada por las elipses $\frac{x^2}{z_0} = \frac{v^2}{z_1 z_2} = c^2 (u_2 - u_1, u_2)$ y las hipérbo as $\frac{x^2}{z_0^2 z_0} = \frac{y^2}{z_1 z_2}$ $c^2 (z_1 - z_1, v_2) (0 < u_1 < u_2) = 0 < v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5 > 0$

Inux . 10n, Hacer

4003. Hallar el área de la sección de la superficie

$$x^2 + y^2 + z^4 - xy - xz - yz = z^2$$

porel plano r + y + z = 0

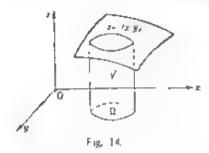
4004. Hallar el área de la sección de la superficie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

per el plano = 1 - 2(x + y).

§ 3. Cálculo de volumenes

El volumen de un calindroide, limitado por arriba por una superfice continua z = f(x, y), por abajo por el plano z = 0 y lateralmente por



una superficie cilíndrica recta, que corta en el plano Oxy un recimto cuadriculable Ω (Fig. 14), es igual a

$$V = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} (x, y) dx dy$$

Problemas.

4005. Dibujar el cuerpo cuyo volumen expresa la integra.

$$V = \int_0^x dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy.$$

4006. Representar los cuerpos cuyos volúmenes vienen expresados por las siguientes integrales dobles

a)
$$\int_{\substack{0 \le x + y \le 1 \\ x \ge 0, y \ge a}} (x + y) \, dx \, dy;$$
 d)
$$\int_{x^2 + y^3 \le x} \sqrt{x^3 + y^2} \, dx \, dy;$$

b)
$$\iint_{\frac{x^3}{4} + \frac{y^3}{4} \leqslant x} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4}} dx dy, \quad e) \quad \iint_{\substack{x \leqslant x \leqslant \frac{x}{4} \\ x \leqslant y \leqslant 2x}} \sqrt{x_y} dx dy;$$

c)
$$\iint_{|x|+|y| \le x} (x^2 + y^2) \, dx \, dy; \qquad f) \iint_{x^2 + y^2 \le 1} \sin x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies;

4007.
$$z=1+x+y$$
, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4008,
$$x + y \rightarrow z = a, x^{1} + y^{2} = R^{2}, x = 0, y = 0, z = 0 (a \ge R)$$
 ϵ .

$$4009, \ z = x^2 + y^2, \ y = x^2, \ y = 1, \ z = 0.$$

4010.
$$t = \cos x \cos y$$
, $z = 0$, $|x+y| \le \frac{\pi}{2}$, $|x-y| \le \frac{\pi}{2}$.

4011.
$$z = \sin \frac{\pi y}{6x}$$
, $z = 0$, $y = x$, $y = 0$ $x = \pi$

4012.
$$z = xy$$
, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

Pasando a coordenadas polares, hallar los volúmenes de los cuemlimitados por las siguientes superficies

4013.
$$z^2 = xy$$
, $x^2 + y^2 - a^2$.

4014.
$$z=x+y$$
, $(x^2+y^2)^2=2xy$, $z=0$ $(x>0, y>0)$.

4015.
$$z = x^2 + y^2$$
, $x^2 + y^3 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.
4016. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \ge a|x|$ $(a > 0)$.

4016.
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
, $x^2 + y^2 \ge a|x|$ $(a > 0)$

4017.
$$x^2 + y^2 - az = 0$$
, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$ $(a > 0)$.

4018,
$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$
, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$.

4019
$$z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}, z = 0.$$

$$y = x \lg \alpha$$
, $y = x \lg \beta$ $(a > 0, c > 0, 0 \le \alpha < \beta \le 2\pi)$

4020.
$$z=x^2+y^2$$
, $z=x+y$.

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguienas superficies (se supone que los parâmetros son positivos).

4021.
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{u^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(z > 0)$.

4022.
$$\frac{v^2}{a^2} + \frac{a^3}{b^4} - \frac{a^2}{c^2} = -1$$
, $\frac{a^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^3} = 1$.

4023.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^3} = \frac{z}{c}$$
, $\frac{x^2}{a^3} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{a}{b}$, $z = 0$.

4024.
$$\left(\frac{v^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^4}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1$$
, $z = 0$

4025.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{u}{b}\right)^2 + \frac{x^2}{a^2} = 1, x = 0 \quad x = 0$$

$$4026 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{a^2}{a^2}.$$

4027
$$z^2 - xy$$
, $x + y = a$, $x + y = b$, $0 < a < b$.

4028
$$z = x^2 + y^2$$
, $xy = a^2$, $xy = 2x^2$ $y = \frac{1}{2}$, $y = 2x$, $z = 0$

4029
$$z = cy$$
, $x^2 = y$, $x^3 = 2y$, $y^4 = x$, $y^4 = 2x$, $z = 3$

4030
$$-\sin\frac{\pi xy}{\sigma^2}$$
 $z=0$, $xy=a^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$, $0<\alpha<\beta$;

4031,
$$z = x^2 + y^2$$
, $z = 0$, $x + y = 1$ $x = 0$, $y = 0$.

4032.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1$$
, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1$, $z = 0$.

4033.
$$z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{z}$$
, $z = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{z}$ $(y \ge 0)$.
4033.1. $z = y e^{-\frac{xy}{a^2}}$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = m$, $y = n$, $z = 0$
 $(0 < n < n)$.
4034. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0)$.
4035. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0)$.

8 4. Cálculo de areas de superficies

1.º Caso de expresión explicita de una superficie. El área de una superficie lisa z = z(x, y) se expresa por la integral

$$S = \iint_{\mathcal{O}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{4} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}} \, dx \, dy,$$

donde \O es la provección de la superficie dada sobre el plano Oxy

2.º Caso de expression paramétrica de una superficie. Si la superficie viene dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x = x \; (x, \ v), \quad y = y \; (x, \ v), \quad x = x \; (x, \ v),$$

donde $(u, v) \in \Omega$. Ω es un recinto cerrado quadriculable y las funciones z, y, z admiten diferenciales continuas en el recinto Ω, entonces, para e área de la superficie se tiene la fórmula

$$S = \int \int V EG \overline{F^{\pm}} du dv,$$

donde.

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^{2},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^{2},$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Problemas:

4036. Hallar el área de la parte de la superficie az = yy, comprendida En el interior del cilindro $x^2 + x^2 = a^2$.

4037. Hallas el área de la superficie del cuerpo limitado por a_1 superficies $x^2 + z^2 = a^2$) $x^2 + z^2 = a^2$

4038. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ comprendida en el interior del cilindro $\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($b \le a$)

4039 Hallar el árma de la parte de la superficie z2 = 2xy cortada por los planos x + y = 1, x = 0, y = 0.

4040 Hallar el área de la parte de la superf de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situada fuera de los cilináros $x^2 + y^2 = \pm ax$ (problema de Viviani).

4041. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ comprend da en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

4042. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ comprendida en el interior del cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

4043. Hallar el área de la parte de la superficie $z = \frac{1}{9} (x^2 - y^2)$ recortada por los planos $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$

4044. Hallar el área de la parte de la superficie $x^2 + y^2 = 3az$ comprendida en el interior del cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 x^4$

4045 Hallar el área de la parte de la superficie x2 + 32 - a2 recorta da por los planos x + z = 0, x - z = 0 (x > 0, x > 0).

4045.1. Hallar el área de la parte de la superficie

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \sim z = 1$$

cortada por el plano z = 0.

4045 2. Hallar el área de la parte de la superfície

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{2} + \frac{2x}{c} = 1$$

recortada por los planos x = 0, y = 0, z = 0

4045.3. Hallar el área de la parte de la superficie

$$\frac{x^2}{a} = \frac{e^2}{2} = 2z_0$$

recortada por la superficie

$$\frac{x^2}{\hat{a}^2} + \frac{y^2}{\hat{b}^2} = 1 \quad (2 - 1).$$

4045 4 Hallar el area de la parte de la saperficie

$$s \in \mathbb{R} = s \in V \quad \text{sh} \ V_s$$

recortada por los planos $y = 1, y + 2 (c \ge 0)$.

4046. Hallar el área de la superficie y el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x^2 + y^2 - \frac{1}{3}z^2$, x + y + z = 2a (a >0).

4047. Hallar el área de la parte de la esfera limitada por dos paralelos y dos mendianos.

4048. Hallar ei área de la parte del helicoide

 $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, $z=h\phi$, dende 0<r< a, $0<\phi<2\pi$.

4049. Hallar el área de la parte de la superficie del toro

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$$
, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$

 $(0 < a \le b)$ comprendida por dos meridianos $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ y dos paraielos $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$ A qué es igual el área de la superficie de todo el toro?

4050 Hallar e angulo sondo ω bajo el cual se ve el rectangulo x=a>0, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, desde et origen de coordenadas. Deducir una fórmula de aproximación para to si a es grande.

§ 5. Aplicaciones de las integrales dobles a la mecánica

" Centro de gravedad Si xo. vo son las coordenadas del centro de gravedad ie una lamina Q satuada en el plano Ort y pop (x t) es la densidad de la lámina, entonces

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varrho x \, dx \, dy \quad \varphi_0 = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varrho_y \, dx \, \mathcal{C}_{\mu_0} \tag{1}$$

donde $M = \iiint \rho \ dx \ dy$ es la masa de la lamina.

Si la lámina es homogénea, en las fórmulas (1) se debe hacer p=12º Momentos de inircui. Los momentos de inercia Ix. Iv de una lamina II, situada en el plane Ovi, respecto de los eles de coordenadas Ox y Oy, se expresan por las fórmulas

$$I_{x} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} qy^{3} dx dy, \quad I_{\chi} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} qx^{2} dx dy, \quad . \tag{2}$$

respectivamente, donde $\rho = \rho (x, y)$ es la densidad de la lámina Se examina también el momento de inercia centrifugo

$$I_{xy} = \iint g \, xy \, dx \, dy. \qquad \qquad 7$$

FACULTID DS POFNIERIA 2 C.SEIOYa. .

Haciendo g = 1 en las fórmulas (2) y (3), obtenemos el momento de mercia geométrico de una figura plana.

Problemss

4051. Ha lar la masa de una lámina cuadrada de lado a, Si la denadad de la lámina en cada punto es proporcional a la distancia de este punto a uno de los vértices del cuadrado y es igual a po en el centro del cuadrado.

Hallar las coordenadas del centro de gravedad de las láminas homoré. neas, limitadas por las siguientes curvas

4053.
$$V_{x} + V_{y} - V_{a}$$
, $x = 0$ y 0

4054.
$$x^{3}-y^{3}=a^{3}(x>0,y>0)$$

4055.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{\lambda 4}{c^2}$$
 (lazo)

4058.
$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy (x>0, y>0)$$

4057.
$$r = a(1 + \cos \varphi) \varphi = 0$$

4058.
$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi), y = 0$$

4059. Hailar las coordenadas del centro de gravedad de una lámina circular $x^2 + y^2 \le a^2$, si su densidad en el punto M(x, y) es proporcional a la distancia del punto M al punto A (a, 0).

4060. Determinar la curva que describe el centro de gravedad de la superficie variable, limitada por las curvas

$$y = V 2_I x \quad i = 0 \quad x = X$$

Hallar los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los ejes de coordenadas Ox y Oy de las figuras (p = 1), limitadas por las siguientes CUTV 35

4081.
$$\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1$$
, $\frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1$ $y = 0$ $(b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0)$.

4062.
$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$$
, $x = 0$, $y = 0$ $(0 \le x \le a)$

4064.
$$x^2 + y^3 = a^2(x^3 + y^2)$$

4063,
$$r = a(1 + \cos \varphi)$$
.
4064, $x^2 + y^3 = a^2(x^3 + y^2)$
4065, $xy = a^3$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$ $(x > 0, y > 0)$.

4066. Hallar el momento polar

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} \int \left(x^2 + y^2 \right) dx dy$$

de la figura S limitada por la curva

$$(x^3 + y^3)^3 = a^3(x^3 + y^3).$$

4066.1. Hallar el momento de mercia centrifugo I_{xy} de la figura homogénea limitada por las curvas

$$ay = x^2$$
, $ax = y^2$, $(a > 0)$.

4067. Demostrar la formula

$$l_i = l_{l_0} + Sd^2,$$

donde I_1 I_{10} son los momentos de inercia de la figura S respecto de Jos ejes paralelos I y I_0 , de los cuales, I_0 , pasa por el centro de gravedad Je la figura y d es la distancia entre estos ejes.

4068. Demostrar que el momento de inercia de un recinto plano S, respecto de la recta que pasa por el centro de gravedad O (0, 0) y que forma un ángulo α con el eje Ox, es igual a

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha$$

donde I_x e I_y son los momentos de inercia del recinto S respecto de los ejes Ox y Oy, e I_{xy} es el momento centrifugo

$$l_{\kappa y} = \iint_{S} \rho xy \, dx \, dy.$$

4069. Hallar el momento de inercia de un triangulo regular de lado a respecto de la recta que pasa por el centro de gravedad del triángulo y que forma con su altura un ángulo α.

4070 Determinar la presson del agua sobre la pared lateral x ≥ 0 de -na vas, ja cilindrica $x^2 + y^2 = a^2$, z = 0, si el nivel del agua es z = h

4071. Una bola de radio a está sumergida en un líquido de densidad constante a la profundidad h (contando desde el centro de la bola). donde $h\geqslant a$. Hallar la presión del líquido sobre las partes superior e mfenor de la superficie de la bola

4072. Un cilindro circular recto, cuyo radio de la base es igual a a, v de altura b_{+} está completamente sumergido en un liquido de densidad δ_{+} de tal modo que su centro se encuentra a la profundidad h bajo la superficie del líquido y el eje del cilindro forma con la vertical un angulo a. Determinar la presión del líquido sobre las bases inferior y superior del cilinaro.

4073. Determinar la fuerza de atracción de un punto material P(0,0,b) por un cilindro homogéneo $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$, si la masa del cilindro es igual a M y la masa del punto es igual a m.

4074. La distribución de la presión de un cuerpo sobre una lámita arrugada

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} \leqslant 1$$

viene dada por la fórmula $p = \mu_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^3}{b^2}\right)$.

Calcular la presion media del cuerpo sobre esta lámina.

4075. Un prado, que tiene la forma de un rectángulo con los hados a y b, está cubierto uniformemente por hierba segada cuya densidad es igual a $p \frac{kg}{m^2}$ ¿Qué trabajo mínimo hay que realizar para recoger todo el heno en el centro del piado, si el trabajo de transporte de una carga de P kg a la distancia r es igual al kPr(0 < k < 1).

§ 6. Integrales triples

1.° Calculo directo de una integral triple. Si la función f(x, y, z) es continua y el recinto V está acotado y se define por las siguientes designaldades.

$$z_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

donde $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ son funciones continuas, entonces la integral triple de la función f(x,y,z), extendida al recinto V, puede calcularse por la fórmula

$$\iint_{V} \int f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x_{1}}^{x_{2}} dx \int_{y_{1}(x)}^{y_{2}(x)} dy \int_{x_{2}(x, y)}^{x_{2}(x, y)} f(x, y, z) \, dz.$$

A veces es conveniente aplicar la fórmula

$$\iiint \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x_0}^{x_0} dx \iint_{S} \int_{x_0} f(x, y, z) dx dz$$

donde S(x) es la sección del recinto V por el plano x = const

2º Cambio de variables en la integral triple. Si el recinto cubiculable certado y acotado l' del espacio Oxi e se transforma biunivocamente en ei recinto V' del espacio O'norre mediante las funciones con diferenciales continuas.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} \left(u, \, \mathbf{v}, \, \mathbf{v} \right) \quad \mathbf{y} = \mathbf{y} \left(u, \, \mathbf{v}, \, \mathbf{w} \right), \quad \mathbf{z} = \mathbf{z} \left(u, \, \mathbf{v}, \, \mathbf{w} \right),$$

siendo

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0 \text{ para } (u, v, w) \in V'_{\theta}$$

e verifica la fórmula

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathbb{S}^n} \int f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), I \mid du dv dw.$$

Como casos particulares, se tiene: 1) el sistema de coordenadas cilínducas \emptyset , r, h, donde

$$x = r \cos \varphi$$
, $y = r \sin \varphi$, $z = \theta_1$

y

$$\frac{D(x-a)}{L(x)} \in r_1$$

y 2) el sistema de coordenadas esfericas 4 v. r. donde

y

$$\frac{f_{i}^{2}\left(z, |u_{i}| |z\right)}{D(x, |q_{i}| |q_{i}|} = r^{2} \cos \varphi$$

Problemas:

Calcular las siguientes integrales imples-

4076. $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies z = xy, y = y, y = 1 - 0

 $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ *= $\rho \cos \theta$.

donde 0 & p < + m 0 = 8 = n 0 = + - 'n 1

$$I = \begin{bmatrix} x^2 e^{-x} & y \\ 0 & x \end{bmatrix} = b_0 \sin \theta$$

Aquí 6, p son las coordenadas per res en el semprano y = const respecto del sistema notal con el polo en el origen y cavo eje posar concide con el semple positivo De y e es la coordenada dinúrca. Estas coordenadas estenadas estan telas onadas con las coordenadas y anomas políticas.

$$r = \rho \sin \theta$$
, $h = \rho \cos \theta$, $\varphi = \varphi$

(ii. de) T.)

^{*)} A veces, se a thran las coordenadas esfericas o. 8, p. relac enadas con las coordenadas canesianas por as fórmo as

4077. $\iiint \frac{dx \, dy \, dz}{(1+z+y+z)^2}$ donde el recinto V está limitado por as superficies x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0

4078. If I xyz dx dy dz, donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, x = 0, y = 0, z = 0

4079. $\iiint \left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz, donde el recinto V está limita.$ do por la superficie

$$\frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2} = 1$$

4080. $\iiint \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, donde el recinto V está limitado por las superficies

$$x^1 + y^2 = z^2$$
, $z = 1$.

Colocar de diversos modos los límites de integración en las siguientes integrales triples

4082.
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \int_{1}^{1} \int_{1+2}^{1} f(x, y) dx$$

S, stituir las integrales triples por integrales ordinarias.

4084.
$$\int dz \int d\eta \int f(z) dz$$
. 4085. $\int dx \int dy \int f(z) dz$.

4086. Hadar

$$\int_{a}^{A} dx \int_{a}^{B} dy \int_{z}^{z} f(x, y, z) dz,$$

st $f(x, y, z) = F_{x,y,z}^{an}(x, y, z)$ y a, b, c, A, B, C son constantes

Pasando a coordenadas esféricas, calcular las integrales:

4087. $\iiint \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, donde el recinto V está limtado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = z$

4088.
$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} (2^{x} dz)^{2} dz.$$

4089. Pasar a coordenadas esféricas en la integral

$$\iiint_{V} \int \int \int (\sqrt{x^{2} + y^{2} + z^{2}}) dx dy dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superfícies $z = x^2 + y^2$, x = y. x - 1, y = 0, z = 0

4090. Efectuando el cambio de variables correspondiente, calcular la integral triple

$$\iiint_{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{g^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \, dx \, dy \, dz,$$

donde V es la parte interior del elipsoide $\frac{x^3}{n^2} + \frac{y^2}{n^2}$, $\frac{z^3}{n} = 1$

4091. Pasando a coordenadas cilíndricas, calcular la integral

$$\int \int \int (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $x^2 + y^2 + 2z$, z = 04092. Calcular la integral

$$\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz,$$

donde el recinto V está limitado por las superficies $z = av^2$, $z = b^{-2}$, y > 0 (0 < a < b), $z = \alpha x$, $z = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$), z = h (h > 0).

4093. Hallar la integral $\int \int \int |\nabla v|^2 dx dy dz$, donde el recinto V esta

situado en el octante x > 0, y > 0, z > 0 y esta limitado por las Superficies:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{m}, \quad z = \frac{x^2 + y^2}{n}, \quad c_3 = z^3, \quad xy = b^2, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta c$$

$$(0 < a < b; \quad 0 < \alpha < \beta; \quad 0 < m < a).$$

4094. Ifal ar el valor medio de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

en el recinto $x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z$

4095 Hallar el valor medio de la funcion

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^3}{a^3}}$$

en el recinto $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$

4096. Apacando el teorema del va ar medio, acotar la intigital

$$u = \int \int \int \int \frac{dx \, dy \, dz}{(x-a)^2 + a - b)^2 + (z-a)^2},$$

donde $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$

4097. Demostrar que, si la función $f(x_0,z)$ es continua en el recinto V y

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z, dx dy dz = 0)$$

para cualquier recinto $\omega \subseteq V$, entonces f(x, y) = 0 para $(x, y, z) \in V$

4098, Hallar F' (t), si

a)
$$F(t) = \int_{x^2 - y^2 + 1} \int_{1 \le 1}^{t} x^2 - \frac{x}{2} - z^2 dx dx dz$$

dende t es a a función diferenciable.

donde f es una función diferenciable

4099. Hallar

$$\iiint\limits_{A^{p}+\sqrt{2}\leqslant 1} |\nabla^{2}y^{2}z^{p}| \approx dy\,dz,$$

donde m. n y p son numeros enteros no negativos.

4100 Calcular la integral de Dirichlet

$$\iiint_{V} x^{p} y^{q} z^{r} (1 - x - y - z)^{s} dx dy dz$$

$$(p > 0, q > 0, t > 0, s > 0),$$

donde el recinto V está limitado por los planos x+y+z=1, x=0, y=0, z=0, haciendo

$$x+y+z=\xi$$
, $y+z=\xi\eta$, $z=\xi\eta\xi$

§ 7 Calculo de volúmenes mediante integrales triples

El volumen de un recinto V se expresa por la fórmula

$$V = \iiint dx \, d4 \, d2$$

Problemas.

Hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies

4101,
$$z = x^2 + y^2$$
 $z = 2x - 2y^2$, $y = x - y = x^2$

4102.
$$z = x - y$$
, $z = xy$, $x - y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4103.
$$x^2 + x^2 - a^2$$
, $x = \pm a$, $x = \pm a$

4104.
$$az = x^2 - \frac{1}{x^2 - y^2}$$
 ($a > 0$).

4105.
$$az = a^2 - x^2 - y^2$$
, $x = 2 - x - y$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (a>0).

4106.
$$z = 6 - x^n$$
 , $z = 1 \sqrt{x^2 + y^2}$

Pasando a coordenadas esfericas o cilíndricas, calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superfícies:

4107.
$$x^2 + y^2 + z^2 = 27z$$
, $x^2 + y^2 \le z^2$

4108.
$$(x^2 - x^2 - z^2)^2 = z^2 (x^2 - x^2 - z^2)$$
.

4109.
$$(x^2 + x^2 + x^2)^3 = 0$$

4110.
$$x^2 + y^2 - z^2 = z^2$$
, $x^2 - y^2 + z^2 = z^2$, $x^2 - y^2 = z^2$ (2.570)
 $(0 < a < b)$.

En los siguientes ejercicios es conveniente utilizar las coordenadas esfénicas generalizadas

introduciéndolas según las fórmulas

$$x = cr \cos^2 \phi \cos^2 \phi,$$

$$x = cr \sin^2 \phi \cos^2 \phi,$$

(a, b, c, α, β son unas constantes)")

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x, \phi, y)} = \alpha \beta abcr^2 \cos^2 x \phi \sin^{2/3} \phi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \phi.$$

Calcular los volumenes de los cuerpos limitados por las superfi, es.

4111
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{x}{b}$$
 4114 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{z^4}{a^2} = 1$

4112.
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

4112.1.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

4113.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$
, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ 4115. $\frac{f(x^2)}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{z^4}{a^2} = 1$.

Utilizando un cambio de variables adecuado, calcular los volumenes de los cuerpos limitados por las superficies (se supone que los parámetros son positivos)

4)16.
$$\left(\frac{x}{u} + \frac{u}{c} + \frac{z}{c}\right)^{c} \cdot \frac{x}{c} \cdot \frac{u}{c} + \frac{x}{c} \cdot \frac{u}{c} + \frac{x}{c} = 0 \quad x \ge 0$$

4116.1.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^z = \frac{x}{a} - \frac{c}{b} \ (x \ge 0, \ y \ge 0, \ z \ge 0).$$

4117.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{b} + \frac{z}{c}\right)^4 = \frac{3az}{abc}, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$$
.

4118.
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{b}\right)^{2} + \left(\frac{z}{c}\right)^{4} = 1 \ (x \ge 0, \ y \ge 0, \ z \ge 0).$$

41181
$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = (x \ge 0 \ y \ge 0, z \ge 0)$$

4118.2.
$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1 . \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$$

"V. También pueden utdizarse las coordenadas esféricas geperalizadas, segun las tormulat

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{a} \ \mathbf{p} \ \mathbf{q}_{1} \mathbf{n}^{3} \mathbf{e}_{1} \mathbf{q}^{3} \mathbf{e}_{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} &= \mathbf{b} \ \mathbf{p} \cdot \mathbf{m}^{3} \mathbf{e}_{1} \mathbf{q}^{3} \mathbf{e}_{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} &= \mathbf{c} \ \mathbf{p} \mathbf{c} \mathbf{e}^{3} \mathbf{e}_{2} \mathbf{e}_{3} \mathbf{e}_{3} \mathbf{e}_{3} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} &= \mathbf{c} \ \mathbf{p} \mathbf{c} \mathbf{e}^{3} \mathbf{e}_{3} \mathbf$$

con

$$I = \frac{D\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{D\left(\rho, \theta, \varphi\right)} = \alpha\beta abc \, \rho^{2} \, \sin^{2} \alpha + 1 \theta \, \cos^{2} \gamma \, \theta \, \sin^{2} \gamma \, \phi \, \cos^{2} \gamma \, \phi$$

Vease la nota del traductor en el § 6. (N. del T.)

41(8.3.
$$\left(\frac{\tau}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

41 9. $z = x^{2} + y^{2}$, $z = 2(x^{2} + y^{2})$, $xy = a^{2}$, $xy = 2a^{2}$, $x = 2y$, $2x = y$ ($x > 0$, $y > 0$)

4)20,
$$x^2 + z^3 = z^2$$
, $x^3 + z^1 = b^2$, $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ (x > 0.

4121.
$$(x^2 + y^2 + z^2)^4 = \frac{a^4 x^2}{x^4 + y^2}$$
.

4122.
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^3}{b^2} + \frac{x^2}{c^2}\right)^2 = \frac{7}{h} \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2}}$$

4123.
$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{u}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{v}{b}} = \frac{2}{\pi} e^{1} e^{5} \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{v}{b} - \frac{z}{a} \right), \quad \frac{x}{a} + \frac{u}{b} = 1,$$

x = 0, x = a

4124.
$$\frac{x}{a} + \frac{b}{b} = \frac{z}{c} = a + \frac{u}{b} + \frac{z}{c} + \frac{u}{c} + \frac{z}{c} = 0$$
. $z = 0, \frac{u}{b} + \frac{z}{c} = 0$

$$\frac{z}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

4125. ¿En qué razon divide la superficie $x^2+v^2+az=4a^2$ el volumende la esfera $x^2+v^2+z^2 \le 4az^2$

4126 Hailar el volumen y el area de la superficie de, cuerpo limita do por las superficies $x^2 + y^2 = az$, $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ (a > 0)

4127. Hallar el volumen del paralelepipedo limitado por los planes

$$a_1 x + b_2 y + c z = \pm h_c$$
, $x = 1, 2, 3$),

SI

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_x & b_1 & c_4 \\ a_x & b_3 & c_4 \\ a_3 & b_4 & c_4 \end{bmatrix} == 0.$$

4128. Hallar el volumen de cuerpo li natado por la superficie

$$(a_1x+b_1y+\gamma_2z+\gamma_3z)^2+(c_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_2x+\gamma_3y+\gamma_3z)^2+(b_2x+\gamma_3z)^2+(b_2x+\gamma_3z)^2+$$

 $\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_1 & c_2 \end{bmatrix} = 0$

4129. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)^n+\frac{x^{nn}}{a^{2n}}=\frac{x}{b}\left(\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}\right)^{n-n}\quad (n>1).$$

4130. Hallar el volumen del cuerpo situado en el octante positivo del espacio Oxyz (x > 0, y > 0, z > 0) y limitado por las superficies

$$\frac{z^{m}}{a^{m}} + \frac{y^{n}}{b^{n}} + \frac{z^{p}}{a^{p}} = 1 \quad (m > 0, \ n > 0, \ p > 0), \quad x = 0, \quad y = 0 \quad z = 0$$

§ 8 Aplicaciones de las integrales triples a la mecánica

1.° Masa de un cuerpo. Si un cuerpo ocupa un volumen $V_Y = \rho(x, y, z)$ es su densidad en el punto (x, y, z), entonces su masa es igual a

$$M = \int \int \int Q dx dy dz.$$
 (1)

2° Centro de gravedad de un cuerpo Las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo (x_0, y_0, z_0) se calculan por las fórmu as

$$x_0 = \frac{1}{14} \int_{\mathbb{R}^2} \int Qx \, dx \, dy \, dz,$$

$$x_2 = \frac{1}{14} \int_{\mathbb{R}^2} \int Qy \, dx \, dy \, dz$$

$$x_4 = \frac{1}{14} \int_{\mathbb{R}^2} \int Qz \, dx \, dy \, dz$$

Si el cuerpo es homogeneo, en las fórmulas (1) y (2) se nuede hacet $\rho = 1$.

3.º Momento de inercia. Se llaman momentos de mercia de un cuerpo respecto de los planos coordenados a las integrales respectivas

$$I_{xy} = \int \int_{\mathbb{R}} \int Q e^x dx dy dz$$

$$I_{xz} = \int \int_{\mathbb{R}} \int Q y^x dx dy dz.$$

Se llama momento de inercia de un enerpo respecto de un eje l = 1 integral $I_1 = \int \int \int g x \, dx \, dy \, dz.$

donde r es la distancia del punto variable del cuerpo (x, y, z) al eje l. En particular, para los ejes coordenados Ox, Oy, Oz, se tiene, respectivamente:

$$l_x = l_{xy} + l_{xx}, \quad l_y = l_{yx} + l_{yz}, \quad l_z = l_{zx} + l_{zy}$$

Se llama momento de inercia de un cuerpo respecto del origen de coordenadas a la integral

$$I_0 = \int \int \int Q (x^3 + y^3 + z^3) dx dy dz.$$

Evidentemente, se hene

$$I_0 = I_{xy} + I_{yx} + I_{zx}$$

4.º Potencial de un campo de gravitación. Se llama potencial newtoniano de un cuerpo en el punto P(x, y, z) a la integral

$$\nu \left\langle x, \, y, \, z \right\rangle {=} \int \int_{\mathbb{R}} \int \mathcal{Q} \left(\xi, \, \eta, \, \xi \right) \frac{d\xi \, d\eta \, d\eta}{r} \; ,$$

donde V es el volumen del cuerpo, $\rho=\rho$ (ξ,η,ζ) es su densidad y

$$z = Y' + z + (y - y)^2 + C_2 + z^2$$

Un punto material de masa m es atraído por el cuerpo con ura fuerza, cuyas proyecciones X, Y, Z, sobre los ejes coordenados Ox, Ox, Ox, son iguales a

$$\lambda = km \frac{\partial u}{\partial x} = km \int \int_{V} \int e^{\frac{y}{2} - x} \mathcal{L}_{x} \ln \mathcal{L}_{x},$$

$$1 = km \frac{\partial u}{\partial y} = km \int \int \int e^{\frac{y}{2} - x} \mathcal{L}_{x}^{2} \ln \mathcal{L}_{x}^{2},$$

$$Z = km \frac{\partial u}{\partial z} = km \int \int \int e^{\frac{y}{2} - x} \mathcal{L}_{x}^{2} \ln \mathcal{L}_{x}^{2},$$

donde k es la constante de la ley de gravitacion

Problemas:

4131. Hallar la masa de un cuerpo que ocupa el volumen unidad $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, si la densidad del cuerpo en el pur to M(x, y, z) viene dada por la fòrmula $\rho = x + y + z$

4132. Hallar la masa de un cuerpo que ocupa la región infimta

 $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$, si la densidad varia según la kv $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2 + y^2 + x^2}}$, donde $\rho_0 > 0$ y k > 0 son constantes Hallar las coordenadas del centro de gravedad para los cuerpos

homogeneos limitados por las siguientes superficies.

4133.
$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{z^4}{a^4}, z = c.$$

4134.
$$z=x^2+y^2$$
, $x+y=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4135.
$$x^2 = 2pz$$
, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$.

4136.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^3}{b^3} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137.
$$x^2 + z^2 - a^2$$
, $y^2 + z^2 - a^2$ ($z \ge 0$)

4138.
$$x^2 + y^2 = 2z$$
, $x + y = z$

4139.
$$\left(\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^7}{b^2} + \frac{z^7}{b^7}\right)^2 = \frac{xyz}{a^3c} (x = 0, y = 0, z > 1)$$
.

4140.
$$z = x^2 + y^2$$
, $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $x + y = -1$.

4141.
$$\frac{x^n}{u^n} = \frac{x^n}{b^n} + \frac{x^n}{c^n} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ x = 0$$

 $(n > 0, \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ x \ge 0),$

4142. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo que tiene la forma de un cubo.

si su densidad en el punto (x 1, z) es igual a

$$g = x^{1-\frac{1}{2}} y^{1-\frac{1}{2}} \frac{z^{1-1}}{z^{1-1}}$$

donde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$

Determinar los momentos de mercia respecto de los planos coordenados de los cuerpos homogêneos limitados por las signientes superficies (los parámetros son positivos)

4143.
$$\frac{x}{a} + \frac{1}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

4141.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$
. 4145. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}$, $z = c$.

4146.
$$\frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$
, $\frac{v^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = \frac{v}{a}$.

4147.
$$\frac{v^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c} + \frac{v}{a} + \frac{d}{b} = \frac{z}{c}$$
.

4147.1.
$$\left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^4 = \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^4}{b^3} - \frac{z^3}{c^3}$$
.

4147.2.
$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{a}\right)^n = 1$$
,
 $x = 0, y = 0, z = 0 \ (a > 0, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

Determinar los momentos de inercia respecto del eje Oz de los cierpos homogéneos limitados por las superficies

4148.
$$z=x^2+y^3$$
, $x+y=\pm 1$, $x=y=\pm 1$, $z=0$.
4149. $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^3=z^2$ $(z>0)$
4149.1. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2z$

4150. Hallar el momento de inercia de una bola no homogénea $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ de masa M respecto de su diametro, si la densidad de la bola en el punto vanable P(x, y, z) es proporcional a la distancia de este punto al centro de la bola.

4151. Demostrar la igualdad

$$I_i = I_{I_0} - Vid^3$$
,

donde I_F es el momento de inercia del cuerpo respecto de un eje I_i I_{I_0} es el momento de inercia respecto de un eje la que es paralelo a / y pasa por el centro de gravedad del cuerpo, d es la distancia entre los ejes y M es la masa del cuerpo.

4152. Demostrar que el momento de inercia de un cuerpo cue ocupa un volumen V, respecto de un eje l que pasa por su centro de gravedad O (0, 0, 0) y que forma con los ejes coordenados los ángulos a, B, y, es ignal a

$$\begin{split} I_t = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^3\beta + \frac{1}{2} I_t \cos^2\gamma + 2K_{xy} \cos\alpha \cos\beta + \\ &- 2K_{xz} \cos\alpha \cos\gamma + 2K_{yz} \cos\beta \cos\gamma, \end{split}$$

donde I_x , I_y , I_z son los momentos de mercia del cuerpo respecto de los ejes coordenados v

$$K_{xy} = \iint_{\mathcal{V}} \int \varrho xy \, dx \, dy \, dz, \quad K_{xz} = \iint_{\mathcal{V}} \int \varrho xz \, dx \, dy \, dz,$$
$$K_{yz} = \iint_{\mathcal{V}} \int \varrho \, vz \, dx \, dy \, dz$$

son los momentos centrífugos.

4153 Hallar el momento de inercia de un clindro nomogeneo $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = \pm h$, de densidad ρ_0 , respecto de la recta |y| = 1

4154. Hallar el momento de inercia respecto del origen de coorde i i des de un cuerpo de densidad ho_0 . Limitado por la superfície

$$(x^2 + y^3 + z^3)^2 = a^3 (x^2 + y^3).$$

4155. Hailar el potencial newtoniano en el punto P(x, y, z) de u_{01} bola homogénea $\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 \le R^2$ de densidad ρ_0 . Indicación, Hacer pasar el eje O(z) por el punto P(x, y, z)

4156. Hallar el potencial newtoniano en el punto P(x, y, z) de una capa esférica $R_1^2 \le \xi^2 + \eta^2 + \xi^2 \le R_2^2$, si su densidad es $\rho = f(r)$, donde f es una función dada y $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \xi^2}$.

4157. Hallar el potencial newtoniano en el punto P(0,0,2) del cilmeto $\xi^2 + \eta^2 \le a^2$, $0 \le \xi \le h$, de densidad constante ρ_0

4158. ¿Con qué fuerza es atraído el punto P(0, 0, a) de masa m por una bola homogénea $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \le R^2$ de masa M^2

4159. Hallar la fuerza con la que es atraído el punto P(0,0,z) de masa unidad por el cilindro homogéneo $\xi^2 + \eta^2 \le a^2$, $0 \le \xi \le h$, de densidad ρ_0 .

4160. Hallar la fuerza con la que un sector esférico homogéneo de densidad ρ_0 atrae a un punto material de masa unidad, situado en el vértice del sector, si el radio de la superficie esférica es igual a R y el ángulo de la sección axial del sector es igual a 2α

§ 9 Integrales impropias dobles y triples

1. Caso de un recuto infinito. Si e recinto bid mensiona. Ω no está acotado y la función f(x,y) es continua en Ω , entonces, por definición, se hace

$$\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy = \lim_{n \to \infty} \int_{Q_n} f(x_{n, k}) dx dy$$

donde Ω_n es una sucesión arbitraria de recintos cuadriculables certados y acotados, que agotan el recinto Ω . Si existe el limite del segundo miembro y éste no depende de la elección de la sucesión Ω_n , la integral correspondiente se llama convergente, en caso contrario, divergente.

De un modo similar se define la integral triple impropia de una función continua, extendida a un recinto andimensional no acotado.

2.º Cuso de una función discontinua. Si la función f(x, x) es continua en todo el tecinto cerrado y acotado Ω , a excepción del punto P(a, b), entonces

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \lim_{x \to +\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy.$$

donde U_r es un recinto de diámetro e que contiene al punto P_r y en el caso de existencia del límite, la integral considerada se llama convergente, en caso contrario, divergente.

Superiendo que en un enterno del punto P(a, b) se verifica la igual-

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x - y)}{r^{\alpha}}.$$

donde el valor absoluto de la función $\varphi(x, y)$ está comprendido entre dos números positivos m y M y $r \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ se obtiene que 1) si $\alpha < 2$ la integral (2) es convergente, 2) si $\alpha \ge 2$, la integral (2) es divergente.

De un modo similar se define la integral impropia (2) si la función

f(x, y) tiene una linea de discontinuidad.

El concepto de integral impropia de una función discontinua se extiende fácilmente al caso de integrales triples.

Problemas:

Estudiar la convergencia de las integrales impropias con el recinto infinito de integración $(0 < m \le 1 \varphi(x, y) \mid \le M)$.

4161.
$$\iint_{x^2+1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy = 4162. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{1+|x|^p/(1+|y|^q)},$$

4163.
$$\iint_{\mathbb{R}^{3}} \frac{\P(x)}{(1+x^{2}+y^{3})^{2}} dx dy.$$

4164.
$$\iint_{|x|=1}^{q} \frac{dx dy}{|x|^p + |x|^q} (p > 0, q > 0).$$

4165.
$$\iint_{\mathbb{R}^{d} \to \mathbb{R}^{d}} \frac{\sin x \sin y}{(x + y)^{\theta}} dx dy$$

4166. Demostrar que, si la función continua f(x, y) no es negativa y S_n $(n \approx 1, 2, ...)$ es una sucesión cualquiera de recintos certados y acotados que agotan el recinto S, entonces

$$\iint_{S} f(x, y) dx dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

donde el primer miembro tiene sentido o no simultaneamente con el segundo miembro.

4167. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\substack{|x|\leq n\\ y|x|\leq n}}\sin(x^n+y^n)\,dx\,dy=\pi,$$

mientras que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x^2+y^2 \leqslant z^{2n}} \sin(x^2+y^2) \, dx \, dy = 0$$

(n es un número natural)

4168. Demostrar que la integral

$$\iint_{x = 1, y = 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

es divergente, a pesar de que las integrales reiteradas

$$\int_{1}^{+\infty} dx \int_{1}^{+\infty} \frac{x^{2} - y^{2}}{(x^{2} + y^{2})^{2}} dy \quad y \quad \int_{1}^{+\infty} dy \int_{1}^{+\infty} \frac{x^{2} - y^{4}}{(x^{2} + y^{2})^{2}} dx$$

son convergentes.

Calcular las integrales

4169.
$$\iint_{x^{2} \neq y^{2} = 1} \frac{dx dy}{x^{2} + y^{2}} = 4172. \quad \iint_{x^{2} \neq y^{2} = 1} \frac{dx dy}{x^{2} + y^{2}} = 4173. \quad \iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{dx dy}{(x + y)^{2}} = 4174. \quad \iint_{0 \leq x \leq 1} e^{-ix + y} dx$$
4171.
$$\iint_{x^{2} + y^{2} \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^{2} - y^{2}}} = 4174. \quad \iint_{0 \leq x \leq 1} e^{-ix + y} dx$$

Pasando a coordenadas polares calcular las integrales

4175
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$
41°6
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2-y^2) dx dy.$$
4177.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2-y^2) dx dy.$$

Calcular las integrales:

4178.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\sqrt{1+2h(y)} + cy^{2} + c^{2}y + cy + c} dx dy,$$
dende $a < 0$, $ac - b^{2} > 0$.

4179.
$$\int_{\frac{x^{3}}{a^{3}} + \frac{y^{2}}{b^{3}} \ge 1}^{e^{-\left(\frac{x^{2}}{a^{3}} + \frac{y^{3}}{b^{3}}\right)}} dx dy.$$
4180.
$$\int_{-\infty}^{+\infty + \infty} \int_{-\infty}^{\infty} xye^{-\left(\frac{x^{3}}{a^{3}} + \frac{y}{a^{3}} + \frac{y^{3}}{b^{3}}\right)} dx dy \quad 10 < |\epsilon_{1}| < 1).$$

Estudiar la convergencia de las integra es dobles impropias de las funciones discontinuas $(0 < m \le |\varphi(x, y)| \le M)$

4181. $\int_{\Omega} \int \frac{dx \, dy}{x^2 + y^2}$, donde el recinto Ω se determina por las condi-

ciones: $|y| \le x^2$; $x^2 + y^2 \le 1$.

4183.
$$\iint_{\|x\|+\|y\|\leq 1} \frac{dx\,dy}{\|x\|^p+\|y\|^p} \ (p>0, \ q>0).$$

4184.
$$\int_{0}^{\infty} \int_{1}^{\infty} \frac{\varphi(x, u)}{|x - y|^{p}} dx dy \qquad 4185. \int_{x^{3} + y^{3} \leq 1} \int_{1 - x^{2} - u^{2}y^{2}}^{\infty} dx dy.$$

4186 Demostrar que si i) la funcion φ v i) es continua en el recinto acotado $a \le x \le A$, $b \le y \le B$. Ol la funcion f(x) es con tre a en el segmento $a \le x \le A$ y 3) p < 1, entonces la integral

$$\int_{0}^{x} dx \int_{0}^{x} \frac{\varphi(x, \omega)}{f(x, -x, \rho)} dy$$

es convergente.

Calcular las siguientes integrales.

donde el recinto Ω está limitado por las rectas $y=0, x \Rightarrow x \cdot x - \pi$

4190.
$$\iint\limits_{V \to V} \frac{dx \, du}{V \, x^2 + y^2}.$$

Estudiar la convergencia de las siguientes integrales triples

4191.
$$\iint_{\{x^2+y^2+2^2-1\}} \frac{|x|(x, u, x^2)|}{(x^2+u^2+z^2)^p} dx dy dz,$$

donde $0 < m \le |\varphi(x, y, z)| \le M$

443

4192.
$$\int_{a^2+y^2+z^2}^{\infty} \int_{c^2+y^2+z^2-p}^{\infty} \frac{q(x-n,y)}{(x^2+q^2+z^2-p)} dx dy dz,$$

dende $0 < m \le |\varphi(x, y, z)| \le M$

4194.
$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - y](x)]^{2} + [z - y](x)^{2} + z}.$$

donde $0 < m \le |f(x, y, z)| \le M$, $y \cdot \varphi(x)$, $\psi(x)$ son functiones confi. puas en el segmento [0, a].

4195.
$$\iiint_{x} \frac{dx d\mu dz}{(x+y-z)^{p}}.$$

Calcular las integrales:

4196.
$$\iint_{\mathbb{R}^{3}} \frac{dx \, dy \, dz}{x^{p}y^{p}z^{p}} = 4197. \qquad \iint_{\mathbb{R}^{3} = \sqrt{2}} \frac{dx \, dy \, dz}{(x^{2} - x)^{2} - x^{2}} = 4198. \qquad \iint_{\mathbb{R}^{3} = \sqrt{2}} \frac{dx \, dy \, dz}{(x^{2} - x)^{2} - x^{2}} = 4198.$$

4198.
$$\int_{|x|=x^{2}} \int_{|x|=x^{2}} \frac{dx \, dx}{1 + |x|^{2}} \frac{dz}{y^{2} - x^{2}}$$

4200. Calcular la integral

$$\int_{x}^{\pi} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{x} e^{-\beta (x-x_{i})x_{i}} dx dx dx, dx,$$

donde $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j \ (a_{ij} = a_{ji})$ es una forma cadranca definida positiva

§ 10 Integrales múltiples

1º Calculo directo de las integrales múltiples. Si u función I (x₁, x₂, ..., x_n) es continua en el recinto acotado definido por las designal dades.

$$\begin{cases} x_{1}' \leq t \leq t' \\ x_{2}'(x_{1}) \leq x_{2} \leq x_{2}'(x_{1}), \\ \vdots \\ x_{n}(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n-1}) \leq x_{n} \leq y_{n}'(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n-1}). \end{cases}$$

dende x_1' y x_1'' son constantes y x_2' (x_1) , x_2'' (x_1) , ..., x_n' $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, x_n'' $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ son funciones continuas, entonces la integral multiple correspondiente puede calcularse según u fórmula

$$\int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1} dx_1 \int_{x_2}^{x_1'(x_1)} dx_2 \dots \int_{x_n'(x_n)}^{x_n'(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n.$$

2º Cambio de variables en la integral múltiple. Si 1) la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es uniformemente continua en un recinto medible y acotado Ω , 2) las funciones con diferenciales continuas

$$x_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \ (r := 1, 2, \ldots, n)$$

realizan una transformación biunívoca del recinto Ω del espacio $0x_1x_2...x_n$ en un recinto acotado Ω' del espacio $O(\xi_1\xi_2...\xi_n)$ y 3) el acobiano

$$I = \frac{D \cdot x_1, x_2, \dots, x_n}{D \cdot x_n, x_n} \neq 0$$

en el recinto \O', entonces es valida la fórmula

$$\iint \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \iint \dots \int f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \{ f(d\xi_1 d\xi_2 \dots, d\xi_n, \xi_n \dots, \xi_n) \} dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

En particular, al pasar a las coordenadas polares $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ según las fórmulas

$$x_{n} = r \cos \varphi_{1},$$

$$x_{n} = r \sin \varphi_{1} \sin \varphi_{2}, \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1},$$

$$x_{n} = r \sin \varphi_{1} \sin \varphi_{2}, \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}$$

se tiene

$$I = \frac{D_{n}x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}}{D_{n}x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n-1}} = r^{n-1}\sin^{n-2}\phi_{1}\sin^{n-2}\phi_{2}, \dots \sin\phi_{n-2}.$$

Problemas:

4201. Sea K(x, y) una función continua en el recinto $R(a \le x \le b)$ $a \le y \le b$ y

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \dots K(t_n, y) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Demostrar que

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

4202. Sea $f:f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ una función continua en el recipio $0 \le x_i \le x \ (i=1,\,2,\,\dots,\,n)$. Demostrar la igualdad

$$\int_{0}^{\infty} dx_{n} \int_{0}^{\infty} dx_{n} \dots \int_{0}^{\infty} f dx_{n} - \int_{0}^{\infty} dx_{n} \int_{x_{n}}^{\infty} dx_{n-1} \dots \int_{x_{n}}^{\infty} f dx_{n} \quad (n \ge 2),$$

4203. Demostrar que

$$\int_{0}^{t} dt_{1} \int_{0}^{t_{1}} dt_{2} \dots \int_{0}^{t_{n-1}} f(t_{1}) f(t_{1} \dots f(t_{n})) dt_{n} = \frac{1}{n!} \left\{ \int_{0}^{t} f(\tau) d\tau \right\}^{2}$$

donde f es una función continua Calcular las siguientes integrales máltiples.

4204. a)
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \dots \int_{0}^{1} (x_{1}^{2} + x_{2}^{2} + \dots + x_{n}^{2}) dx_{1} dx_{2} \dots dx_{n};$$

b) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} \dots \int_{0}^{1} (x_{1} + x_{2} + \dots + x_{n})^{2} dx_{1} dx_{2} \dots dx_{n}.$

4205.
$$I_n = \int_{\substack{x \ge 0 \\ x + 1 = x \\ x + 1 = x \\ x + 1 = x \\ x = x_0}} \int_{\substack{x \ge 0 \\ x = x_0 \le x}} d_x dx, ... dx_n.$$

$$4006 \int_{0}^{1} dx_{1} \int_{0}^{x_{1}} dx_{2} \dots \int_{0}^{x_{n-1}} \lambda_{1} x_{2} \dots x_{n} dx_{n}$$

4207.
$$\iint_{\substack{x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 0, \\ x_1 \leq 0}} \int_{\substack{x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 0, \\ x_3 \leq 0}} \int_{\substack{x_2 \geq 0, \\ x_4 \leq 0}} \int_{\substack{x_2 \geq 0, \\ x_4 = 0, \\ x_4 = 0}} \int_{\substack{x_2 \geq 0, \\ x_4 = $

4208. Ballar el volumen del paralelepípedo n-dimensional, lumitado por los planos

$$a_{ij}x_{ij} + a_{ij}x_{ij} + \dots + a_{ij}x_{ij} + \dots + a_{ij}x_{ij} + a_{ij}x_{ij$$

siendo $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$

4209. Hallar el volumen de la pirámide n-dimensional

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \le 1, \quad x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

4210. Hallar el volumen del cono n-dimensional, limitado por las superficies

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-2}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2} + x_n = a_n.$$

4211. Hallar el volumen de la esfera n-dimensional

$$\chi_{\lambda}^2 = \chi_{\lambda}^2 + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{4} \chi_{\kappa}^2 \in \Omega^2,$$

4212. Hallar

$$\iint_{\mathbb{R}^n} \int x_n^* dx_n dx_n \cdot dx_n \cdot dx_n$$

donde el recinto II se deterinina por las desigualdades

$$x_1^{k-1} \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{k} \leq \alpha_1^{k} \cdot \ldots \leq \alpha_n^{k} \cdot \ldots \leq \alpha_n^{k$$

4213. Calcular

4214. Demostrar la igualdad

$$\int_{0}^{x} dx_{x} \int_{0}^{x_{x}} dx_{x+1} \int_{0}^{x_{x+1}} f(x_{x}) dx_{x} = \int_{0}^{x} f(x) \frac{(x-x)^{2}}{(x-1)} dx$$

4215. Demostrar la igualdad

$$\int_{0}^{\infty} x_{1} dx_{2} \int_{0}^{x_{1}} x_{2} dx_{2} \dots \int_{0}^{x_{n}} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^{n} n!} \int_{0}^{\infty} (x^{2} - a^{2})^{2} f(a) da$$

4216. Demostrar la formula de Dirichlet

$$\iint_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n > p \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \le 1}} v_1^{x_1 - 1} v_2^{x_2 - 1}, \quad \chi_n^{p_n - 1} dx_1 dx_1 \dots dx_n =$$

$$=\frac{\Gamma\left(\rho_{x}\right)\Gamma\left(\rho_{x}\right),\ \Gamma\left(\rho_{0}\right)}{\Gamma\left(\rho_{x}+\rho_{x}+\ldots+\rho_{n}+1\right)}\quad\mathcal{F}_{x},\ F_{x},\ldots,\ \rho_{n}>0).$$

4217. Demostrar la fórmula de Liouville

$$\iint_{\substack{x_1, \dots, x_n \ge 0 \\ x_1 + x_1 + \dots + x_n \le 1}} f(x_1 + x_n + \dots + x_n) x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots$$

$$= \frac{\Gamma(p_1 + p_2) - \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2) + \cdots + p_n} \int_0^{p_n + p_2 + \cdots + p_n - 1} d\mu(p_1, p_2, \dots, p_n) 0,$$

donde f (u) es una función continua

Indicación, Aplicar el método de inducción matemática

4218. Reducir a una integral simple la integral n-ple $(n \ge 2)$

$$\iiint_{u} \int \int (V x_1^2 - x_2^2 + \dots + x_n^3) \, dx_1 \, dx_2, \quad dx_n,$$

extendida al recinto $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\leqslant R^2$, donde f(u) es una función continua.

4219. Calcular el potencia, sobre sí mismo de una bola homogenea de radio R y densidad ρ_0 , es decir, hallar la integra

$$d = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{dx \ du. \ r_2 \ dx_2 \ dx_3 \ c^2}{r}, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 \le R^2 \end{cases}$$

donde

$$r_{-1} = V (x_1 - x_1^{-1} + (y_1 - y_1^{-1} + z_1 - z_1)^2)$$

4220. Calcular la integral n-ple

$$+\infty+\infty+\infty + \infty - \left\{\sum_{i=1}^n c_{i,i}x_{i,j+1}\sum_{i=1}^n b_{i,i+1}\right\} dv dv, \quad dv_i,$$

si $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j x_j = a_{ij}$) es una forma cuadratica definida positiva

§ 11. Integrales curvilíneas

1.° Integral currilmea de 1.º especie. Si f(x, y, z) es una función definida y continua en los puntos de una curva lisa C

$$x = x\left(t\right), \quad y = y\left(t\right), \quad z = z\left(t\right) \quad \left(t_{s} \leqslant t \leqslant T\right)$$

y de es la diferencial de arco, se tiene

$$\int_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dz = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Una particularidad de esta integral es que no depende la dirección en la

2° Aplicaciones de la integral curvilinea de 1° especie a la mecán. a. Si p = p(x, y, z) es la dens, dad lineal en el punto variable (x, y, z) de la curva C, entonces la masa de la curva C es igual a:

$$M = \int_{C} g(x, y, z) ds.$$

Las coordenadas del centro de gravedad (x_0, y_0, z_0) de esta curva se expresan por las fórmulas

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_{C} z Q(x + z) ds$$
 $u_0 = \frac{1}{M} \int_{C} (x + z) ds$ $z_1 = \frac{1}{M} \int_{C} (Q(x + z) dz) ds$

3.° Integral curvilinea de \mathbb{C}^a especie. Si las funciones P=P(x,y,z) Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z) son continuas en los puntos de la curva (1), recorda en la dirección del crecimiento del parametro r, se tiene

$$\int_{C} P(x, x, z, dx + Q(x, y, z)) dy \quad R(x, y, z) \quad -\frac{\tau}{2} \cdot P(x, x) \quad \mu(t), z(t), x(t) + Q(x(t), y(t), z(t), y'(t) + \frac{\tau}{2} \cdot P(x, x), \mu(t), z(t), x(t), z(t), z($$

Al cambiar la dirección del recorrido de la curva C esta integral cambia su signo por el contrario. En la mecánica, la integral (2) representa el trabajo de una fuerza variable ${}_{1}P, Q, R$, cuyo punto de aplicación describe la curva C.

4.º Caso de una diferencial total. Si

$$P(x, y, z) dy + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz + da$$

donde u = u(x, y, z) es una función uniforme en el recinto 1, entonces, independientemente de la forma de la curva C, situada completamente en el recinto 1, se tiene:

$$\int_{C} P \ dx + Q \ dy + R \ dz = \mu \left(x_{10} \ p_{30} \ x_{2} \right) + \mu \left(x_{11} \ p_{12} \ x_{2} \right)$$

donde (x_1, y_1, z_1) es el punto inicial del camino y (x_2, y_2, z_2) el final. En el caso más simple, en que el recinto V es simplemente conexo y as funciones P, Q, y R admiten derivadas parciales continuas se primer orden, para esto es necesario y suficiente que se cumplan identicamente las siguientes condiciones

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \;, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \;, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \;,$$

en el recinto V.

Entonces, en el caso más simple de un recinto paralelepipe dal V 3¢ puede hallar la función u según la fórmula

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z) dz + t.$$

donde (x_0, y_0, z_0) es un punto fijo del recinto V y ε es una constante atb traria

En la mecánica, este caso corresponde al trabajo de una fuerza que tiene potencial.

Problemas

Calcular las signientes integra es cundineas de la especie

4221. $\int_{0}^{x} (x + y) ds$, donde C es el contorno del triangulo con los vértices O(0, 0), A(1, 0) y B(0, 1)

- 4222 $\int_C y^2 ds$, donde C es un arco de la cicloide $x = a(t \sin t)$, $y = a(1 \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.
- 4223. $\int_{C} (x^2 + y^2) ds$, donde C es la curva $x = a (\cos t + t \sin t), y = a \sin t t \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.
- 4224. $\int_C x_1 ds$, donde C es el arco de la hipérbola $x = a \sinh (y = a \sinh (0 \le i \le t))$.
- 4225. $\int (x^{\frac{1}{4}} + v^{\frac{1}{4}}) ds$, donde Ces el arco de la astroide $x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$.
- 4226. $\int_{C} e^{1/\pi i + yi} ds$, donde C es un circuito convexo hantado pol las curvas r = a, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (r y φ son las coordenadas polares).
 - 4227. $\int_C |y| ds$, donde C es el arco de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 y^2),$

4228. $\int_C x \, ds$, donde C es la parte de la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$ (k > 0) situada en el interior del círculo $r \le a$;

(k > 0) should be dx = ax.

4229. $\int \sqrt{x^2 + y^2} ds$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$.

4230. $\int_C \frac{dx}{y^2}$, donde C es la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$.

Hallar las longitudes de los arcos de las curvas del espacio (los parámetros son positivos)

4231. x = 3t, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, desde O (0, 0, 0) hasta A (3, 3, 2)

4232. $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, para $0 < t < +\infty$

4233. y = a arcsin $\frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} n \frac{a}{a+x}$ desde O(0, 0, 0) hasta

A (xo. Yo. Zo).

4234. $(x - y)^2 = a(x + y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ desde 0 0 0, 0) hasta

 $A(x_0, y_0, z_0).$

4235. $x^2 + y^2 - cz^2 = tg \frac{z}{c}$ desde O (0, 0, 0) hasta A (x₀, y₀, z₀)

4236 $x^2 + x^2 + x^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} cn \left(\text{arctg} \frac{y}{x} - a \right) desire c.$

punto A(a, 0, 0) hasta el punto B(x, y, z)Calcular las integrales curvilineas de 1^a especie, tomadas a lo largo de las curvas del espacio

4237. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, donde C es la parte de la hélice curcular $x = a \cos t, \ y = a \sin t, \ z = bt \quad (0 \le z \le 2\pi).$

4238. $\int_C x^2 ds, \text{ donde } C \text{ es la circunferencia}$ $x^2 + y^2 + z^3 = a^2, \quad x + y + z = 0.$

4239. $\int_{C} z \, ds$, donds C es la hélice conica $x = t \cos t, \ y = t \sin t, \ z = t \quad (0 \le t \le t_0).$

4240. $\int_C z ds$, donde C es el arco de la curva $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 - ax$

desde el punto O(0, 0, 0) hasta el punto $A(a, a, a\sqrt{2})$

4241. Hallar la masa de la curva $x = a \cos t$, $v = b \sin t$ ($a \ge b > 0$; $0 < t \le 2\pi$), si su densidad lineal en el punto (x, y) es ignal a $\rho = |y|$

4241.1. Hallar la masa del arco de la parábola

$$y^z = 2\rho x \qquad \left(0 \le x \le \frac{\rho}{2}\right),$$

si su densidad lineal en el punto variable M(x, y) es igual a $\{y\}$

4242. Hallar la masa del arco de la curva x = at $y = \frac{a}{2}t^2/z + \frac{a}{3}t^3$ (0 $\leq t \leq 1$), cuya densidad varía segun la ley $\rho = \sqrt{\frac{a_0^2}{4}}$

4243. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del arco de la curva homogénea $y = a \, ch \, \frac{a}{a} \, desde$ el punto A(0,a) hasta el punto B(b,h)

4244 Determinar el centro de gravedad del arco de la cicloide

$$x = a(t + \sin t), y = a(1 + \cos t) \quad (0 \le t \le \pi).$$

4244.1. Hallar los momentos estáticos

$$S_y = \int_{c}^{c} x \, ds, \quad S_z = \int_{c}^{c} ds$$

del arco C de la astroide

$$x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}}$$
 $(x \ge 0, y \ge 0)$

respecto de los ejes de coordenadas

4244.2. Hallar el momento de inercia de la errounferencia

$$x^2 + y^7 - a^2$$

respecto de su diámetro.

4244.3. Haliar los momentos polares de mercia

respecto del punto O(0, 0) para las sigmentes forcas (a) para el contorno C del cuadrado max $\{|x|,|y|\} \in a$; b) para el contorno C del triangulo regular con los vértices en coordenadas polares

$$P(a, 0), Q(a, \frac{2\pi}{3}), R(a, \frac{4\pi}{3})$$

4244.4. Hallar el radio polar medio de la astroide

$$x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}},$$

es decir, el número r_0 ($r_0 > 0$), def nido por la férmula

$$I_{\rm s} = s \cdot r_{\rm o}^2$$

donde I_0 es el momento polar de mercia de la astroide respecto del origen de coordenadas (véase 4244 3) y s es la longitud de arco de la astroide.

4245. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del contorno del triángulo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4246. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco homogeneo

$$x = e^t \cos t$$
, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $-\infty < t \le 0$,

4247. Hallar los momentos de increta respecto de los ejes de coordenadas de una espira de la hence circular

$$x = a_{s,t}, y = a_{s,0,t}, z = \frac{1}{3}i (6 \le t \le 2\pi)$$

4248. Calcular la integral curvilinea de 2ª especie

$$\int_{0}^{\infty} x \, dy - y \, dx,$$

donde O es el origen de coordenadas y el punto A tiene las coordenadas (1 1), si a) OA es un segmento de recta; b) OA es una parábola cuyo sje es Oy; b) OA es una poligonal, compuesta por el segmento OB del sje Ox y del segmento B i que es paralelo al eje Ox.

4249. Calcular

para los caminos a), b) y e), indicados en el problema precedente

Calcular las sigmentes integrales curvitineas de 2ª especie, tamadas a lo largo de las curvas indicadas en dirección del crecimiento del parame tro

4250.
$$\int_C (x^2 - 2xx) dx + (x^2 - 2xx) dy$$
, donde C es la parabola $y = x^2 (-1 \le x \le 1)$.

4251.
$$\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, \text{ donde } C \text{ es la curva}$$
$$y = 1 - |1 - x| \quad (0 \le x \le 2).$$

4252. $\oint_C (x + y) dx + (x - y) dy$, donde C es la elipse $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} \approx 1$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

4253.
$$\int_C (2a - y) dx + x dy, \text{ donde } C \text{ es el arco de la cicloide}$$
$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

4254.
$$\oint_C \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$$
, donde C es la circunferencia

 $\chi^2 + \chi^2 = a^2$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj

4255 $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{dx + dy}{x + y}$, donde ABCDA es el contorno del cuadrado

con los vértices A (1, 0), B (0, 1), C (1, 0), D (0, -1).

4256. $\int_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, donde AB es el segmento de recta que une los puntos $A(0,\pi)$ y $B(\pi,0)$

4257. $\frac{1}{4}$ dy arctg $\frac{y}{x}$ — dx, donde OmA es el segmento de la para-

bola $y = x^2$ y On A es el segmento de la recta y = x

Cerciorándose de que la expresión subintegral es una diferencia total, calcular las siguientes integrales curvilíneas

4258.
$$\int_{(x-1)^{2n}}^{(2-3)} x \, dy + y \, dx. \qquad 4261. \int_{(x-1)^{2n}}^{(-1)} (x-y) \, (dx - dy).$$

4259.
$$\int_{0}^{4} x \, dx + y \, dy, \qquad 4262. \int_{0}^{(a-b)} f(x+y) \, (dx + dy)$$

4260.
$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy$$
, donde $f(u)$ es continua.

4263.
$$\int_{-2\pi}^{(1/3)} \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2}$$
 a lo largo de caminos que no se corten con el eje OV .

4264.
$$\int_{0.50}^{6.60} \frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
 a lo largo de caminos que no pasen por de origen de coordenadas.

4265. $\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$, donde $\varphi y \psi$ son funciones con-

tinuas.

4266.
$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^3 - 5y^4) dy.$$

4267.
$$\int_{0}^{\pi_1/2} \frac{x \, dy - y \, dx}{(x-y)^2}$$
 a lo largo de caminos que no se corten

con la recta y = x.

4268.
$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{\pi} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy \text{ a lo large de}$$

caminos que no se corten con el eje O)

4269.
$$\int_{(0,-0)}^{(a,-b)} e^{x} (\cos y \, dx - \sin y \, dy).$$

4270. Demostrar que, si f(u) es una función continua y C es un circuito cerrado, uso a trozos, entonces

$$\begin{cases} f(x^2 - y^2)(x dx + y dy) = 1 \end{cases}$$

Hallar la función primitiva a, si

4271.
$$dz = (x^2 + 2xy + y^2) dx + (x^2 + 2xy + y^2) d$$

4272.
$$dz = \frac{y dx + x dy}{3x^2 + 2x + 3y^2}$$

4273.
$$dz = \frac{(x^2 + 2xy + 3y^2)dx + (y^2 - 2xy + y^2)dy}{(x + y)^3}$$
.

4274.
$$dz = e^{y} \left[e^{y} \left(x - y + z \right) + y \right] dx + e^{y} \left[e^{y} \left(x - y \right) + 1 \right] dy$$

4275.
$$dz = \frac{\partial^{n+m+1}y}{\partial x^{m+1}\partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1}y}{\partial x^n\partial y^m} dy$$

4276.
$$dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+1}\partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy$$
, dende $t = \sqrt{x^2 + y^2}$.

11 INTEGRALES CURVILINEAS

4277 Demostrar que para la integral curvilinea es valida la acola. ción siguiente:

$$\left| \int_{\mathcal{C}} P \, dx + Q \, dy \right| \leq LM$$

donde L es la longitud del camino de integración y $M=\max \sqrt{P^2+O^2}$ en el arco C

4278. Acotar la integral

$$I_R = \sum_{x^2 = y^2 = -1}^{\infty} \frac{j_x}{x^2 - x_y} \cdot \frac{s_{xy}}{s_y}$$

Demostrar que $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$.

Calcular las integrales conclineas tomacis a la latinde cumas del espacio use supone" que el sistema de coorder das es de mario derecha

4279. $\int (1^2 - z^2) dx + 3yz dy - x^2 dz$, donde C es la curva x 1

. 1' = 13 10 < 1 < 11, recorrida en sentido de crecipi ento del para

4280 | r tr = t - r dz. donde C es la espira de la hélice circular

Y = 3 c 05 f . a cm 1 = b1 (0 ≤ 1 ≤ 1; fec = 13 cm cg ti, 30 de cred miento del parametro

4281. $\int (y-z) dx + (z-x) dx + y$. The C is latered

terencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = y \text{ tg } \alpha \ (0 < \alpha < \pi)$, recognida en sentido contrario al del movimiento de las apriris del reloj si se observa desde la parte positiva de las x

4282. $\int v^2 dv + z^2 dv + v^2 dz$, donde C es la parte de la curva de

Viviani $|y^2 + y^2| + y^2 + y^2 + y^2 + y^2 = ax(z \ge 0, y > 0)$, records the sentido contratio al dei movime ito de las afinas del reloi, si se observa desde la parte positiva (x > a) del eje Ox

4283 $\int_{0}^{\pi} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dx + (x^2 - r^2) dz$, donde C es el

contorno que limita la parte de la esferi $x^2 + x^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$. e≥0, .>0, recorndo de tal modo que la parie exterior de esa superficie queda hacia la izquierda.

Hallar las siguientes integrales curvilineas de las diferenciales totales:

Hallar lass significant
$$x dx + y^2 dy - z^2 dz$$
.

4285.
$$\int_{0}^{(0,1,1)} yz dx + xz dy + xy dz.$$

4285.
$$\int_{(x_1, y_1, z_2)}^{(x_2, y_2, z_3)} \frac{z \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ donde el punto } (x_1, y_1, z_3)$$
4286.
$$\int_{(x_1, y_1, z_2)}^{(x_2, y_2, z_3)} \frac{z \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ donde el punto } (x_2, y_3, z_3)$$

está situado en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, y el punto (x_2, y_2, z_2) , en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ (a > 0, b > 0).

esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$
 (x) $dx + y(y) dy + \chi(z) dz$, donde φ , ψ , χ , son

funciones continuas.

unciones continuas.
4288.
$$\int_{-|x_1-y_1|=2d}^{|x_2-y_2|} f(x+1+z) (dx+dy+dz), donde f es una fun-$$

ción continua

6n continua
4289.
$$\int_{0}^{1/2x^{2}} \int_{0}^{1/2x^{2}} \int_{0}^{1/2} $

es una función continua.

Hallar la función primitiva u si

Hallar la función primitiva
$$a = x^2 + 2xy \cdot dx + y^2 + 2xy \cdot dx + y^2 + 2xy \cdot dx + x^3 + 2xy \cdot dx + x^4 + x^5 +$$

4290.
$$du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$$

4291. $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$
 $du = (x^2 - 2)^2 1 dx + 1$

4290.
$$du = (x^2 - 2yz) dx + y^2 - 2xz dy - x^2 dz$$

4291 $du = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right) dx + \left(x - \frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right) dz$
4292. $du = \frac{(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2)}{(x^2 - 2)^2 + (x - 2)^2 + (x - 2)(x - 2)}$

4293 Hallar el trabajo efectuado por la faerza de gravedad cuando un punto de masa m se traslada de la posición (x1 1) 7/1 a la posición (x2, x2, 22) (el eje Oz flex) is dirección verneal pac a arriba)

4294. Hallar el trabajo de una foerza elistica. dir elda hacia el origini de coordenadas, cas a magnitud es proporcio tal a la clongación del punto material del origen de coordenadas si este punto describe el

cuadrante positivo de la clipse $\frac{v^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}=1$, en sentido contrario al del

movimiento de las agujas del reĵoj.

CAPITULO 8. INTEGRALES MULTIPLES Y CURVILINEAS

4295. Hallar el trabajo de la fuerza de gravitación $F=\frac{4}{7}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la cual actúa sobre una masa unidad cuando esta última se oesplaza del punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ al punto $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

§ 12. Fórmula de Green

1° Relación de la integral cum dinea con la integral doble. Si C es un circuito cerrado simpie, liso a trozos, que encierra un recinto finito simplemente conexo S, recorrido de tai modo que el recinto S quede hat a la requierda, y las funciones P(x,y) Q(x,y) son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden $P_y'(x, x)$ y $Q_x'(x, y)$ en el recinto S y en su frontera, entonces es valida la formula de Green

$$\oint_{C} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx du. \tag{1}$$

La fórmula (1) también es valida para un recinto acotado S. Limitado por unos cuantos circuitos simples si por frontera C del mismo se entiende la umon de todos los circuitos frontera, dende el recorndo se elige de tal modo que el recinto S quede a la izquierda

2.º Area de un recinto plano El área de una figura limitada por un curcuito simple C, liso a trozos, es igual a

$$S = \oint_{\mathcal{C}} x \, dy = - \oint_{\mathcal{C}} y \, dz = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \langle x \, dy - y \, dx \rangle.$$

Mientras no se haya advertido otra cosa, en este pariafo se supondra que el circuito cerrado de integración es simple esin puntos de automterseccion) y que se recorre de tal modo que el recinto encerrado por el que no contenga al punto del alf. 1 to, queda hac a la aquierda (sentido positivo).

4296. Aplicando la fórmula de Green, transformar la integral curvilénga.

$$I = \sum_{C} \sqrt{x^{2} + y^{2}} dx + y \left[xy + \ln \left(x + \right) \sqrt{x^{2} + y^{2}} \right) \right] dy,$$

donde el circuito C encierra un recinto acotado S.

4297. Aplicando la fórmula de Green, calcular la integral curvilinea

$$I = \oint_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$$

donde K es el contorno del triángulo ABC con los vértices A (1-1) B(3, 2), C(2, 5), recorrido en sentido positivo

Comprobar el resultado obtenido calculando directamente la integrar Aplicando la formula de Green, calcular las siguientes integralis

4298. 2 xy2 dy - x2y dx, donde C es la circunferenca $x^2 + y^2 = a^2.$

$$x^2 + y^2 = a^x$$
.
4299. $\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy$, donde C es la el.pse
 $\int_{a^2 + \frac{a^2}{b^2}}^{a^2} = 1$

4300. $\oint e^{x} (1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy$, donde C es el circuito que encierra el recinto $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$, recorrido en sentido

sitivo.

4301.
$$\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2x) dx + \sin 2xy dy).$$

4302. ¿Cuánto se diferencian entre sí las integrales curvilíneas

$$I_1 = \int_{A \cap B} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} (x - x)^n dx - (x - x)^n dx$$

donde AmB es la recta que une los puntos 4 (1/1) y B (2, 6), y ArB (8 la parábola cuyo eje es vertical y pasa por los mismos puntos $4 \times B \times$ por el origen de coordenadas?

4303. Calcular la integral curvilinea

$$\int_{\partial B} (e^{x} \sin y + my) dx + (e^{x} \cos x - m) dy,$$

donde AmO es la semicircunferencia superior $y^2 + y^2 = ay$, recorrida desde el punto A (a, 0) hasta el punto O (0, 0). 459

Indicación. Completar el trayecto AmO hasta cerrarlo, mediante el segmento rectilineo OA del eje Ox

4304 Calcular la integral curvilinea

$$\int_{AmB} [\varphi(y) e^x - my] dx + [\varphi'(y) e^x - m] dy,$$

donde $\varphi(y)$ y $\varphi'(y)$ son funciones continuas y AmB es un trayecto arbitrario que une los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el cual, junto con el segmento AB encierra una figura AmBA de área S

4305. Determinar dos funciones con diferenciales continuas P(x, y)y Q (x, y), de tal modo que la integral curvilínea

$$= \begin{cases} P(x + a, y + \beta, dx + Q(x - \alpha) + \beta)dy \end{cases}$$

para cualquier circulto cerrado C no dependa de las constantes α y β .

4306. ¿A que condición tiene que satisfacer una función diferenciable F(x,)) para que la integral curvilinea

$$\int_{A^{p}B} F(x_{i}|y)(y|dx+x|dy)$$

no dependa de la forma del camino de integración?

4307. Calcular

$$I = \oint_{Y} \frac{x \, c \, r - r \, c \, \tau}{x - r} \, ,$$

donde C es un circusto cerrado simple que no pasa por el origen de coordenadas, recorrido en sentido positivo.

Indicación Examinar dos cas s. 1) el origen de coordenadas está situado fuera del circuito 2) el circuito C encierra al origen de coorde nadas.

Calcular las áreas de las figuras limitadas por las sigmentes curvas. mediante integrales curvilíneas

4308. La clipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$

4309. La astroide $y = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ ($0 \le t \le 2\pi$)

4310. La parabola $(x + y)^2 = ax (a > 0)$ y el eje 0x

4311. Fillazo del folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axv$ (a > 0). ludicación. Hacer x = tx

4312. La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$. Indicación. Hacer $y = x tg \alpha$.

4313. La curva $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ y los ejes de coordenadas

4314. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a>0, n>0, m>0).$$

4315. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^a + \left(\frac{y}{b}\right)^a = 1 \quad (a > 0, \ b > 0, \ a > 0)$$

y los ejes de coordenadas.

Indicación. Hacer $\frac{\pi}{a} = \cos^{\frac{\pi}{a}} \varphi_i = \sin^{\frac{\pi}{a}} \varphi_i$.

4316. Calcular el área de la figura limitada por la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

(a>0, b>0, n>1) y los ejes de coordenadas.

4317. Calcular el area que encierra el lazo de la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{4n+3} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{a}{b}\right)^n (a > 0, b > 0, c > 0, n > 0).$$

4318. Se llama epicicloide a curva que desembe un punto de una circunferencia en movimiento de radio r que rueda sin deslizar por la par e exterior de una circunferencia inmóv I de radio R

Hallar el area de la figura amita la por la epicicio de, suponiendo que la tazón $\frac{R}{\epsilon} = n$ es un número entero $(n \ge 1)$.

Estudiar el caso particular r = R (la cardioide).

4319. Se llama hipocicloide la curva que describe un punto de una curunferencia en movimiento de radio r que rueda sin deslizar por la parte interior de una circunferencia inmovil de radio R. Hallor el area de la figura limitada por la impocicionde, supomendo que $\frac{R}{r} = r \cos r r$ número entero ($n \ge 2$).

Estudiar el caso particular $r = \frac{R}{4}$ (la astroide).

4320. Culcular el área de la parte de la superficie ciondica $-x^2 + y^2 = av$ recortada por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + c$

4320.1. Demostrar que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación airededor del eje Ox de un circuito cerrado C situado en el semiplano superior $y \ge 0$, es igual a

$$V = - \tau \int_{C} y^{x} dx.$$

4321. Calcular

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{L}} X \, \frac{(Y - Y) \, dX}{X^2 + Y^2} \, .$$

si X = ax + by, Y = cx + d) y el circuito cerrado simple C enciera al ongen de coordenadas $(ad - bc \neq 0)$

4322. Calcular la integral I (véase el problema antenor), \hat{n} $X = \alpha(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, y el circuito simple C encierra al origen de coordenadas; además, las curvas $\phi(x, y) = 0$ y $\psi(x, y) = 0$ tienen unos cuantos puntos simples de intersección en el interior del circuito C

4323 Demostrar que, si C es un circuito cerrado y l es una dirección arbitraria, entonces

$$\oint_{c}\cos\left(t,\ n\right) ds=0,$$

donde n es la normal exterior al circuito C

4324. Hallar el valor de la integral

$$I = \oint_C \{x \cos(n, x) + \cos(n, y)\} ds$$

donde C es una curva cerrada simple que limita un recinto finito S, y n es la normal exterior a la misma

4325. Hallar

$$\lim_{d \to \infty} \frac{1}{\sqrt{S}} \oint_{C} (F \cdot n) \ ds,$$

donde S es la figura limitada por un circuito C que encierra al punto (x_0, x_0) , d(S) es el diâmetro del recinto S, n es el vector antiario de la normal exterior al cucanto C y $F_A Y_A Y_A Y_B$ es un vector con diferencial continua en S + C

13, APLICACIONES FISICAS DE LAS INTEGRALES CURVILINEAS

§ 13. Aplicaciones físicas de las întegrales curvilíneas

4326. ¿Con qué fuerza atrae una masa M, distribuida un formemente n la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = a^2$, $y \ge 0$, a un punto material de masa m que ocupa la posición (0,0)?

4327. Calcular el potencial logaritmico de simple capa

$$u(x_1 \mid y) = \oint_C \kappa \ln \frac{1}{r} ds,$$

donde x = const es la densidad, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ y el circunto Ces a circunferencia $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Calcular en coordenadas polares ρ y ϕ los potenciales logaritmicos de simple capa

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi \text{ y } I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{\pi}{r} d\psi$$

donde r es la distancia del punto (ρ, φ) al punto variable $(1, \varphi)$ y m es un número natural

4329. Calcular la integral de Gauss

$$u\left(x\mid y\right)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(x\mid x\right)}{x}\,dx.$$

donde $r = \sqrt{(\xi - \chi)^2 + (\eta - \chi)^2}$ es la longitud del vector r que une el punto A(x, y) con el punto variable $M(\xi, \eta)$ de un circulto cerrado liso simple $C_r(r, \eta)$ es el ángulo formado por el vector r y la normal exterior η a la curva C en su punto M

4330. Calcular en coordenadas polares ρ y ϕ los potenciales logaritmicos de doble capa

$$K_3 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(r, n)}{r} d\psi \text{ y } K_2 = \int_0^{\pi} \sin m\psi \frac{\cos(r, n)}{r} d\psi,$$

donde r es la distancia del punto $A(\rho, \varphi)$ al punto variable $M(1, \psi), (r, n)$ es el ángulo formado por la dirección $AM = r \vee el radio OM = n$, trazado desde el punto O(0, 0) y rr es un numero natural.

4331. Una función dos veces diferenciable u = u(x, y) se llama armónica, si $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Demostrar que u es una función armónica si, y sólo si

$$\oint_{\mathcal{S}} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = 0.$$

donde C es un circuito cerrado arbitrario y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada respecto de la normal exterior a este circuito

4332. Demostrar que

$$\int_{S} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{2} \right] dx \, dy = - \int_{S} \int u \, \Delta u \, dx \, dy + \int_{C}^{C} u \, \frac{\partial u}{\partial n} \, dz$$

donde el circuito liso C limita un recinto finito S.

4333. Demostrar que una función, que es armónica en el intenor de un recinto finito S y en su frontera, se determina univocamente por sus valores en el circuito C (vease el problema 4332)

4334. Demostrar la segunda fórmula de Green en el plano

$$\iint_{S} \left| \frac{\Delta u \, \Delta v}{u \, v} \right| dx \, dy = \int_{C}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{ds}{ds}.$$

donde el circuito liso C limita un recinto finito S y $\frac{\partial}{\partial n}$ és la denvada in dirección de la normal exterior a C

4335. Aplicando la segunda formula de Green, demostrar que si " (v. r) es una función armónica en un recinto cerrado in no S se 10000

$$\tau\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^{n+i}r}{\sqrt{r}}-\ln r\frac{\pi_{i}}{\delta}ds,$$

donde C es la frontera del recinto S, n es la dirección de la normal exterior al circuito C, (v, v) es un punto interior del recinto $S y r = \sqrt{(\xi - y)^2 + (\eta - y)^2}$ es la distancia del punto (x, y) al punto variable (E, n) del circuito C.

Indicación Recortar es punto (v. 1) del recinto S junto con un entorno circular infinitésano del mismo y aplicar la segunda formula de Green a la parte restante del recinto S.

4336. Demostrar el teorema de la media para una función armónica $\mu(M) = \mu(x, y).$

$$n(M) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\mathcal{E}} u(\xi, \eta) ds_1$$

donde C es una circunferencia de radio R con el centro en el punto M

4337. Demostrar que una función armónica u (x, y) en un recinto arrado y acotado, que no es constante en este recinto, no puede ilcanzar sus valores máximo y minimo absoluto en un punto nterior de este recinto (principio del valor máximo).

4338. Demostrar la formula de Riemann

$$\iint_{S} \left| \int_{a}^{L(u) \cdot M(v)} dx \, dy = \oint_{C} P \, dx + Q \, dy,$$

donde

$$L[n] = \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial a}{\partial x} - b \frac{\partial a}{\partial y} - cn,$$

$$M[\tau] = \frac{c[\tau]}{cx[\sigma]} - a \frac{\partial \sigma}{\partial x} - b \frac{c\sigma}{cy} - c\sigma$$

(a, b, c son constantes). P y Q son unas funciones determinadas y el circuito C limita un recinto finito S.

4339 Sean $u = u_1(x_1) + y_2 + z_3 + z_4 + z_4 + z_5 + z_4 + z_5 dad del flujo de un nou do en regimen permanente. Determinar a canndad de líquido que sale en una unidad de tiempo de un recinto S limitado por un circuito Cito sea la diferencia entre las cantidades de aquido que sale y que entra). A que ecuaç on satisfacen las funciones wy 1, si el liquido es incompresible y en el recinto S no hay manantia les y sumideros"

4340. Según la ley de Biot y Savart, una corriente electrica i que tecorre un elemento de conductor ds, engendra en el punto del espacio M(x, y, z) un campo magnético de intensidad

$$dH = kt^{\frac{r}{r} \frac{d\theta}{r^2}},$$

donde r es el vector que une el elemento ds con el punto M y k es el coefficiente de proporcionalidad.

Hallar las provecciones $H_{\pi}, H_{\pi}, H_{\pi}$ de la intensidad del campo magnético H en el panto M para el casó de un conductor cerrado C

§ 14. Integrales de superficie

1º Integral de superficie de primera especie. Si S es una superficie bilateral lisa a trozos

$$x = x(u, v)$$
 $y = y(u, v)$ $\varepsilon = \epsilon(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega)$ (b)

v f (x, y, z) es una función, definida y continua en los puntos de la superficie S. entonces

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z) dS = \iint\limits_{S} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^{2}} dx dv, \quad (2)$$

donde

$$\begin{split} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^{2}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{2}, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{split}$$

En particular, si la ecuación de la superficie S tiene la forma

$$\varepsilon = \varepsilon (x, y) \quad ((x, y) \in \sigma.$$

donde z(x, y) es una función uniforme con diferencial continua, se tie-

$$\iint_{S} f(x, y, z) dS = \iint_{S} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{2}} dx dy.$$

Esta integral no depende de la cara de la superficie S elegida

Si se considera que f (x, y, z) es la densidad de la superficie S en el punto (x, y, z), entonces la întegral (2) representa la masa de esta

superficie
2.º Integral de superficie de 2º especie. Si S es una superficie b.lateral lisa, S* es la cara de la misma que se caracteriza por la dirección de la norma $n \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}, P = P(x, y, z) | Q = Q(x, y, z),$ R = R(x, x, z) son tres funciones definidas y commutas en la superficie S. entonces

$$\iint_{S^+} P dy dx + Q dx dx + R dx dy = \iint_{S} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$
 (3)

Si la superficie S viene dada en forma paramétrica (1), entonces los cosenos directores de la normal n se determinan por las formulas.

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm 1 A^{3} + B^{2} + C^{2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm 1 A^{3} + J^{2} + C^{2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm 1 A^{3} + b^{2} + C^{2}}.$$

donde

$$A = \frac{\partial \left(y, z\right)}{\partial \left(u, v\right)}, \quad B = \frac{\partial \left(z, z\right)}{\partial \left(u, v\right)}, \quad C = \frac{\partial \left(x, y\right)}{\partial \left(u, v\right)}.$$

y el signo ante el radical se elige de un modo adecuado. Al pasar a la otra cara S de la superficie S la integral (3) cambia su pino por opuesto.

Problemas:

434). ¿Cuánto se diférencian entre sí las integrales de superficie

$$I_{1} = \iint_{S} (x^{2} + y^{2} + z^{4}) dS$$

$$I_1 = \iint\limits_{P} (x^2 + y^2 + z^2) dP,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y P es la superficie del octaedro $\{x \mid + |y|\} + |z| = a$, incrito en esta esfera?

4342. Calcular

$$\iint_S z \, dS,$$

donde S es la parte de la superficie $x^2 + z^2 = 2az$ (a > 0), recortada por a superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Calcular las siguientes integrales de superficie de la especie

4343.
$$\iint_{S} (x + y + z) dS$$
, donde S es la superficie
$$x^{2} + y^{2} + z^{2} = a^{2}, z \ge 0.$$

4344.
$$\iint_{S} (x^2 + y^2) dS$$
, donde S es la frontera del cuerpo
$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$$
.

4345.
$$\iint_{S} \frac{dS}{(1+x+y)^{4}}$$
, donde S es la frontera del tetraedro

$$x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0.$$

4346. $\iint |xyz| dS_z$ donde S es la parte de la superficie $|z-y|^2+|z|^2$ recortada por el plano z = 1.

4347. \iint_{K}^{dS} , donde S es la superficie del clipsoide y h es la distancia del centro del elipsoide al plano que es tangente al elemento de de la superficie del elipsoide.

4348. . . . dS. donde S es la parte de la superficie del helicoide $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, z = v(0 < u < a, $0 < v < 2\pi)$.

4349. \$\int z^2 dS_c\$ donde \$S\$ es la parte de la superficie del cono $(0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi)$ y α es una constante $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint (xy + yz + zx) dS$, donde S es la parte de la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, recortada por la superficie

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

4351. Demostrar la fórmula de Poisson

$$\int_{S} f(x) dx = c \int_{S} dx = 2\pi \int_{S} f(x) \left[\frac{a^{2} - b^{2}}{a^{2} - b^{2}} \right] du,$$

donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 4352. Hailar la masa de la cápsula parabólica

$$z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2, \quad (0 \le z \le 1)_0$$

caya densidad var'a según la ley $\rho = c$

4352.1. Hallar la masa de la sennesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = z^2 \qquad (z \geqslant 0).$$

cay's densituad en cada uno de sus pantos I a a cites igual a ca-

4352.2 Halar los momentos estatados de la lamina traa igular homogenteu

$$x+y+z=a$$
 $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$

respecto de los planos coordenados.

4353. Calcular el momento de mercia respecto del eje Oz de la cipsula homogénea esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
 $(z \ge 0)$

de densidad po.

4354. Calcular el momento de inercia de la cápsula homogénea cómica

$$\frac{z^{1}}{a^{2}} + \frac{y^{3}}{a^{2}} - \frac{z^{3}}{b^{2}} = 0 \qquad (0 \le z \le b)$$

de densidad po respecto de la recta

$$\frac{z}{1} = \frac{u}{0} = \frac{z-b}{0}.$$

4355. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la parte de la superficie homogénes

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

recortada por la superficie $x^2 + y^2 = ax$

4356. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie homogénea

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$
 $(x \ge 0; y \ge 0; x - y \le a)$

4356.1. Hallar los momentos polares de inercia

$$I_0 = \sum_{S} (x^2 + y^2 + z^2) aS$$

de las siguientes superficies S

a) la superficie del cubo max (|x|, |y|, |z| = a.

b) la superficie total del cilindro $x^2 + y^2 \le R^2$ $0 \le .. \le H$.

4356.2. Hallar los momentos de inercia de la lámina triangular

$$y + y + z = 1$$
 $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$

respecto de los planos coordenados.

4357. ¿Con que fuerza atrae la superficie cómea truncada homogé-

$$x = r \cos q$$
, $y = r \sin q$, $z = r \ (0 \le q \le 2\pi, \ 0 < b \le r \le a)$

de densidad ho_0 a un pinto material de masa m situado en el vértice de esta superficie

4358. Hallar el potencial de la superficie esférica homogenea $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, de densidad ρ_0 , en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, el decir, calcular la integral

$$n = \int_{\mathcal{S}} \int \frac{\varrho_0 \, dS}{r} \, ,$$

donde $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. 4359. Calcular

$$F(t) = \int_{|x+y| < z=t} f(x, y, z) dS,$$

donde

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^{1} - y^{2} - z^{2}, & \text{si } x^{1} + y^{2} + z^{3} \leq 1, \\ 0, & \text{si } x^{2} + y^{2} + z^{2} > 1. \end{cases}$$

Construir la gráfica de la función u = F(t).

4360. Calcular la integral

$$F(t) = \int_{x^2 + y^2 + z^2 = t^2} f(x, y, z) dS,$$

donde

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^3 - y^2, & \text{st } z \ge \sqrt{x^3 - y^3}, \\ 0, & \text{st } z < \sqrt{x^2 + y^3}. \end{cases}$$

4361. Calcular la integral

$$F(x, y, z, t) = \int_{S} \int (\xi, \eta, \xi) dS,$$

donde S es la esfera variable

$$(\xi - 1)^2 + (\eta - 1)^2 + (\xi - 2)^4 = t^4$$

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{si} & \xi^{1} + \eta^{2} + \zeta^{1} < \sigma^{2}; \\ 0, & \text{si} & \xi^{2} + \eta^{2} + \zeta^{2} > \sigma^{2}, \end{cases}$$

pipomendo que

$$r = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3} > a > 0.$$

Calcular las siguientes integrales de superficie de 2º especie.

4362. $\iint_{S} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy), \text{ donde } S \text{ es la cara exterior}$ $\text{de la esfera } x^{2} + y^{1} + z^{2} = a^{2}.$

4363. $\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$, donde f(x), g(y), h(z) son functiones continuas y S es la cara exterior de la superficie del paralelepipedo $0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$; $0 \le z \le c$.

4364. $\iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy, \text{ donde } S \text{ es}$ la cara exterior de la superficie cônica $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le h)$

4365.
$$\iint \left(\frac{dy \, dz}{z} + \frac{dz \, dx}{y} + \frac{dx \, dy}{z} \right), \quad \text{donde } S \text{ es la cara exterior de}$$

elipsoide $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1$.

4366. $\int_{S} \int x^{2} dy dz + y^{2} dz dx + z^{2} dx dy$, donde S es la cara exterior de la esfera $(x-a)^{2} + (y-b)^{2} + (z-c)^{2} = R^{2}$

§ 15. Formula de Stokes

Si P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z) son funciones condiferenciales continuas y C es un circuito cerrado simple y liso a trozos que limita una superficie bilateral finita S, lisa a trozos, entonces se ventica la fórmula de Stokes

$$\int_{S} P dx + Q dy + R dz + \int_{S} \int_{Q} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{$$

donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ son os cosenos directores de la normal a la superficie S, cuya dirección es tal que tespecto de esta el recornido cel circuito C se efectúa en sentido contrario al del movimiento de las asuas del reloj (para un sistema de coordenadas de mano derecha).

Problemas.

4367. Aplicando la fórmula de Stokes, calcular la integral curvitines

$$\oint_{\mathcal{E}} y \, dx + z \, dy + x \, dz,$$

donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, x + y + z = 0, recombia en sentido contrario al del movimiento de las agujas del relogimirando desde la parte positiva del eje Ox.

Comprobar el resultado mediante un cálculo directo.

4368. Calcular la integral

$$\int_{z=B} (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz,$$

tomada sobre el arco de la hélice circular

$$x = a \cos \varphi$$
, $y = a \sin \varphi$, $z = \frac{h}{2\pi} \varphi$

desde el punto A (a, 0, 0) hasta el punto B (a, 0, h).

Indicación. Completar la curva AmB con un segmento rectilineo y aplicar la fórmula de Stokes.

4369. Sea C un circuito cerrado, situado en el plano

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma + p = 0$$

teos α , cos β , cos γ son los cosenos directores de la normal al plano), que linuta una lámina S.

Hallar

$$\oint_{\zeta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

donde el recorrido del circuito es en sentido posição.

Aplicando la formula de Stokes, calcular las integrales.

4370.
$$\oint (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$$
,

donde C es la clipse $y = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$ $(0 \le t \le \pi)$, recorrida en sentido del crecimiento del parametro t

4871.
$$\oint (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$$
,

donde C es la elipse $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ (a > 0, h > 0) recorrido en gentido contrano al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

4372.
$$\oint (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$$
,

donde C es la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ {0 < r < R, z > 0}, recornda de tal modo que el recinto menor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, limitado por la misma quede hacia la izquierda

4373.
$$\oint_{\mathcal{E}} (y^{x} - z^{x}) dx + (x^{2} - x^{2}) dy + (x^{3} - y^{3}) dz$$

donde C es la sección de la superficie del cubo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ efectuada por el plano $x + y + z = \frac{3}{2}a$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando desde la parte positiva del eje Ox.

4374.
$$\oint y^3 z^2 dz - x^2 z^3 c_3 + x_3^2 dz$$
,

donde C es la curva cerrada $x=a\cos t, y=a\cos 2t, z=a\cos 3t$ recorreda en el sentida del crecimiento dei parámetro t

4375. Demostrar que la func on

$$W(x, y, z) = k_1 \int_{S}^{\infty} \frac{\cos r}{r^2} \frac{R}{r} dS \qquad (k = const),$$

donde S es una superficie limitada por el circulto C, n es la normal a a superficie S y r es e. 126,0 vector que une un punto del espacio M(x, v|z) con el punto variable A (ξ , η , ξ) del circulto C, representi el potencial del campo inignetico H, engendrado por la corriente I que tecorre el circulto C (véase el problema 4340)

§ 16. Formula de Ostrogradski

Si S es una superficie lisa a trozos, que limita un volumen V, V = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z) son funciones continuas junto con sus derivadas parciales de V orden en el recinto V + S entonces se verifica la formula de Ostrogradski

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dS = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx dx dx.$$

donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ son los cosenos directores de la nomenterior a la superficie S.

Problemas'

Aplicando la fórmula de Ostrogradski, transformar las siguiem ntegrales de superficie, si la superficie lisa S limita un volumen finito γ cos α , cos β , cos γ son los cosenos directores de la normal superficie S.

4376.
$$\int_{S} \int x^{3} dy dz + y^{3} dz dx + z^{3} dx dy,$$

4377.
$$\iint_{S} yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx + xy \, dx \, dy$$
.

4378.
$$\int_{\mathbb{R}} \int \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

4379.
$$\int_{S} \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

$$+\left(\frac{\sigma Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$$

4381. Demostrar que si S es una superficie cerrada simple y l es una dirección constante arbitraria, entonces

$$\iint_{S} \cos(n, I) dS = 0,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S.

4382. Demostrar que el volumen del cuerpo limitado por una superficie S, es igua, a

$$V = \frac{1}{3} \int \int \langle x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \rangle dS,$$

donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie S.

4383. Demostrar que el volumen de un cono limitado por una superficie cónica lisa F(x, y, z) = 0 y el piano Ax + By + Cz + D = 0, es igual a

$$V - \frac{1}{3}SH$$

de S es el área de la base del cono, situada en el plano dado y H es

4384. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies

$$x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v,$$

$$y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v,$$

$$z = c \sin u.$$

4385. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie

$$x = u \cos v$$
, $y = u \sin v$, $z = -u + a \cos v$ $(u \ge 0)$

los planos: x = 0 y z = 0 (a > 0).

4385.1. Hallar el volumen dei cuerpo limitado por el toro

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi,$$

$$y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi,$$

$$z - a \sin \psi$$

$$(0 < a \le b).$$

4386. Demostrar la fórmula

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{x^2 + y^2 + z^2 \le t^2} f(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz \right\} =$$

$$= \int_{x^2 + y^2 + z^2 = t} f(x, y, z, t) \, dS + \int_{z^2 + y^2 + z^2 \le t^2} \frac{\partial f}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (t > 0).$$

Aplicando la fórmula de Ostrogradski, calcular las siguientes integrales de superficie

4387.
$$\iint_{S} x^{2} dy dx + y^{2} dx dx + x^{2} dx dy,$$

donde S es la cara exterior de la frontera del cubo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$

donde S es la cara exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

4989.
$$\iint (x-y+z) \, dy \, dz + (y-z+x) \, dz \, dx +$$

$$+(x-x+y) dx dy$$

donde S es la cara exterior de la superficie

$$|x-y+z|+|y-z+z|+|z-z+y|=1$$

4390. Calcular

$$\int_{S} \int_{S} (x^{2} \cos \alpha + y^{2} \cos \beta + s^{2} \cos \gamma) dS,$$

donde S es la parte de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \le z \le h$) $\frac{3}{2}$ cos α , cos β , cos γ son los cosenos directores de la normal exterior a company α superficie.

Indicacion Adjuntar la parte del plano

$$z = h$$
 $x^2 + y^3 \le h^3$.

4391. Demostrar la fórmula

$$\int \int \int \frac{d^{\frac{p}{p}} \, d\eta \, d\xi}{r} = \frac{1}{2} \int \int \int \cos \left(r, \ n\right) \, dS,$$

normal extenor a la superficie S en el punto variable de la misma $(\xi, \eta, \xi), r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2}$ y r es el radio vector que va del punto (x, y, z) al punto (ξ, η, ζ)

4392. Calcular la integral de Gauss

$$I(x, y, z) = \int_{S} \int_{S} \frac{\cos(r-n)}{r^{\alpha}} dS,$$

donde S es una superficie simple cerrada lisa que limita un volumen V n es la normal extenor a la superficie S en el punto de la misma (ξ, η, ζ) , r es el radio vector que une el punto (x, y, z) con el punto (ξ, η, ζ) y $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$

Examinar dos casos

a) la superficie S no encierra al punto (x, y, z),

b) la superficie S encierra al punto (x, y, z)

4393. Demostrar que, si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \bullet$$

y S es una superficie lisa que limita un cuerpo finito V, entonces e venfican las siguientes fórmulas:

a)
$$\int_{S} \int \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int \iint \Delta u \, dx \, dy \, dz$$
;

$$\int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz +$$

$$+ \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} u \, \Delta u \, dx \, dy \, dz,$$

de u es una función continua junto con sus derivadas parciales hasta $\frac{1}{dt}$ segundo orden inclusive en el recinto V + S y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada papecto de la normal exterior a la superficie S.

4394. Demostrar la segunda fórmula de Green en el espacio

$$\iiint_{\mu} \frac{\Delta u}{v} \left| dx dy dz = \iint_{S} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} \right| dS,$$

Coode el volumen V està limitado por la superficie S, n lleva la Grección de la normal exterior a la superficie S y las funciones u=u(x, y, z), v=v(x, y, z) son dos veces diferenciables en el recinto 1. + S.

donde S es una superficie cerrada que limita un volumen V, n es la 3 . it. it 4395. Una función $u=u\;(x,y,z)$, que admite derivadas continuas bista el segundo orden inclusive en un recinto, se llama armónica en el

$$\Delta u \equiv \stackrel{\bar{\partial}^2 u}{\partial x^2} + \stackrel{\bar{\partial}^2 u}{\partial y^2} + \stackrel{\bar{\partial}^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

Demostrar que, si u es una función armónica en un recinto cerrado mito V limitado por una superficie lisa S, entonces se verifican las formulas:

$$= a) \int_{\mathcal{S}} \int \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0;$$

$$\oint_{\mathbb{R}^{n}} \mathbf{b} \int_{\mathbb{R}^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{z} \right] dx dy dz = \iint_{\mathbb{R}^{n}} u \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S.

Apicando la fórmula b), demostrar que una función armónica en un tecnto V se determina univocamente por sus valores en la frontera S. 4.4396. Demostrar que, si una función u = u(x, y, z) es armónica en recinto cerrado finito V limitado por una superficie lisa S, entonces

$$u\left(x,\ y,\ x\right) = \frac{1}{4\pi} \int_{S} \left[u \frac{\cos\left(r,\ n\right)}{r^{\alpha}} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

donde r es el radio vector que va del punto interior (x, y, z) del recuto V al punto variable (ξ, η, ζ) de la superficie ξ $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, n es el vector de la normal catamora la superficie S en el punto (ξ, η, ζ) .

4397. Demostrar que, si u = u (x, y, z) es una función armónica en el intenor de una esfera S de radio R con el centro en el punto (x_0, y_0, z_0) , entonces

$$u\left(x_{0},y_{0},z_{0}\right):=\frac{1}{4\pi R^{2}}\int_{S}u\left(x_{0},y_{0},z\right)dS$$

(teorema del valor medio).

4398. Demostrar que, si una función u = u(x, y, z) es continua ca un recinto cerrado y acotado V y es armónica en el interior del mismo, entonces no puede alcanzar sus valores máximo y mínimo absolutos ca un punto interior del recinto, a no ser que la función sea idénticamente constante (principio del máximo).

4399. Un cuerpo V está totalmente sumergido en un líquido Basándose en la ley de Pascal, demostrar que la fuerza de empuje que experimenta el líquido es igual al peso de un volumen de agua igual al volumen del cuerpo, y va dirigida verticalmente hacia arriba (ley de Arquimedes)

4400. Sea S_1 una esfera variable $(\xi - x)^2 + (\eta - 1)^2 + (\zeta - z)^2 - t^2$ y $f(\xi, \eta, \zeta)$ una función continua. Demostrar que la función

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\sqrt{t}} \int_{S_t} \frac{f(\tilde{s}, \eta, \tilde{s})}{t} dS_t$$

satisface a la ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y a las condiciones iniciales: $u \Big|_{t=0} = 0$, $\frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = f(x, y, z)$.

Indicación. Expresar la derivada $\frac{du}{dt}$ en forma de una integral triple.

§ 17. Elementos de la teoría de campo

1.° Gradiente. Si u(r) = u(x, y, z), donde r = xi + yj + zk, es un campo escalar con diferencial continua, entonces se llama gradiente del mismo al vector

grad
$$u = \frac{\partial u}{\partial x}t + \frac{\partial u}{\partial y}f + \frac{\partial u}{\partial x}k$$

e, abreviadamente, grad $u = \nabla u$, donde $\nabla = t \frac{\partial}{\partial x} + J \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial x}$.

El gradiente del campo u en un punto dado (x, y, z) lleva la dirección de la norma) a la superficie de nivel u(x, y, z) = C que pasa por este punto Ede vector, en cada punto, es igual en valor absoluto a

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

y su dirección, coincide con la de la velocidad máxima de variación de la

La derivada del campo u en una dirección l (cos α , cos β , cos γ) es

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g_{x} x \text{ and } u \quad t = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial q} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

2.º Divergencia y rotor de un campo. Si

$$a(r) = a_x(x, y, z) t + a_y(x, y, z) f + a_z(x, y, z) k$$

sun campo vectorial con diferencial continua, entonces, el escalar

$$div a = Va = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

ullama divergencia de este campo El vector

$$\cot a = \forall \times a = \begin{bmatrix} f & f & h \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_x \end{bmatrix}$$

z denomina rotor del campo o rotacional.

3.° Flujo de un valor a través de una superficie. Si el vector a (r) engendra un campo vectorial en un recinto Ω , se llama flujo del vector a través de la superficie dada S, situada en Ω , en una dirección determinada, caracterizada por el vector normal n { $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ }, a la utegral

$$\int_{S} \int a_{m} dS = \int_{S} \int (a_{x} \cos \alpha + a_{y} \cos \beta + a_{z} \cos \gamma) dS.$$

donde $a_n = an$ es la proyección normal del vector. La fórmula de Ostrogradski en forma vectonal es.

$$\iint_S a_n \, dS = \iiint_S \operatorname{div} a \, dx \, dy \, ds,$$

17. ELEMENTOS DE LA TEORIA DE CAMPO

donde S es la superficie que limita al volumen V y n es el vector unitario de la normal exterior a la superficie S

4.º Circulación de un vector. Se llama integral lineal del vector a [7] tomada sobre una curva C (traba,o Jel campo), al número

$$\int_{C} a dr = \int_{C} a_{x} dx + a_{y} dy + a_{z} dz.$$

Si el circuito C es cerrado, entonces la integral lineal se llama circulación del vector a a lo largo del circuito C

En forma vectorial, la formula de Stokes tiene la forma

$$\oint_{S} a \, dr = \iint_{S} (\operatorname{rot} a)_{n} \, dS,$$

donde C es un circuito cerrado que representa el borde de la superficie S donde tiene que elegirse el sentido de la normal n a la superficie S de tal modo que, para un observador situado en la superficie S con la cabeza en dirección de la normal, el recorrido del circuito C se efectivo en sentido contrano al del movimiento de las agujas del teloj spara un sistema de coordenadas de mano derecha).

5.º Campo potencial. Un campo vectorial a (r) que es el gradiente

de un escalar u

grad
$$a = a$$
.

se llama potencial, y u se llama potencial del campo. Si el potencial u es una función aniforme, se tiene

$$\int_{AB} a dr = u_A(B) - u(A).$$

En particular, en este caso la circulación del vector a es igual a cero.

La condición necesaria y suficiente para que un campo a, dado en un recinto superficial simplemente conexo, sea potencial, es que se cumpula condición rot a=0, o sea, que el campo sea irrotacional

Problemas.

4401 Hallar el módulo y la dirección del gradiente del campo $y = x^2 + 2x^2 + 3z^2 + xx + 3x - 2x - 6z$ en los puntos a) O(0,0)01 b) A(1,1,1), c) B(2,0,1) En qué punto el gradiente del campo di igual a cero?

4401.1. Sea

$$u = xy - z^a$$
.

Mar el módulo y la dirección del gradiente gradu en el punto M(-9, 12, 10). ¿A qué es igual la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en dirección de la bactriz del ángulo coordenado xOy?

4402. ¿En qué puntos del espacio Oxyz el gradiente del campo

$$u = x^{1} + y^{2} + z^{3} - 3xyz$$

a) es perpendicular al eje Oz;

b) es paralelo al eje Oz,

c) es igual a cero?

4403. Se considera el campo escalar

$$u = \ln \frac{1}{r}$$
,

donde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. En qué puntos del espaco Oxyz se venfica la igualdad

$$|grad u| = 12$$

4404. Construir la superficie de nivel del campo escalar

$$u = \sqrt{x^3 + y^3 + (z + 8)^2} + \sqrt{x^3 + y^4 + (z - 8)^4}.$$

Hallar la superficie de nivel que pasa por el punto M (9, 12, 28). A qué es igual el máx u en el recinto $x^2 + y^2 + z^2 \le 36$?

4405 Hallar el ángulo φ formado por los gradientes del campo

$$u = \frac{x}{x^2 + y^3 + z^3}$$

en los puntos A (1, 2, 2) y B (-3, 1, 0).

4406. Se considera el campo escalar

$$a = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

Construir la superficie de nivel y la superficie de igual módulo del

Hallar inf u sup u, inf | grad u |, sup | grad u | en el recinto 1 < z < 2

4407. Con una precision vista de infinitesimos le orden supenos, hadar la distancia en el punto $M_{\Phi}(\lambda_0, y_0, z_0)$ entre dos superficies de nivel infinitamente próximas.

$$a(x, y, z) = \varepsilon y \ u(x, y, z) = \varepsilon + \Delta c$$

sonde $u \mapsto v_0$, v_0 , v_0 , v_0) = u (gray $u \mapsto v_0 + v_0$, v_0 , v_0 , v_0 , v_0)

4408. Demostrar las fórmulas

- 3) grad ($u + c_1 = \operatorname{grad} u$ (c es una constante).
- b) grad cu = c grad u (c es una constante :
- c) gird a +1 = . rada gr dv;
- J. grad uv = v grad u + u grad v:
- 2) grad (at) Ca grad a.
- f) grad f'(u) = f'(u) grad u,
- 4409 Calcuar angrady bigrady2 c grac, str & +11+2k
- 4410. Hallat grad f(r), so $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- 4411. Hallar grad (cr.), si c es un vector constante y r es el radio vector desde el ongen de coordenadas
 - 4412 Hallar grad | c X r12, (c es un vector constante)
 - 4413. Demostrar la fòrmu a

grad
$$f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$$
.

4414. Demostrar la formula

$$\nabla^2 = 1 - 4 \nabla^2 v + v \nabla^2 a + 2 \sqrt{u} \sqrt{v},$$

donde

$$\nabla = l \frac{\partial}{\partial x} + J \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\nabla^z = \nabla \nabla = \frac{\partial^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^z}{\partial y^1} + \frac{\partial^z}{\partial z^2}.$$

4415. Demostrar que, si la función u = u (x v z) es diferenc able en un recinto convexo Ω y i grad $u \leq M$, dende M es una constante, entonces, para qualesquiera puntos A, B de Ω , se tiene:

$$|u(A) - u(B)| \leq M_Q(A, B),$$

donde g(A, B) es la distancia entre los puntos A y B.

4415 1 Expresar el grad μ para una función $\mu = \mu(x, y, z)$: a) en coordenadas calindricas, b) en coordenadas esféricas

4416. Hallar la derivada del campo $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en un punto

dado M (x, y, z) en dirección del radio vector r de este punto. En qué caso esta denvada es igual as módulo del gradiente?

4417. Hallar la derivada del campo $u = \frac{1}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

en la dirección I {cos α , cos β , cos γ }.

En qué caso esta derivada es igual a cero?

4418. Hallar la derivada del campo u = u(x, y, z) en la dirección de, gradiente del campo v = v(x, y, z).

En qué caso esta derivada es igual a cero?

4419. Expresar el campo vectoria.

$$a = c \times \operatorname{grad} u$$

mediante los versores de la base, si

$$u = \text{ar.tg} \frac{1}{1} \frac{1}{x - x}$$
 $y \in -t + j + k$.

4420. Haliar las líneas de fuerza del campo vectorial

$$a = x + jf$$
, $2zk$.

4421. Efectuando un cálculo directo, demostrar que la divergencia de un vector a no depende del sistema rectangular de coordenadas elegido.

4422. Demostrar que

$$\operatorname{div} a\left(\mathcal{M}\right) = \lim_{a \in S_{1} \to 0} \frac{1}{V} \int_{S} \int a_{x} dS,$$

donde S es una superficie cerrada que encierra al punto M y him la un volumen V, n es la normal exterior a la superficie S, d (S) es el diametro de la superficie S.

4422.1. Hallar la divergencia del campo

$$a = \frac{-4x + fu + kz}{1 \cdot x^2 + y^2}$$

en el punto M (3, 4, 5). A qué es igual, aproximadamente el fiujo \mathbf{n} del vector \mathbf{e} a través de una esfera infinitesima $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=e^{2\gamma}$

4423. Hallar

$$\operatorname{div} \begin{bmatrix} \mathbf{f} & \mathbf{f} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{\omega}_{x} & \mathbf{\omega}_{y} & \mathbf{\omega}_{z} \end{bmatrix}.$$

4424. Demostrar que

a) $\operatorname{div}(a - b) = \operatorname{div} a + \operatorname{div} b$; b) $\operatorname{div}(ac) = c \operatorname{grad} a$ (c es un vector constants, u es un escalar),

c) div (ua) = u div a + a grad u

4425. Hailar div (grad u).

4426 Hadar div [grad f(r)], donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ En que caso div [grad f(r)] = 0°

4427. Calcular: a) div r, b) div r.

4428. Calcular div [f(r) c], donde c es un vector constante

4429. Haliar div [f(r)r]. En qué caso la divergencia de este vector es gual a cero?

4430. Hallar a) div (u grad u), b) div (u grad v)

- 4431. Un fluido que llena el espacio gira alrededor del eje Oz en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj con una velocidad angular ω . Hallar la divergencia del vector de la velocidad v y del vector de la aceleración w en el punto M(x, y, z) del espacio en un instante dado de tiempo.
- 4432. Hallar la divergencia de un campo de fuerzas de gravitación engendrado por un sistema fimto de centros de atracción
- 4433, Hallar la expresión de la divergencia de un vector del plano $a = a (r, \varphi)$ en coordenadas polares $r y \varphi$.
- 4434. Expresar la div a (x, y, z) en coordenadas curvilíneas ortogonaes u, v, w, si

$$x = f\left(u, \ v, \ w\right), \quad y = g\left(u, \ v, \ w\right), \quad z = h\left(u, \ v, \ w\right).$$

Como un caso particular, obtener la expresión de la div a en coordena das cilíndricas y esféricas.

Indicación. Examinar el flujo del vector a a través de un paralele pipeso infinitésimo, limitado por las suporficies

u = const, v = const, w = const.

4435. Demostrar que:

 $a) \cos(a+b) = \cot a + \cot b;$

b) $tot(ua) = u \text{ tot } a + grad (u \times a)$

4436. Hallar a) rot r, b) rot [f (r) r]

4436.1. Hailar el módulo y la dirección del rot a en el punto H(1, 2, -2), si

$$a = \frac{y}{z} t + \frac{z}{x} J + \frac{x}{y} k.$$

4437. Hallar: a) rot of (r). b) rot $(c \times f(r) \ r)$ (c es un vector constante).

4438. Demostrar que div $(a \times b) = b$ rot a = a rot b.

4439. Hallar, a) rot (grad u), b) div (rot a).

4440. Un fluido que llena el espacio gira alrededor del eje l (cos α , cos β , cos γ) con una velocidad angular constante ω . Hallar el rotor del vector de la velocidad lineal ν en un punto del espacio M(x, y, z) en un instante dado

4440.1. Hallar la expresión del rotor de un vector del plano $\mathbf{e} = \mathbf{e} (r, \varphi)$ en coordenadas poisses r y φ

4440.2. Expresar rot a(x, y, z)

a) en coordenadas cilíndricas.

b) en coordenadas esféncas.

4441. Hallar el flujo del vector r.

a) a través de la superficie lateral del cono $x^2 + y^2 \le z^2$ $(0 \le z \le h)$

b) a través de la base de este cono

4442. Hallar el flujo del vector a = iyz + ixz + kxy:

a) a través de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 \le a^2$ $(0 \le z \le h)$;

b) a través de la superficie total de este cilindro.

4443. Hallar el flujo del radio vector r a través de la superficie

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} (0 \le z \le 1)$$

4444. Hallar el flujo del vector $a = x^2i + y^2j + z^2k$ a través del octante positivo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

4445. Hallar el flujo del vector a = yi + zj + xk a través de la superticie total de la pirámide, limitada por los planos x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a (a > 0).

Comprobar el resultado, aplicando la formula de Ostrogradski

4445.1. Hallar el flujo del vector

$$a = x^3 i + y^3 j + z^2 k$$

a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = x$

4446. Demostrar que el flujo de un vector u a través de una superfice S dada por la ecuación r = r(u, v) $((u, v) \in \Omega)$, es igual a

$$\int_{S} a_{n} dS = \int_{Q} \left(a \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial u} \right) du dv,$$

donde $a_n = an$ y n es el vector unitario de la normal a la superficie S,

4447. Hallar el flujo del vector $a = m \frac{r}{R}$ (m es una constante) si través de una superficie cerrada S que encierre al origen de coordenada.

4448. Hallar el flujo del vector

$$a(r) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e}{4\pi r_{ij}}\right),$$

donde e_i son constantes y r_i son las distancias de los puntos M_i (los manantiales) al punto variable M(r), a través de una superficie cerradi S que encierra a los puntos M_i ($i=1,2,\ldots,n$).

4449. Demostrar que

$$\iint_{S} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_{V} \nabla^{2} u \, dx \, dy \, dz,$$

donde la superficie S limita al cuerpo V.

4450. La cantidad de calor que penetra en un-campo de temperaturas n en una unidad de tiempo a través de un elemento de su perficie dS es igual a

$$dQ \Longrightarrow -kn \operatorname{grad} u dS$$
,

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica interior y n es el vector unitario de la normal a la superficie S. Determinar la cantidad de

calor acumulada por el euerpo V en una unidad de tiempo. Sirviend se de la velocidad de crecimiento de la temperatura, deducir la ecuación a la que satisface la temperatura del cuerpo (ecuación de propagación del calor).

4451 Un fluido incompresible en movimiento ocupa un volumen V Suponiendo que en el recinto V no hay manantiales y sumideros, deducir la ecuación de continuidad

$$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div}\left(\varrho v\right) = 0.$$

donde q = q(x, y, z) es la densidad del fluido, x es el vector de la velocidad, t es el tiempo.

Indicación. Examinar el flujo del fluido a través de un volumen abitrano ω contemido en V

4452. Hallar el trabajo del vector $\alpha = r$ a lo largo del arco de hélice

$$r = ia \cos t + ja \sin t + kbt \ (0 \le t \le 2\pi).$$

4452,1, Hallar el trabajo del campo

$$a = \frac{1}{u} \left(1 + \frac{1}{u} j + \frac{1}{u} k \right)$$

a lo largo del segmento rectilíneo que une los puntos M(1, 1, 1) y Y(2, 4, 8).

4452.2. Hallar el trabajo del campo

$$a = le^{y-z} + \int e^{x-x} - ke^{x-y}$$

a le largo del segmento rectilíneo que une los puntos O(0, 0, 0) y M(1, 3, 5).

4452.3 Hallar el trabajo del campo

$$a = (y+z) i + (2+x) j + (x+y) k$$

a lo largo del arco más corto de la circunferencia mayor de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que une los puntos M(3, 4, 0) y N(0, 0, 5).

4453. Hallar el trabajo del vector a = f(r) r, donde f es una funcion continua, a lo largo de un arco AB.

4454. Hallar la circulación del vector

$$a = -yi + xj + ch$$

(c es una constante); a) a lo largo de la circunferencia $x^2 + v^2 = 1$, z = 0; b) a lo largo de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, z = 0.

4455. Hallar la circulación Γ del vector $a=\operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$ a lo largo de un circulto C en dos casos: a) C no encierra al eje Oz, b) C encierra al eje Oz

4455 1. Se considera el campo vectorial

$$a = \frac{y}{\sqrt{z}}i - \frac{x}{\sqrt{z}}J + \sqrt{xy}k.$$

Calculando rot a en el punto M(1, 1, 1), hallar aproximadamente a circulación Γ del campo a lo largo de la circunferencia infinitésima

$$(x-1)^{2} + (y-1)^{3} + (x-1)^{3} = \epsilon^{3},$$

$$(x-1)\cos q + (y-1)\cos \beta + (x-1)\cos \gamma = 0$$

$$(x-1)\cos q + \cos^{2} \gamma = 1.$$

4456. El flujo de un fluido en el plano en régimen permanente se caractenza por el vector de la velocidad

$$w := u(x_1 \mid y) I + v(x_1 \mid y) J.$$

Determinar: 1) la cantidad de fluido Q que penetra a través de un circuito cerrado C que bir ita un recinto S (consumo de fluido) ?) la circulación Γ del vector de la velocidad a lo argo del circuito C. A qué ecuaciones satisfacen las funciones μ . ν , si el fluido es incompresible y el flujo es irrotacional?

4457. Comprobar que el campo

$$a = yz(2x + y + z)t + xz(x + 2y + z)f(-x)x + y + 2z,k$$

es potencial y hallar el potencial del mismo.

4457.1. Cerciorándose que es potencial el campo

$$a = \frac{2}{|y+z|^{\frac{1}{2}}} i - \frac{x}{|y+z|^{\frac{1}{2}}} j - \frac{x}{|y+z|^{\frac{1}{2}}} k_x$$

hallar el trabajo del mismo a lo largo del camino que une en el octante positivo los puntos M(1, 1, 3) y N(2, 4, 5).

4458. Hallar el potencial del campo gravitatorio

$$a = - \frac{m}{r!} r_1$$

engendrado por una masa m situada en el ongen de coordenadas.

4459. Hallar el potencial del campo gravitatorio engendrado por un decema de masas m_i (i = 1, 2, ..., n) situadas en los puntos M_i (i = 1, 2, ..., n).

4460. Demostrar que el campo a=f(r)r, donde f(r) es una funcion aniforme continua, es potencial. Hallar el potencial de este campo.

4461. Demostrar la fórmula

$$\operatorname{grad}_r \left\{ \iint_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}(Q) \stackrel{dV}{,} \right\} = - \iint_{S} \mathbb{Q}(Q) n \frac{dS}{r} + \iint_{\mathbb{R}} \operatorname{grad}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(Q) \frac{dV}{r} ,$$

donde S es una superficie que limita un volumen V, n es la normal extenor a la superficie S, r es la distancia entre los puntos P(x, y, z) y $Q(\xi, \eta, \xi)$.

4462. Demostrar que, si a = grad u, donde

$$u_{\eta}x_{i}(y,z)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{o\left(\xi-\eta-\xi\right)}{z}d\xi\,d\eta d\xi$$

Ŋ

$$t = V = -x)^2 - (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

entonices

$$d \wedge a = \varrho(x, y, z)$$

(suponiendo que la integral correspondiente tiene sentido).

RESPUESTAS

PRIMERA PARTE

Capítulo I

18. C. 1. 17. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 22. -1.01 < x < -0.99 23. x < 8 $x \ge 12.24, x < -\frac{1}{2}$ 25. $0 < x < \frac{2}{3}$ 26 'x ≤ 6 27 x $> -\frac{1}{2}$ 23. $-\frac{1}{2}$ < $<3i<\frac{1}{2}$, 29. $\frac{5-1\sqrt{30}}{10}< x<\frac{5-1\sqrt{50}}{10};$ $\frac{5+1\sqrt{20}}{10}< x<\frac{5+1}{0}$ 31 La segunda. 32 Dos cifras. 33. No es superior al 0.41%. 34 9,9102 cm² ≤ ≤ S ≤ 10,0902 cm², △ ≤ 0,0902 cm², δ ≤ 0,91 %. 35. 3,93 g/cm³ ± 0,27 s/cm3 δ ≤ 73 5 36 δ ≤ 3,05 % 37 172,480 m3 ≤ v ≤ 213,642 m3 $v = 192.660 \text{ m}^3 \pm 20.982 \text{ m}^3 = 6 \approx 12 \% 38.4 \leqslant 0.7 \text{ mm} 39.4 \leqslant 0.0005$ $m.42.a) N \ge \frac{1}{\epsilon}$, b) $N \ge \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$. c) $N \ge 1 + \frac{\lg \frac{1}{r}}{\lg 2}$; d) $N \ge \frac{\lg e}{\lg 3.999} \approx 2330 \lg \frac{1}{e}$ 43. a) $V \ge E \cdot b$) $N \ge \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^{r}$. c) $N \ge 10^{10}$, 48, 0, 47, 0, 48, 0, 49, $\frac{1}{3}$, 50, $\frac{1-b}{1-a}$ 51, $\frac{1}{2}$ 52, $\frac{1}{2}$ 53, $\frac{1}{3}$. 54 4/3 55 3, 56, 1, \$7, 2, 67, a) la segunda, b) la primera c) la segunda 72. e=2,71828... 92. Es igual a 1, si $a\neq 0$ y pertenece a [-1,1], o no existe si $96. \ \ \, x_{\rm t} = 1 \frac{1}{8}, \quad 97. \ \ \, x_{\rm tot} = \frac{1}{20}, \ \, 99. \ \, x_{\rm 1900} = \frac{1000^{1.963}}{10000} \approx 2,69 \cdot 10^{403},$ **89.** $x_{a} = x_{b} = -120$. 100, $x_{bb} = 20$. 101, 0; $b_{c} = 1$; 1. 101,1, -3 = 2. $b_{c} = -2$. $b_{c} = 2$. **102.** $= 1, \ 1\frac{1}{2} \ 0; \ 1$ **103.** $0; \ 2$ **104.** $= 4, \ 6; \ = 4, \ 6, \ 105. <math>= \frac{1}{2}, \ 1, \ = \frac{1}{2} \ 1,$ $106. - \infty_1 + \infty_2 + \infty_3 + \infty_4 + \infty_4 + \infty_5 + \infty_5 + \infty_5 + \infty_6 108, $-\infty$, $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$, 110, -5, 1,25, 0, 0, 111, $-\frac{1}{2}$, 1, 112, $-\left(e+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ## 1. 113. 0; 1. 114. 1; 2. 115. 0; 1. 116. 0; 1. 117. 1, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$, 0.

118. Los números reales comprendidos entre 0 y 1, incluyendo estos últimos 119.1,5 120 a,b. 127, a) es divergente, b) puede ser tanto convergente como divergente 128 a) no se puede; b) no se puede, 129. No. 130. No. 144 a) 0.

148. $\frac{1}{2}(a-2b)$. 151. $-\infty < x < +\infty$, $x \ne -1$. 152. $-\infty < x \le -1$, y $0 \le z \le \sqrt{3}$, 153, $-1 \le x < 1$, 154, |z| > 2, |z| > 2, |z| > 2, |z| > 3, |z| < 1, $\leq (2^{5} + r^{2})^{3}$ k = 0, 1, 2, ...). 155. $|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} y \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k - r)} \leq x \leq 1$ $\leq \sqrt{\frac{1}{2}} + k + 1$, k = 1, 2, 1 157. $\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ $y = -\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}$ $<\frac{1}{35-7}$ k=0,1,2...) 158 x>0, x \neq n(n=1.2...) 159. $\frac{1}{3} \le x < 1$. 160 $x = \pm 1 \le \frac{\pi}{5} (5 = 0 \pm 1, \pm 2, ...), 161 = 10^{(1/6 - \frac{1}{2})/3} < x < 1...$ $x = 0, \pm 1, \pm 1,$) 162 x = -1, -2, -3, ... y = 0, 163 x < 0, $x \neq -2 = 1, 2$) 164 $1 < x \le 2$ 165, $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ *651 z > 1 *852 $z = \frac{\pi}{4} \leqslant z < k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, -\frac{\pi}{4})$. 163 t $0 \le x \le \frac{4\pi}{3} \le x \le \frac{3\pi}{2}$. 166 $-1 \le x \le 2$. $0 \le y \le 1\frac{1}{2}$ 167 28. $\frac{7}{3} < x < 2$ $\frac{57}{3}$ 5 = 0, ± 1 , ± 2 , ± 1 , $\pm 2 < y \le g3$ $168. -\infty < x < +\infty, 0 \le y \le \pi, 169, 1 \le x \le 100; -\frac{\tau}{2} \le y \le \frac{\tau}{2} - 170, x = \frac{y}{2} - 170, x = \frac{y}{2$ donde $p \neq q$ son números enteros $v = \pm i$ 171 $P = 25 \pm 2$ I $= \frac{b}{5}$. (0 < i < i) $5 = b_{\lambda} - 1 = \frac{x}{b}$ (0 < x < b) 172 $a = \int_{-1}^{1} 130 - 96 \cos x$ $0 < x < \tau$ S = 2, $\sin x (0 < x < x)$. 173 $S = \frac{h}{a + b} x^2$. $\sin 0 \le x \le \frac{a - b}{2}$ $S = h/x \cdot \frac{c - b}{4}$ $s_1 = \frac{a-b}{2} < x < \frac{a-b}{2}, \quad S = b \cdot \left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-s)^2}{a-b} \right]$ si $\frac{a-b}{2} \le x \le a$. 1" $x = x_0 = 0$. Si $-\infty < x < 0$; m(x) = 2x, Si 0 < x < 0; m(x) = 0 Si $< x \le 2$, n(x) = 3 so $2 < x \le 3$, m(x) = 4, so 3 < x < 7178. $E_y = \{0 \le y \le 4\}$. 179. $E_y = \{1 < y < 3\}$. 180. $E_y = \{0 < y < 1\}$ 181. $E_y = \{1 \le |y| < +\infty\}$ 182. $E_y = \{1 \le y \le 2\}$. 183. a < y < b si a < b, b < y < a si a > b, 184, $1 < y < +\infty$, 185 $0 > y > -\infty$ y $+\infty > y > 1$ 186, $0 < y \le \frac{1}{2}$. 187. $+\infty > y > -\infty$. 188. $0 < y < \frac{1}{2}$ $y = \frac{3}{2} \le x < 2$ 189. 0; 0; 0; 0; 24. 190. 0; —6 4. 191. 1 1 1 2 192. -1 0 1, 2, 4 193, 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{-x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$ $\frac{x-1}{x+1}, \frac{1+x}{1-x}$, 194. i) f(x)=0, so x=-1, x=0 y x=1 f(x)>0, so $< x < -\frac{1}{2k-2}(k-0, 1, 2)$; f(x) < 0, si $\frac{1}{2k-2} < x < \frac{1}{2k-2}$ y $\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k-2}$ $< x < -\frac{1}{2k+1} (k=0, -1, 2, ...), c) | (x) = 0, si x < 0 y x = 1, | (x) > 0$ si 0 < x < 1; f(x) < 0, A $1 < x < \frac{1}{2} co$, 195, a) a_n , b) 2x + h; c) $a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$, 197 : $x_1 = \frac{1}{3} \times (2:10) = \frac{1}{3} : f(2) = 2 \cdot \frac{2}{3} : 198. f(x) = \frac{7}{6} \times 2 \cdot \frac{17}{6} \times + 1 : f(-1) =$ = $\frac{2}{3}$ $f(0.5) = 2\frac{17}{24}$, $199. f(x) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2 = 200. f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x$. 203 a $2k1 < x < \pi + 2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, ...)$, b) $1 < x < \pi$ c) x > 0, $z \neq k$ (k=0, ..., 2)). 205 a) z = x + a, b) $z = \frac{xy}{x+y}$; c) $z = \frac{x+y}{1-xy}$, d) $z = \frac{x + y}{1 + xy}$, 206. $\varphi(\varphi(x)) = x^{4}$; $\psi(\psi(x)) = 2^{1x}$, $\varphi(\psi(x)) = 2^{2x}$, $\psi(\varphi(x)) = 2^{1}$. 207. $\varphi_{x,y}(x) = s \operatorname{gr}(x) + (\psi_x \psi_x x) = x (x \neq 0)$ $\varphi_x \varphi_y(x) = \psi_y(\varphi_x(x)) = s \operatorname{gr}(x \neq 0)$ 208. $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x); \quad \psi(\varphi(x)) = \psi(x); \quad \psi(\psi(x)) = \varphi(\psi(x)) = 0.$ 209. $-\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$ $x(x \neq 0, x \neq 1), \ 210, \ f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + nx^2}}, \ 211, \ x^2 - 5x + 6, \ 212, x^2 - 2(x) \ge 2^{\frac{1}{2}}).$ 213. $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ 213 1. $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$, 221. a) Es creciente para a > 0 y decreciente para a < 0, b) para a > 0 es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ y es creciente en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; c) es creciente; d) si ad - bc >> 0 es creciente en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ y $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ e) es creciente para a>1 y decreciente para 0<a<1. 222. Es posible, si la base de los loganimos es mayor que 1. 224 $\frac{x-3}{2} (-\infty < y < +\infty)$ 225. a) $-1/y (0 \le y < +\infty)$;

b) $\overrightarrow{Vy} \ (0 \leqslant y < +\infty)$. 226. $\frac{1-y}{1+y} \ (y \neq -1)$, 227. a) $-\sqrt{1-y^2} \ (0 \leqslant y \leqslant 1)$; b) $V(-y^2 \ (0 \le y \le 1)$. 228. Areh $y = \ln(y - 1/1 - y^2) \ (-\infty < y < +\infty)$.

229. At $b_y = \frac{1}{2} - 5 \frac{1+y}{1-y} (-1 < y < 1)$ 230. x = y, si $-\infty < y < 1$; x = 1 y

si $1 \le y \le 16$, $x = \log_2 y$, si $16 < y < +\infty$ 231 2) Es impar; b) es

par, c) es par, d) es impar; e) es impar, 233, a) Es periódica $7 = \frac{2\pi}{\lambda}$ b) es

periodica; T=1 π ; c) es periodica, T=6 π ; d) es periodica, $T=\pi$ e) no es penódica () es periodica, $T=\pi$ g) no es periódica, h) no es periodica

241. $t = \frac{2}{3} \sec x = -3\frac{1}{3} \text{ m}$ 243 $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ax}{4a} \frac{b^2}{4a}$. 244. $y = x - \frac{x^2}{36,000}$; 9 km, 36 km. 251. $x_0 = -\frac{d}{c}$; $y_0 = \frac{a}{c}$ 262. $p = \frac{12}{c}$ ($c > t_1$) 263. $k = \frac{a}{a_1}$, $m = \frac{a_1b - ab_1}{a^2}$, $n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a^2}$, $(a_1b - ab_1)$, $x_2 = -\frac{b_1}{a_1}$, 264. $y = \frac{10}{x^2}$ 287. $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\sin x_0 = -\frac{a}{A}$, $\cos x_0 = \frac{b}{A}$. 356. $y = 2 \sin x$ $|x - \pi k| \le \frac{\pi}{6}$, $|x - y| = (-1)^k$, si $|\frac{\pi}{6} < |x - \pi k| < \frac{5\pi}{6} (k - 0, -1) + 2$. 357. a) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; b) $y \in y = x^2$, si $x \ge 0$; y = 0. si x < 0; d) y = xx < 0: $y = x^4$, x > 0, x > 0, y = 1 y = 1, $x < \sqrt{3}$ $y = (-5i \quad x) < 1 \quad \text{si} \quad x > \sqrt{3}, c) \quad y = 1 \quad \text{si} \quad |x| \le 1 \quad y = 2, \quad \text{si}, \quad x > 0$ $y = (-25i \quad x) < 1 < 25i \quad \text{si}, \quad x > 25i = 25i \quad \text{si}, \quad x > 25i \quad \text{si}, \quad x > 25i = 25i \quad \text{si}, \quad x > 25i \quad \text{si}, \quad x > 25i \quad \text{si}, \quad x > 25i = 25i \quad \text{si}, \quad x > 25i = 25i \quad \text{si}, \quad x > 2$ 359 Para x < 0, se tiene a) 1) f(x) = 1 + x, 2) f(x) = -(1 + x); b) $1) f(x) = -2x - x^2$, 2) $f(x) = 2x + x^3$ c) 1) $f(x) = \sqrt{-x}$, 2) $f(x) = -\sqrt{-x}$, d) 1) $f(x) = -\sin x$, 2) $f(x) = \sin x$, e) 1) $f(x) = e^{-x}$, 2) $f(x) = -e^{-x}$, f) 1) $f(x) = \ln(-x)$, 360. a) $x = -\frac{b}{2a}$, b) $x = \frac{1}{2}$, c $x = \frac{1}{2}$ $\frac{b}{a} = \frac{z}{a}$, $\frac{z}{a} = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., 361, a) (<math>x_0 = ax_0 + b$), dende x_0 es arbitrario; b) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, c) (x_0, y_0) , donde $x_0 = -\frac{b}{3a}$ $= ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$; d) (2, 0); e) (2, 1), 372. Las raices son. - 1,88,0,35, 1,53 373 211, -0.25: -1.86. 374, 0.25, 149 375, 7.64, 376, 1,37; 10, 377, -0.54 378, 0: 4 49. 378 $x_1 = -0.57$, y = -1.2; $x_2 = -0.42$; $y_2 = 1.19$, $x_3 = 0.45$. $y_4 = -0.54$, $y_4 = -0.68$, $x_4 = -1.30$, $y_1 = 9.91$, $x_2 = 2.30$, $y_1 = -0.52$, $y_2 = -0.62$, $y_3 = -0.62$, $y_4 = -0.98$; $x_4 = 1.62$, $y_4 = -9.87$, 382, a) Engage pera no bi si 385. Está acotada supenormente pero no está acotada infenormente 387. f (a) y f (b) 390. 0; 1. 391 2; + 0. 393 $-1\sqrt{2}$ $1\sqrt{2}$ 394, $\frac{1}{2}$; 4. 395, a) 0, i: b) 0; 2. 396, 0; 1. 397, a) 8; b) 0,3; c) 0.08; d) 0,008. 398. a) π ; b) π ; c) π ; d) π . 411. a) 1, b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{2}$. 412. d. 413. 10. 414. $\frac{1}{2}$ nm (n-m) 415. 5^{-s} 416. $\left(\frac{3}{2}\right)^{ss}$. 417. $n^{-\frac{n(n-1)}{2}}$ **418.** $-\frac{1}{2}$ **419.** $\frac{1}{2}$ **420.** 1, **421.** $\frac{1}{4}$ **422.** $\frac{1}{3}$ **423.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ **424.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **424.1.** $2\frac{\pi}{24}$ **425.** $\frac{n\pi}{n}$ **426.** $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-1}$ **427.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **428.** $\frac{m-n}{2}$ **429.** $x=\frac{n}{2}$ $+\frac{a}{2}$ 430. $x^2 + ax + \frac{a^3}{3}$ 431. 1. 432. $\frac{1}{2}$ 433. 3. 434. $\frac{ab}{3}$ 435. 1 436. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

437 $\frac{4}{3}$, 438. -2. 439. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 440. $\frac{1}{16}$ 441. $\frac{1}{144}$ 442. $\frac{1}{4}$ 443. $\frac{12}{5}$ 444. $\frac{1}{a}$ **445.** -2. **446.** $\frac{1}{4}$. **447.** $\frac{2}{27}$, **448.** $\frac{3}{2}$ **449.** $4\frac{4}{27}$ **450.** $\frac{7}{36}$ **451.** $-\frac{1}{9}$ 452. $\frac{a}{m} = \frac{\beta}{n}$, 483. $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$, 455, $\frac{n}{m}$, 455, 1, $\frac{1}{2}$, 456, $\frac{1}{n1}$ 457, $\frac{1}{2}$ (2+b) **458.** $\frac{1}{2}$ **459.** $-\frac{1}{4}$, **460.** 1. **461.** $\frac{2}{3}$, **462.** 2. **463.** $\frac{4}{3}$ **464.** $-\frac{1}{4}$ **465.** $\frac{1}{n}$ × $\times (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. 466. 2^n . 467. 2n 468. $\lim_{a \to a} x_1 = \infty$. $\lim_{a \to a} x_2 = -\frac{c}{b}$. **469.** a=1, b=-1, **470.** $a_i=\pm 1$, $b_i=-\frac{1}{2}$ (i=1,2) **471.** 5. **472.** 0. 473. $(-1)^{n-n} \frac{m}{n}$, 474. $\frac{1}{2}$, 474.1. 1. 474.2. $\frac{1}{3}$ 475. $\frac{1}{2}$, 476. 2. 477. 4. 478. 479. $\frac{1}{2}$ 480. $\frac{2}{\pi}$ 482 cos a. 483. — sin a. 484. $\sec^2 a \left(a \neq (2k+1) \frac{\pi}{2} \right)$, h = 0, ± 1 , ...) 485. $-\frac{1}{\sin^2 a}$ ($a \neq *\pi$, donds k as entero), 486. $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ ($a \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, donde k es entero), 487. $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ ($a \neq k\pi$, donde k es entero), 488. — $\sin a$ **489.** — $\cos a$. **480.** $\frac{2 \sin a}{\cos^3 a} \left(a \neq (2b + 1) \frac{\pi}{2} \right)$, donde k as entero **491** $\frac{2 \cos a}{\sin^3 a} \left(a \neq k\pi \right)$ donde k es entero). 492. $\frac{3}{2} \sin 2a$. 493. -3. 494. 14 495. $\frac{1}{1}$ **496.** -24. **497** $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ $\left(a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ donde } k \text{ es entero}\right)$. **498.** $\frac{3}{4}$. **489.** $\frac{1}{4}$ **500.** $\frac{4}{3}$ **501.** $-\frac{1}{12}$ · 602. $\sqrt{2}$. 503. 0. 504. 3. 505. 0. 506. s) 6) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 1. \$07. 0. \$98.0. \$09. 0. \$10. 0. \$11. 1 \$12. e^{3} \$13. 1 514. e^{-2} , 515, e^{2d} , 516, 0, si $a_1 < a_2$, $+\infty$, si $a_1 > a_2$, e^{-a_1} , si $a_1 > a_2$ 517, c. 518, e-1, 519, 1, 519.1, 1/e. 520, $e^{\text{clg}\,\alpha}$ ($\alpha \neq k \pi$ k es entero). 521, $e^{\frac{\pi}{k}}$. 522, e^{-1} . 323, 1, 524, e^{-k} . 525, e_{n} 526. $\frac{1}{1/2}$ 527. e^{k+1} , 528. $e^{-\frac{k^2}{3}}$, 529. 1 530. 1, 531. $\frac{1}{n}$, 532. 0, 533. $\frac{1}{5}$, 534. -2, **636.** $\frac{3}{2}$, **538.** $\frac{3}{2}$, **537.** $-\frac{\log e}{x^4}$, **538.** $\frac{2a}{b}$, **539.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, **540.** 0, **540.1**, n, **541** $\ln a$ 642. $a^{\alpha} \ln \frac{a}{\epsilon}$ 543. $a^{\alpha} \ln \epsilon a$, 544. ϵ^{2} , 645. $\frac{3}{3}$, 545.1, $\epsilon^{\beta \epsilon} = \alpha^{2}$, 545.2, $\frac{a}{\beta}$. 545.3. — 2. 546. e^2 . 547. 1. 548. $\frac{\alpha}{11} a^{\alpha-1}$. 549. $a^0 \ln a$. 550. $a^{\alpha} \ln^2 a$. 551. $e^{-1^{\alpha} + 10}$. 552 ln z 553, ln z. 554, \$\frac{1}{2}\dot b. 555, \$\frac{1}{ab}\dot 556, \$\frac{1}{abc}\dot 557. \$(a^ab^bc^c)^{\alpha+b+c},\$

558. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 559. $\left(\ln \frac{a}{b}\right)^{-x}$. 560. $a^{a^0} \ln a$. 561. $a \mid 0$; 6) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. 562. $3 \rightarrow \ln 2$ 566. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, 567. 1. 568. C. 569. $\ln \alpha^2$, 570. $\frac{1}{8}$, 571. $\frac{1}{2}$ 2. - 2. 573, e^{a} , 574, $e^{\frac{a}{a}}$, 578, $\frac{a+\beta}{\sqrt{2\pi}}$, 576, a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 1, 576,1, $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{3}$ h $\frac{1}{2}$. 577.1. a) ch a_1 b) sh a_2 577.2. — 1. 678. in 2. 579. 1. 580. e^{a_1} , — $\frac{n}{n}$. $582\frac{\pi}{3}$, $583. - \frac{\pi}{2}$, $584. \frac{3\pi}{4}$, $585. \frac{1}{1+x^2}$, $586. 2.587. \frac{e^x}{x^2+1}$, t, 589. 1, 590. e^{7} 591 0. 592, 0. 593, a) $+\infty$ b) $\frac{1}{5}$, 594 a) -1, b) e^{1} is $\frac{b^{2}}{25}$. 595 a) $\frac{\pi}{5}$, b) $-\frac{\pi}{2}$, 595. a) I, b) 0 597 a) 0; b) 1 600 3 601 o -1, s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_4 , s_4 , s_5 , s_4 , s_4 , s_5 , s_6 , s_6 , s_6 , s_7 , s_8 , s_9 , sx < 1 ... 0. si (x = 1, 614 b) y = 0 so $0 \le x < \frac{1}{2}$ so x = 1 =1 st 1 < x < 1 co. 615 y = -1 st 0 < x = 0 st x = -1 st 0 < x = 0 st y = -1 st 617 y = 1 st y = 1si x>1 618. y=1, si $0 \le x \le 1$ y=x, si $1 < x = \frac{x}{2}$ 5. $x \ge 2$ 619 y = 0, si $0 \le x < 2$, y = 2 12, si x = 2, si x > 2620 b) y = 0, 51 x = 2k+1 $\frac{\pi}{2}$; y = 1, 54 x = (2k-1) = 0, ± 3 ± 2 , 621 = -2, $\sin 0 \le x \le 2$, $y = 2\pi x$, $\sin x > 2$, = 2 - 5. $-1 < x \le y = \frac{1}{2}(x-1), \quad \text{si} \quad x > 1, \quad 623, \quad y = 1, \quad x \quad y = e^{x^2}$ Si $x \to -1$ 624 y = x Si x < 0, $y = \frac{1}{2}$ Si x = 0, y = -1 x > 0625 $\frac{1}{3}$ 6251 $4 = \frac{1}{3}$ 51 $0 \le x < 1$ y 4x - 1 < x < 41 = x St 3 < x < 4x + 2 $y = 4k + 2 < x < 4k + 1 <math>y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x - x$ x = 2k + 2k + 21 (k = 1, 2, 3, ...) 625 2. y = 0, si x es radional, y = x, sirracional 625 3 El contorno del cuadrado max $\{x, y\}$ $\}$ = 1,a) x = 1, x = -1, y = x + 1, b) $y = x + \frac{1}{2}$ is $x \to -1$, $x \to -1$, $x \to -1$, c) $y = \frac{1}{x} - x$, d) y = x Si $x \to \pm \infty$, y = 0 Si x = e) y = 0si $x \rightarrow -$, y = x si $x \rightarrow +\infty$ f) $y \Longrightarrow x \rightarrow -628$. 0 $629\frac{1}{1-x}$ $630.\frac{500.0}{4}$ $632.\frac{1}{6}$, $633.\frac{6}{2}$, $634.\frac{1}{7}$ in a. 635,636 $e^{-\frac{1}{6}}$. 637. $\frac{1}{2}$, 1 - 1 1 $\frac{1}{2}$, 637 1 $\frac{2}{3}$, 637 2 $\frac{b}{1-\alpha}$ 6 $\frac{1^25-1}{2}$. 638) 1-x-1 639, 1-y(1-x), 641, $p(2,p) - \infty$; c(0,p) = 2, f(1,p)g) 2 sh 1 = 643. g) l = -1, L = 2, b) l = -2, L = 2, L = 2

644. a) l=-1, L=1; b) l=0, $l=+\cos(-c)$ $l=\frac{1}{2}$, L=2; d) l=0. L = + 00, 645, a) De primer orden, b) de segundo, c) de primero, d) de tercero, e) de tercero; f) de tercero 653. a) 2x; b) x; c) $\frac{x^2}{2}$; d) $\frac{x^3}{2}$. 655. a) $3(x-1)^2$; b) $\frac{(1-x)^3}{2\sqrt{5}}$; c) x=1 d) e(x-1, e) = x - 1, 656. a) x^2 , b) $2x^2$, c) $x^{\frac{3}{3}}$; d) $x^{\frac{1}{3}}$ 657 a) $(\frac{1}{x})^3$; b) $(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{x})^2$; c) $(-\frac{1}{4})^3(\frac{1}{x})^3$; d) $(\frac{1}{x})^3$. **658.** a) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} \right)$, b) $\sqrt{2} \left(\frac{1}{1-x} \right)^2$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{1}{-x} \right)^3$, d) $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} \right)^3$ e) $\frac{1}{x-1}$. 663. a) 9.55 < x < 10.05; b) 9.995 < x < 10.035; c) 9.9095 < x <<10,0005; d) $\sqrt{100-\epsilon} < x < \sqrt{100-\epsilon}$, 664. $\Delta < \frac{\epsilon}{23}$. ϵ) $\Delta < 3.7 mm$ b) 1 < 0.37 mm, c, 3 < 0.537 mm 665, $100 \cdot (1 - 10^{-4-1})^2 < x < 00$; -10^{-6-2} z) 81 < x < 121, b) 98.01 < x < 102.01; c) 99.8001 < x < 102.01; d) 99.49.601 < x < 100.020001. 666, $b = min(\frac{x}{11}, 1)$. < 100 2001. **667.** $\delta = \frac{\epsilon \lambda_3^2}{1 - \epsilon \lambda_4} \approx 0.7 \text{ Ls}, \quad \epsilon_1 \delta \approx 10^{-6}; \quad b) \delta \approx 10^{-6}; \quad c) \quad \delta \approx 10^{-9}. \text{ No}$ es posible 669 a) No b) si 671 No que está acotada en el punto xo 672 No si la funcion fire està cefinica en un intervalo finito (a b) entonces siempre se venfican estas des.gualdades, mas, si a, menos a o b es .gual al sim bolo ∞ , entonces him $f(x) = +\infty$, 673. No, la unicidad y continuidad de

la función inversa, 675. Es continua, 676 Es continua si A = 4, y és discontinua para x = 7, si 4 = 4 677 Es continua para x = 1 678 a) Es continua, b) es discontinua para x = 0 6-9. Es discont nua para x = 0 680. Es continua 681 Es continua o82 Es discontinua para x=1 683 Es continua para a=0y es discontinua para $a \neq 0$ 684 Es discontinua para x = 0 685. Es discontuma para x = k (k es entero), 686. Es discontinua para $x = k^2$ (k = 1, 2,) 687. x = -1 es un punto de discontinuidad infinita. 688. x = -1 es un punto de discontinuidad evitable 689 x 2 y x = 1 son puntos de discontinuidad infinita 690 x = 0 y x = 1 son puntos de discontinuidad evitable, x = -1 es un punto de discontinuidad infinita 691 x = 0 es un punto de discontinuidad evitable, x=k π $(k=\pm 1,\pm 2,...)$ son puntos de discontinuidad infinita 692 $x = \pm 2$ son puntos de discontinuidad evitable. 693, x = 0 es un punto de discontinuidad de 2º especié 694, $x=\frac{1}{k}$ ($k=\pm 1, \pm 2, ...$) son puntos de discontinuidad de 1^{8} especie, $\tau \approx 0$ es un punto de discontinuidad de 2^{8} especie. 695 x=0 y $x=\frac{2}{2k+1}$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$ son puntos de discontinuidad evitable 696, x = 0 es un punto de discontinuidad de 1º especie 697 x = 0es un punto de discontinuidad evitable 698, $\tau = 0$ es un punto de discontinuidad de 2^n especie 699, x=0 es un punto de discontinuidad evitable x=1es un punto de discontinuidad infimita 700, x = 0 es un punto de discontinuidad infinita, x = 1 es un punto de discontinuidad de 2º especie 701 $x = k \pi (k = 0, \pm a, \pm 2, ...)$ son puntos de discontinuidad de 1º especie. 702 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, -)$ son puntos de discontinuidad de 1º especie 703 $x = k (k = \pm 1 \pm 2)$ son puntos de discontinuidad de 1ª especie 704 La función es continue 705, $x = \pm \sqrt{n}$ (n = 1, 2, ...) son puntos de discontinue dad de 1ª especie. 706. $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, ...$) son puntos de discontinuidad de 1^a especie; x=0 es un punto de discontinuidad infinita, 707, $x=\frac{1}{2}(k-1)+2$ son puntos de discontinuidad de 1º especie, x = 0 es un punto de discontinuidad evitable. 708. $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,...)$ son puntos de discontinuidad de 1º especie, x = 0 es un punto de discontinuidad de 2º especie. 709 $x = \pm \frac{1}{k}$ y $x = \pm \frac{1}{1/k}$ (k = 1, 2, ...) son puntos de discontinuidad de 18 especie, x=0 es un punto de discontinuidad de 28 especie. 710. $x=\frac{1}{b}$ $(k \pm 1, \pm 2, ...)$ son puntos de discontinuidad infinita x = 0 es un punto de discontinuidad de 2º especie. 711. $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(\kappa = 0, \pm 1, \pm 2)$, son puntos de discontinuidad infinita, x = 0 es un punto de discontinuidad de \mathbb{C}^2 especie 712, $x = \pm \sqrt{n}$ (n = 1, 2, ...) son puntos de discontinuidad de la especie. 713 x = 0, x = 1 y x = 2 son puntos de discontinuidad de 18 especie 714 $x = k \pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$) son puntos de discontinuidad infinita 715 $x = \pm \sqrt{k \pi} (k = 0, 1, 2, ...)$ son puntos de discontinuidad infinita, 716. x =x = 1 y x = 3 son puntos de discontinuidad infinita 717, x = 0 es un punto de discontinuidad de 2^8 especie. 718, x = 0 es un punto de discontinuidad evitable, 719 x = ± 1 es un punto de discontinuidad de 1º especie 720 x = 1 5i $0 \le x < 1$; $y = \frac{1}{6}$, si x = 1, y = 0, si x > 1; x = 1 es un punto de discontinuidad de 1ª especie 721, $y = \operatorname{sgn} x, x$ 0 es un punto de discontinuidad de 18 especie. 722. y = 1, si $x \le 1$, $y = x^2$, si $x \ge 1$. La función es continua. 723 y = 0, si $x \ne k$, y = 1, si $x = k \pi$ (k = 0, ± 1 , ± 2 , ...); $x = k \pi$ son puntos de discontinuidad de 1º especie, 724. y = x, si $(x - k\pi) < \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{2}$, si $x = k \cdot \tau = \frac{\pi}{8}$, y = 0, at $\frac{\pi}{8} < x - k\pi$; $< \frac{5\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, ...)$; $\tau = k\pi \pm \frac{\tau}{6}$ son puntos de discontinuidad de k^2 especie. 725, $y = \frac{\pi}{6} x$, si $k \pi < x < k \pi^+$ $+\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}x$, si $k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi$; y = 0.

 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, ...), x = \frac{k\pi}{2} + son puntos de discontinuidad$ de 1º especie 726. y=x para $x\leq 0$, $y=x^2$ para x>0. La función es continua 727. y = 0 para x 40e y = x para x > 0 La función es continua, 728 y = (1 + x) para x < 0, y = 0 para x = 0 e y = 1 + x para x > 0, x = 0 es unpunto de discontinuidad de la especie 729 No 730 a 1 731, a) La fonción es continua, b) x = -1 es un punto de discontinuidad de 1º especie c) x = -1 es un punto de discontinuidad de 1º especie, d) x = k (k = 0, +1 $\pm 2...$) son puntos de discortinuidad infinita, e) $x \neq k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ son puntos de discontinuidad de 2ª especie. 732. d = - x si - 00 < $< x < 0, d = 0 \text{ si } 0 \le x \le 1, d = x - 1 \text{ si } 1 < x \le \frac{3}{2}; d = 2 - x \text{ si } \frac{3}{2} < x < 1$ <2: d=0 st $2 \le x \le 3$ d=x-3 st $3 < x < +\infty$ Le función es continua 733 $S = 3y - \frac{y^2}{2}$ si $0 \le y \le 1$, $S = \frac{1}{2} + 2y$ si $1 < y \le 2$; $S = \frac{5}{2} + y$ si $2 < y \le 3$; $S = \frac{1}{5}$ si $3 < y < +\infty$, la función es continua, b = 3 - y si $0 \le y \le 1, b = 2$ si $1 \le y \le 2, b = 1$ si $2 \le y \le 3, b = 0$ si $3 \le y \le +\infty$ x = 2 y x = 3 son puntos de discontinuidad de 1º especie, 735. Es discon tinus para $x \neq 0$ y es continua para x 0 737 Es discontinua para todos los valores negativos y para todos los valores positivos racionales del argumento, 738 f(0) = 0.5 740 a) 1.5 b) 2.c) 0.d) e, e) 0.f) 1.g) 0 741 s) S. b) no. 742 a) No, b) no 743 No Ejemplo f(x) = 1 si x es racional y f(x) = -1 s₁ x es gracional 744. a) f(g(x)) es continua, g(f(x)) es disconti nua para x = 0; b) f(g(x)) es discontinua para x = -1, x = 0 y x = 1, g(f(x)) = 0es continua Li f(g(x)) y g(f(x)) son continuas 745 $f(\varphi(x)) \equiv x$ 759 x $\frac{dy + b}{dx + a}, a + d = 0.760 \ x = y - k, \text{ st } 2k \le y \le 2k + 1 \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ **764.** f(x) = x, **767.** $x = -\sqrt{y}$ $(0 \le y < +\infty)$, $x = \sqrt{y}$ $(0 \le y < +\infty)$ 768. $x = 1 - \sqrt{1 - y}$ $(-\infty < y \le 1)$, $x = 1 + \sqrt{1 - y}$ $(-\infty < y \le 1)$. 769. $x = \frac{1 - (1 - y^2)}{x^2}$ (-1 \leq y \leq 1), $x = \frac{(-1)(1 - y^2)}{x}$ (0 < y = 1). 770. $x = (-1)^2 \arcsin g + k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) (-1 \le g \le 1)$ 771. x = 2x + 4 \pm arccos y $(k=0, \pm 1, \pm 2, ...)$ $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$ 772, x= arctg $y \in k$ τ (x + 1) ± 1 , ± 2 , ± 1 , $-\infty < y < +\infty$). 776, $\varepsilon = 0$, so xy < 1, $\varepsilon = sgn(x)$, so $xy > 1.779 \text{ a) } y = -\frac{\pi}{6}, \text{ si } -1 \le x \le 0; y = 2 \arccos \pi_{+} - \frac{\pi}{9}, \text{ si } 0 \le x \le 1.$ b) $y = -(x + 4 \arcsin(x))$, si $-1 \le x \le -\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ y = 0, si $-\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} < x < \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ $y = 3 - 4 \arcsin x$ si $\frac{1}{\sqrt{3}} \le x \le 1$ 780. $y = \frac{3}{3} - x + \frac{3}{3} < x < \frac{3}{2}$ 781 y=1 x^2-1 $\{1 \le x < +\infty\}, y=-1$ x^2-1 $(1 \le x < +\infty), 782$ Pa ta todos los t, tales que $\phi(t) = x$, donde x er un valor arbitrario de la fun don φ(t), la función ψ (t) tiene que tener un mismo valor. 783. El conjunto de valores $\chi(\tau)$ para $\alpha \le \tau \le \beta$ tiene que ser un intervalo (a, b). 784 Para todos los valores x, tales que $\varphi(x) = u$, donde u es un número arbitrario del nater

valo (A, B), is función $\psi(x)$ tiens que tomar un mismo valor. 785. $\delta \ll \frac{\pi}{2}$ cm a) 0.5 mm, b) 0.005 mm; c) 0.00005 mm. 786 a) $\delta < \frac{1}{4}$; b) $\delta < 2.5 \cdot 10^{-4}$. c) $\delta < \frac{5}{2}$ ($\epsilon \ll 1$). 793. a) Sí; b) no. 794. Es uniforme mente continua 795. No es uniformemente continua. 796. Es uniformemente continua 797. No es uniformemente continua. 798 Es uniformemente continua. 799. Es uniformemente continua. 800. No es uniformemente continua. 802. a) $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, b) $\delta = \frac{\epsilon}{8}$; c) $\delta = 0.01\epsilon$, d) $\delta = \epsilon^2$ ($\epsilon \ll 1$), e) $\delta = \frac{\epsilon}{3}$; f) $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon^2}{3-\epsilon}\}$ 803. $\epsilon \gg 1$ £00.000. 308. $\epsilon = 0.01$; $\delta = 0.01$;

Capítulo II

821 \(x = 990, \) \(xy = 3, \) \(822, \) \(\delta x = -0.009, \) \(\delta y = 990000, \) \(823, \) \(x = -1.609, \) \(\delta x = -1.609,

849. $=\frac{(1-x)^{p+1}[(p+q)+(p+q)]x!}{(1+x)^{q+1}}(x\neq -1).$ 850. $=\frac{x^{p+1}(x-x)^{q+1}}{(1+x)^{q+1}}\times$ $\times (p + (q+1)x + (p+q+1)x^2) (x \neq -1)$ 851. $+ \frac{1}{2V}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3V}x^2 (x > 0)$ 862 = $\frac{1}{x^2}$ = $\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ = $\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ (x > 0) 853 = $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ + $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ (x > 0) 854 = $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 855. $\frac{6+3x-6x^3+4x^3-2x^4+3x^3}{\sqrt{2-x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$ (x $\neq \sqrt[3]{x}$ = $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ (x > 0) 854 = $\frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x)^2}}$ (x + x) = $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ (x > 0) 854 = $\frac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x)^2}}$ (x + x) = $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ (x + x) = 887. $\frac{a^3}{3}$ (x < (a'), 858. $\frac{2x^2}{1-x^6}$ $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^6}}$ ($x \ne 1$), 859. $-\frac{1}{3}$ 860. $\frac{1-2\sqrt{x-4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}\sqrt{x}}(x>0). \quad 861. \quad \frac{1}{27}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^4(1+\sqrt[3]{x})^2}} \times$ 863. $x = \sin x$. 864. — $\sin 2x - \cos (\cos 2x)$. 865. $x = \sin x = 1 \times \cos (x + 1) \times 2 \sin x \cdot \cos (x + 1) \times 2 \sin x \cdot \cos (x + 1) \times 3 \sin x \cdot \cos ($ $(x^2 + k\pi, k = 1, 2, ...)$, 868. $-\frac{1 + \cos^2 x}{2 \sin^2 x} (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2...)$ 869 $\frac{n \sin x}{\cos^{n-x}} = x + 3 \frac{2k-1}{3} = x$ Resentero 870 $\frac{x^2}{\cos x + x \sin x^2} = 871 \frac{2}{\sin^2 x}$ $\{x \neq kn, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 872 l $\{g^{0} \mid x \mid x = 2k+1, \frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \dots\}$ 873. $\frac{8}{3 \sin^4 x_1^4 \cos^2 x} (x = k\pi, k \text{ es entero})$ 874 $\frac{15 \cos \frac{2x}{3}}{a \sin^3 \frac{2x}{3}} \times \frac{k \pi a}{2} k \text{ es entero}$, 875. = $3 \lg^2 x \sec^2 x \cdot \sin(2 \lg^3 x) \cdot \cos(\cos^2(\lg^3 x))$ $\left(x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, \ k \text{ es entero}\right)$ 876. $-2xe^{-x^2}$. 877. $-\frac{1}{2\pi}2^{2^{\frac{1}{2}}}\sec^2\frac{1}{x}\ln 2$. 878. x^2e^x . 879. $x^2e^{-x}\sin x$ 880. $\frac{e^{x}(\sin x - \cos x)}{2 \sin^{2} x}$ ($x \neq 2k\pi$, k es entero). 881. $-\frac{1 + \ln^{2} 3}{3^{x}} \sin x$. **882.** $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$ **883.** $e^{x}\left(1+e^{a^{n}}\left(1+e^{a^{n}}\right)\right)$, **884.** $a\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right)(x>0)$. 885. $a^{a} \cdot x^{a^{n}-1} + ax^{a-1}a^{x^{a}}$ in $a + a^{x} \cdot a^{a^{x}} \ln^{n} a$. 886. $\frac{6}{x} \lg a \cdot \lg^{n} x^{k}$ $(x \neq 0)$. 887. $\frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} (x > \epsilon)$. 888. $\frac{6}{x \ln x \ln (\ln^3 x)} (x > \epsilon)$, 889. $\frac{1}{(1+x)^2 (1+x^2)}$ $(x \ge -1)$. 190. $\frac{x}{x^4-1} \le x \le 1$. 891. $\frac{1}{x(1+x^4)^3} x^2 \ne 0$. 892. $\frac{1}{3x^4-2}$ $(|x| > \sqrt{\frac{2}{3}})$. 893 $\frac{2}{(1+x^2)(1-kx^2)}(|x| < 1)$. 894. $\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$

(x > -1). 895. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, 896. In $(x + \sqrt{x^2+1})$. 897. $n^2(x + \sqrt{x^2+1})$ 958. $\sqrt[4]{x^2 + a^3}$, 899 $\frac{1}{a - bx^2} \left(x < \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$ 800. $-\frac{8}{x^4 \sqrt{1 - x^2}} (0 < x < 1)$ 801. $\frac{1}{\sin x}$ (0<x - 2kx<\pi, k es entero) 902 $\frac{1}{\cos x}$ (|x - 2kx|<\frac{\pi}{2} k es entero). **903.** — $\operatorname{cig}^{k} x$ (0 < x — $2k\pi$ < π , k es entero). **904.** — $\frac{1}{\cos x} \left(\pi \neq \frac{2k-1}{7} + k \operatorname{es en} \right)$ tero). 905, $\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$ (0 < x - 2kx < \pi, k es entero). 906, $\frac{V b^2 - a^2}{a + b \cos x}$. 907, $-\frac{\ln^4 x}{x^2}$ (x > 0). 908. $\frac{1}{x^4} \ln x (x > 0)$. 909. $\frac{2x}{1 + \frac{3}{x^4} + \frac{3}{x^4} + \frac{3}{x^4}}$. 910. $\frac{1 + x + \frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}}{\left(1 + x \ln \frac{1}{x}\right) \left[1 + x \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)\right]}$. 911. $2\sin(\ln x)$ (x > 0). 912 $\sin x \ln \lg x$ (0 < x - $2k\pi$ < $\frac{\pi}{2}$ k es entero). 913. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(|x|<2)$ 914 $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}(|x-1|<\sqrt{2})$. 915. $\frac{2\sigma x}{x^2+x^2}$ (a \neq 0). 816. $\frac{1}{x^2+2}(x\neq0)$. 817. $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}(x\geqslant0)$. 918. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ arccosx (j,x) < 1, 919. $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \ (x \ge 0)$. 926. $\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} \ (|x| > 1)$. **921.** $sgn(\cos x)\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k \text{ es entero}\right)$. **922.** $\frac{2 sgn(\sin x) \cos x}{1/1 + \cos^2 x}$ $(x \neq h\pi)$ k es entero). 923. $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} \left(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2} \right)$, k es entero). 924. $\frac{\sin x}{\sqrt{1 - x^4}}$ $(0 < x_1 < 1)$, 925. $\frac{1}{1 + x^2} (x \ne 1)$, 926. I $\left(x \ne \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ es entero} \right)$ 927. $\frac{1}{a + b \cos x}$ 928. $-\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1 + x^2}$ $(x \neq 0)$. 929. $\frac{4x}{\sqrt{1 - x^2} \operatorname{arccos}^2(x^2)}$ $(x \neq 1)$. 930. $\frac{x + x^4}{1 + x^4}$. 931. $-2\cos x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x)$ 932. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\operatorname{arccos}(-1)}(x>1)$ 933. $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ (x > -a), 934. $\sqrt{a^2 - x^3}$ 935 $\frac{1}{x^3 + 1}$ $(x \neq -1)$, 936 $\frac{1}{x^2 + 1}$ $(|x| \neq 1)$. 837 $(\arcsin x)^x (|x| < 1)$. 938. $-\frac{\arccos x}{x^2} (0 < |x| < 1)$. 939. $-\frac{x \ln x}{x} (x > 1)$ 940. $\frac{x \arcsin x}{1}$ (x) < 1), 941. $\frac{x^2}{x^2 + 1} \left(|x| \neq \frac{1}{1/2} \right)$, 842. $\frac{12x^2}{(1 + x^{12})^2}$. 943 $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}(x<1)$, 944. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(x|<1)$, 945. $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$

(0 < x < a). 946, $\frac{x^3}{\sqrt{1 - 2x - x^3}}$ $(x + 1) < \sqrt[3]{2}$, 947, $\frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$ 948. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2} \pi, k \text{ es entero} \right)$. 948. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\times \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ (1x | < 1), 950. $\frac{x^4}{1+x^5}$ arctg x. 951. $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ 952. $\frac{1}{2(1+x^5)}$ 953. $\frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x + \cos a)}{1 + \cos a \cos x}(\cos x \neq \cos a)$. 954 $\frac{1}{(x^4 + 1)\sqrt{x^4 + 2}}(0 < x < 1)$ 955. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^4}$ $x \neq 1$, 956. $\frac{4}{(1+x^2)^7}\sqrt{1-x^2}$ x < 1) 957 $\frac{2x(\cos x^2 + \sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$ $\left(0 < |x| < \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\pi}, \ h = 0, 1, \ldots\right)$, 958. $2x |sgn(\cos x^2) + sgn(\sin x^2)|$ $\left(\left\| x \right\| \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots \right), \qquad 959 \qquad \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{nx \, (arcsinx)} \cos m \, (arcsinx)$ (|x| < 1). 980 $\frac{e^x}{e^{xx} + 1}$ $6\sqrt{1+\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}\sqrt[4]{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2}\sqrt[4]{(1+x^4)^2}$ $x^{2}\cos\frac{1}{x^{2}}\left(\sin\frac{1}{x^{3}}+\cos\frac{1}{x^{2}}\right)\sqrt{\operatorname{clg}\frac{1}{x^{2}}}$ 960.3. $\frac{2^{1+\sqrt[3]{x}} \ln 2 \cdot \sin (2^{\sqrt[3]{x}}) \ln (\sec 2^{\sqrt[3]{x}})}{3^{\sqrt[3]{x^2}} \cos^2 (2^{\sqrt[3]{x}})}, \quad 961. \quad 1+x^x (1+\ln x)+x^x x^{x^2} \times$ $\times \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x\right) (x > 0)$. 862. $x^{a-1}x^{a^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^2} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x\right) +$ $+x^{x}a^{\frac{1}{x}} \ln a (1+\ln x) (x>0)$. 963. $x^{\frac{1}{x}-x} (1-\ln x) (x>0)$. 964. $(\sin x)^{1+\cos x}$ \times (cig* x — in $\sin x$) — ($\cos x$) $^{x+\sin x}$ ($\log^x x - \ln \cos x$) $\left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}\right)$. k es entero). 965 $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{-n(x+1)}}[x-2\ln^2 x+x\ln x-\ln(\ln x)]$ (x>1). 965.1. y'= $= 2y \left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{arctg} x & \operatorname{In} & \operatorname{arcsin} \left(\sin^2 x \right) \\ + x^2 & \operatorname{arccos} \left(\cos^2 x \right) \end{array} \right. + \operatorname{arctg}^2 x \left[\begin{array}{ccc} \sin x & \operatorname{sgn} \left(\cos x \right) \\ \operatorname{arcsin} \left(\sin^2 x \right) V & \operatorname{sin}^2 x \end{array} \right]$ $\frac{\cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)}{\operatorname{arccos}(\cos^2 x)\left[1 + \cos^2 x\right]} \left\{ x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, \quad +1, \quad , \quad 966, \quad -\frac{1}{x} \left(\log_3 \varepsilon \right)^2 \right\}$ $(x > 0, x \ne 1)$. 967, th³ x 968. $\frac{2}{\sinh^3 x} (x > 0)$. 969 $\frac{1}{\cosh 2x} (970, \frac{\text{sgn sh x}}{\text{ch x}}) (x \ne 0)$ 971 $\frac{a+b \cosh x}{b+a \cosh x}$, 972 $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$ 973. $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ arccos x in (arccos x) $(|x| < 1), \quad 974, \quad -\frac{x^{-1}}{1 \cdot (1+x^{4})^{3}}, \quad 975, \quad -\frac{2xe^{-x^{2}}\arcsin\left(e^{-x^{2}}\right)}{(1-e^{-2x^{2}})^{3}/(1-e^{-2x^{2}})^{3}} \qquad (x \neq 0)$

976. $\frac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2} \operatorname{arcctg} a^{-x} (a > 0)$, 977. a) $\operatorname{sgn} x (x \neq 0)$; b) $2 | x |_{x} | c$) $\frac{1}{x} (x \neq 0)$. 978. a) $(x-1)(x+1)^2(5x-1) \operatorname{sgn}(x+1)$; b) $\frac{3}{2} \sin 2x \cdot \sin x$, c) $\frac{1}{x \cdot 1 \cdot x^2 - 1}$ $(1 \times > 1)$; d) $\pi[x] \sin 2\pi x$. 979. y' = -1 si $-\infty < x < 1$, y' = 2x - 3 $\operatorname{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2; \quad y' = 1 \quad \operatorname{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant + \operatorname{co} \,, \quad \operatorname{9BO} \quad y' = 2 \, (x - a) \, (x - b) \, \chi$ $\times (2x-a-b)$ so $x \in [a, b], y'=0$ so $x \in [a, b]$ 981, y'=1 so x < 0; $y' = \frac{1}{1+x}$ si $0 \le x < +\infty$, 982, $y' = \frac{1}{1+x^2}$ si, $-1 < x \le 1$, $y' = \frac{1}{3}$ si x > 1 983. $y' = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$ si $x \le 1$; y' = 0 si x > 1, 984. a) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; b) $\frac{54-36x+4x^2+2x^0}{3x(1-x)(9-x^2)}$ ($x \ne 0$, $x \ne 1$ $x \ne \pm 3$); c) $\sum_{x=a_1} \frac{a_x}{x-a_1}$ d) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$, 985. a) $\frac{q_x(x)q_x'(x)+q_x'(x)}{\sqrt{q_x^2(x)+q_x^2(x)}}$ $\begin{array}{ll} (q^{\frac{1}{2}}(x)-\psi^{2}(x)\neq 0), & b) & \frac{q^{\frac{1}{2}}(x)\psi^{\frac{1}{2}}(x)}{q^{\frac{1}{2}}(x)+\psi^{\frac{1}{2}}(x)} & (q^{\frac{1}{2}}(x)+\psi^{\frac{1}{2}}(x)\neq 0); \\ c) & \frac{q^{\frac{1}{2}}(x)\psi^{\frac{1}{2}}(x)}{q^{\frac{1}{2}}(x)}+\frac{q^{\frac{1}{2}}(x)\psi^{\frac{1}{2}}(x)}{q^{\frac{1}{2}}(x)} & (q^{\frac{1}{2}}(x)+\psi^{\frac{1}{2}}(x)\neq 0); \\ & \frac{q^{\frac{1}{2}}(x)\psi^{\frac{1}{2}}(x)}{q^{\frac{1}{2}}(x)}+\frac{q^{\frac{1}{2}}(x)\psi^{\frac{1}{2}}(x)}{q^{\frac{1}{2}}(x)} & (q^{\frac{1}{2}}(x)+\psi^{\frac{1}{2}}(x)+q^{\frac{1}{2}}(x) & (q^{\frac{1}{2}}(x)+\psi^{\frac{1}{2}}(x)+q^{\frac{1}{2}}(x) & (q^{\frac{1}{2}}(x)+q^{\frac{1}{2}}(x)+q^{\frac{1}{2}}(x) & (q^{\frac{1$ $= \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} + \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \phi(x)}, \quad 986, \quad a) = 2xf'(x^2), \quad b) = \sin 2x |f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)|,$ c) $e^{\int x} [e^{x}f'(e^{x}) + f'(x)f'(e^{x})]$. d) $f'(x) \cdot f'(f(x) - f'(f(x))]$ 986.1, (00) 988 $3x^2 - 15$. 989. $6x^2 - 992$. a) n > 0; b) n > 1, c) n > 2 - 993. a) $n \ge m+1$, b) 1 < n < m-1 - 994. q(a) - 995. $(1(a) \Rightarrow -q(a), 1, (a) \Rightarrow q(a)$. 999. a) No es derivable en x = 1; b) no es derivable en $x = \frac{x}{2} + x$. & es entero, e) es derivable en todos los puntos, d) no es derivable en $x = k\pi$, k es entero, e) no es denveble en x = -1 1000. $f'_{-1}(x) =$ $= f'_+(x) = \operatorname{sgn} x \operatorname{st} x \neq 0 \operatorname{y} f'_+(0) - f_+(0) = 1001 f_-(x) - f'_+(x) = 0$ = $\pi[x]$ cos πx si $x \neq \text{un número entero}, f'_{-}(k) = \pi(k-1)(-1)^{R}, f'_{+}(k) =$ $=\pi k(-1)^k$ si k es entero. 1002, $f'_{-}(x) = f'_{+}(x) = \left(\cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)$. $sgn\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k es entero); $f'\left(\frac{2}{2k+1}\right) =$ $= -(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad f'_{+}\left(\frac{2}{2k+1}\right) = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{ 1003, } f'_{-}(x) = f'_{+}(x) = \frac{x \cos x^{2}}{V \sin x^{2}}$ 5i ,) $\overline{2k\pi} < |\pi| < 1' \overline{(2k+1)\pi}$ $(k=0,1,2,...); f'_+(0) = -1, f'_+(0) = 1$ $f'_{\pm}(\sqrt[k]{(2k+1)\pi}) = \pm \infty \quad f'_{\pm}(\sqrt[k]{2k\pi}) = \pm \infty \quad (k=1, 2, ...), \quad 1004. \quad f'_{\pm}(\pi) = 1$ $= f'_{+}(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x/x}}{(1 + e^{x/x})^{2}} \quad \text{so } x \neq 0, \ f'_{-}(0) = 1, \ f'_{+}(0) = 0, \ 1005, \ f'_{-}(x) = 0$ $=f'_{+}(x)=\frac{xe^{-x^{n}}}{\sqrt{1-e^{-x^{n}}}}\quad \text{so} \quad x\neq 0; \ f'_{-}(0)=-1, \ f'_{+}(0)=1 \quad 1006. \quad f'_{-}(x)=-1$ $=\int_{+}^{x} (x) = \frac{x}{x}$, dende x = -1 si 0 < |x| < 1 y x = 1 si $1 < |x| < +\infty$, $f_{-}(\mp 1) = -1$, $f_{-}(\mp 1) = 1$. 1007. $f'_{-}(x) = f'_{+}(x) = \frac{2 \operatorname{sgn}(1 - x^{3})}{1 + x^{3}}$ 31 $l_{\pm} \neq 1$, $l_{\pm}(\neq 1) = \mp 1$, $l_{\pm}(\neq 1) = \pm 1$ 1008. $l_{\pm}(z - l_{\pm}(z) = \pm 1)$ $l_{\pm}(z) = \frac{1}{2}$ $l_{\pm}(z) = \frac{1}{2}$ 1009. $l_{\pm}(z) = \frac{1}{2}$ 1009. $l_{\pm}(z) = \frac{1}{2}$ $=-\frac{1}{2} \quad I_{+}(0)=\frac{1}{2} \quad \text{b)} \ I \quad \text{i)} \quad I^{+}(\cdot,-\frac{1}{2}\cdot c) \ I^{'}(0)=I^{'}_{+}(0)=0, \ \text{1010}, \ a=2c_{b}$ $b = -x_{0}^{2}$ $= -x_{0}^{2}$ $= \frac{a_{0} + k_{0}}{(b - a)^{2}}$ $c = \frac{a_{0} + b_{0}}{k_{1} + k_{2}}$ $1011 a = f_{0}(x_{0}) . b = f(x_{0}) - x_{0}f'(x_{0}) . 1012. A = \frac{a_{0} + b_{0}}{2c} . b = -\frac{m^{2}}{2c^{2}}$ 1014. a) S1.b) no. 1015 a) No b) no 1016 a), b), c) La función F(x) puede tene derivada F'(x) y puede no teneria 1017 $x = k\pi / k = 0, \pm 0, \pm 0$ 1018 a) No puede, b) puede 1919 1) No necesariamente, 2) necesariamente. 1020 No necesariamente 1021 No se deduce 1022. No se deduce 1023. En general, no se puede 1024. $P_n = \frac{1 - (n+1)x^4 + nx^{n+3}}{(1-x)^3}$; $Q_n = \frac{1 + x - (n+1)^3 x^n + (2n^2 + 2n - 1) x^{n+1} + n^2 x^{n+1}}{(1-x)^3}$ 1025. $S_n = \frac{\sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{n + 1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$ $I_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n + 1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$ 1025.1 $S_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin n + \frac{1}{2} x + \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$ 1026 $S_n = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2^n} + \cos x$ 1029. 40π cm²/seg. 1030. 25 m²/seg, 0,4 m/seg. 1031. 50 km/h 1032. $S(x) = \frac{x^2}{3}$, si $0 \le x \le 2$; $S(x) = x^2 - 2x + 2$, si x > 2: $S'(x) = x, \quad \text{si} \quad 0 \le x \le 2; \quad S'(x) = 2x - 2, \quad \text{si} \quad x > 2, \quad 1033. \quad S'(x) = \frac{x}{2} + a^2 - x^2 + \frac{a^2}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}, \quad S'(x) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{x^2}{2} 1034. $y_x = \frac{1}{3(y^2 + 1)}$ 1035 $y_x = \frac{1}{1 + \cos y}$ 1036. a $-\infty < y < +\infty$ $x_y = \frac{x}{x-1}$, b) $\infty < y < +\infty$, $x_y = \frac{1}{1-x+y}$. c) $-\infty < y < +\infty$, $x_y = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}};$ d) -1 < y < 1 $x_y^* = \frac{1}{1 - y^2}$ 1037 a) $x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - y}}$ $\begin{array}{lll} (& \infty < y \leqslant 1); & x_2 = -\frac{1}{1 - \sqrt{1 - y}} & (0 \leqslant y \leqslant 1); & x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{1 - y}} \\ (0 \leqslant y \leqslant 1), & x_4 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - y}} & (-\infty < y \leqslant 1); & x_i' = \frac{1}{4x(1 - x^2)} & (i = 1, 2, 3, 4). \end{array}$ b) $x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}} \ (0 \le y < 1); \qquad x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \ (0 \le y < 1); \qquad x_1' = \frac{x^2}{2y^2}$ (i = 1, 2); c) $x_1 = -\ln(1+\sqrt{1-y}) (-\infty < y < 1);$ $x_1 = \ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}$ $(0 < y \in);$ $z_i = -\frac{3}{2(g^{-x} - g^{-2x})} \{i = 1, 2, \dots, 1038, g_x = -\frac{3}{2}(1 + f); \dots, 3\}$ $=\frac{3}{2}$ y $=\frac{9}{2}$; (-4, 4), 1039. $\int_{-1}^{6} \frac{(1-t/t)^4}{t(1-t/t)^3} (t>0, t\neq 1)$, 1040. $y_x^2=-1$ (0 < x < 1). 1041. $y'_x = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t (0 < t) < x$. 1042. $y'_x = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t (t > 0)$ 1043. $y_x = -ig t \ t \neq \frac{2k+1}{2} \pi$, k es entero 1044. $y_x = ctg \frac{t}{2} (t \neq 2k\pi, k\pi)$ entero). 1045. $y_x' = \lg t \cdot \lg \left(t + \frac{\pi}{4}\right) \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ 1046 $y_x = \lg \pi$ $(0 < z < \pm \infty)$. 1048. $y = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}$ 1049, $\frac{p}{y}$, 1050, $\frac{b^2 x}{a^2 y}$ 1051. -1 9 1052. $-\frac{1}{3}$ 1053 $\frac{x+y}{x-y}$ 1054. a) $\lg (\phi + \arg \phi)$ b) $= g^{3q} + q \neq 0$, $q \neq +\frac{2\pi}{3}$, c) $+ tg + arctg = \frac{1}{m}$. 1055. a) $y = \frac{1}{m}$ $=\frac{1}{1}+x$ () $y=\frac{1}{2}\frac{2}{3}(x+y)$ b) y=3, x=2: c) x=3, y=01086. a) $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$; b) (0, 2). 1088. $|x| < \frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3} < x \le \pi$ 1059 $\max y_1^* - y' = 10\pi \approx 31.4$. 1060. $\frac{\pi}{4}$. 1061. $\frac{\pi}{2}$; arclg $\frac{3}{4} \approx \arctan 37$ 1062 arctg 2] $\sqrt{2} = arc 70^{\circ}30^{\circ}$. 1063. n > 57,3. 1064. a) 2 arctg $\frac{1}{10}$; b) $\frac{\pi}{2}$ 1066 $\frac{x}{n}$ 1069. $\frac{y\bar{x}}{a}$. 1071. $b^1 - 4ac = 0$. 1072 $\frac{p}{3}$ $\frac{9}{3} - \frac{q}{2}$ $\frac{1}{2} = 0$. 1073 $a = \frac{1}{2x}$ 1077, a) 3x - 2y = 0, 2x + 3y = 0; b) 3x - y - 1 = 0. x - 3, t = 0 1078, a) y = x, y = -x, b) 3x - y - 4 = 0, x + 3y - 3 = 9. c) y = -x y = x 1079. $y = 2\alpha + (x - \alpha t_0) \operatorname{olg} \frac{t_0}{2}$ La tangente a la ciclor de es perpendicular al segmento que une el punto de contacto con el punto de adherencia del circulo que rueda 5x - 3y - 10.8 = 0. 1082. x + 2y - 3 = 0.3x + 5y - 50 = 02x - a = 1 = 0. 1083. $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $df(1) = \Delta x$. a) 5 1 $b \in (31 - 0.1 - c) = 0.010301$, 0.01. 1084. $\Delta x = 20 \Delta t + 5 (\Delta t)^2$, $dx = 20 \Delta t$ a) 25 m, 20 m, b) 2,05 m, 2 m, c) 0,020005 m, 0,02 m, 1085 - 45 T = (1) 1086 $\frac{dx}{x^2 + x^2}$ 1087. $\frac{dx}{x^2 - a^2}$ (|x, \neq [a1], 1088. $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ 1089. $\frac{\text{sgn} \, d}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx$ (x < 10) 1080. a) $(1+x)e^{x} dx$; b) $x \sin x dx$; c) $-\frac{3dx}{\sqrt{x}} (x \neq 0)$. d) $\frac{-\ln x}{2\sqrt{1+x^2}} dx (x > 0)$; e) $\frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$; f) $\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} (1x) < 1$; g) $-\frac{2x dx}{(-x^2)}$ (1x)<1); h) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (|x|>1); i) $\frac{dx}{\cos^2 x}$ (x $\neq \frac{n}{2} + k\pi$, k es entero).

1091. Use $dx + uuv dv + uv du = 1092 = \frac{u du + 2u dv}{v^2}$ ($v \neq 0$). 1093. $-\frac{u du + v dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}$ $(u^2 + v^2 > 0)$ 1094 $\frac{v \, dv + u \, dv}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2 > v)$ 1095. $\frac{u \, du + v \, dv}{u^2 + v^2} (u^2 + v^2 > 0)$ 1096. a) $1 - 4x^3 - 3x^4$, b) $\frac{1}{2x^3} \left(\cos x - \frac{\sin x}{x} \right)$; c) $- \cos x \ (x \ne k\pi, k \text{ es entero})$; d) $-1g^2 x \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ es entero}\right)$; e) -1 (|x| < 1), 1097, a) Aumentará 104,7 cm2, b) disminudă 43.6 cm2 1098 Hay que alargarlo 2.23 cm 1099 1,007 por las tabias 1,0066) 1100 0,4849 (por las tables 0,4848) 1101 0,8747 (por las tablas -0,8746) 1102 0,8104 arc 46°26 (por las tablas, arc 46°24"), 1103 1,043 (por las tablas 1,041) 1104 a) 2,25 (por las tabias 2 24), b) 5,833 (por las tabias 5,831) c) 10 9546 (por las ablas, 10,9545), 1105 a) 2 083 (por las tablas 2,080), b, 2 9907 (por las tablas 2,9907), c) 1,938 (por las tablas: 1,931), d) 1,9954 (por las tablas 1,9953), 1106, 0,24 m², 4,2%, 1107, $\delta_R \le 0.33\%$ 1108. a) $\delta_g = \delta_{ij}$ b) $\delta_g = 2\delta_{ij}$ 1109. 0.43 δ 1111. $\frac{x(3+9x^2)}{(5+x^2)^{-3}}$ 1112. $\frac{3x}{1-x^2}$ () $x_1 < 1$). 1113. $2e^{-x^2}(2x^2 + 1)$. 1114. $\frac{2\sin x}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{2k-1}{2}, x, k = 0, \pm 1, \dots\right)$ 1115. $\frac{2x}{1+x^2} + 2 \arctan x$. 1116 $\frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^3) \arcsin x}{(1-x^3)^3}$ (1.x < 1) 3337. $\frac{1}{x}(x > 0)$. 1118. $\frac{f(x)f'(x) + f'^2(x)}{f^2(x)}$ (f(x) > 0). 1118. $-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$ $\begin{array}{lll} (x>0), & 1120, & y(0)=1, & y'(0)=1, & y'(0)=0, & 1121, & 2(uu^2+u^2), \\ 1122, & \frac{uu^2+u^{22}}{u^2}-\frac{vv^2-\frac{v^2}{2}}{v^2}(uv>0), & 1123, & \frac{(u^2+v^2)(uu^2+vv^2)+(u^2v-uv^2)^2}{u^2}. \end{array}$ $(u^2 + v^2 > 0), \ 1124 \ \mu^2 = u^2 \left[\left(v \frac{u}{\mu} + v^2 \ln u \right)^2 + v \frac{\mu u^2 + \mu^2}{\mu^2} + \frac{\mu u^2 \xi^2}{\mu} + v^2 \ln u \right]$ 1125. $y^* = 4x^2l^2, x^2 + 2, x^2l, \quad y^{*\prime} = 8x^2l^{*\prime}, x^2l + 12xl^2(x^2), \quad 1126, \quad y^* = 1126$ $=\frac{1}{x^5}I''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^5}I''\left(\frac{1}{x}\right); \qquad g''=-\frac{1}{x^5}I'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}I''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}I'\left(\frac{1}{x}\right)$ 1127. $q' = e^{2x} f'(x^x) + e^{x} f'(x^x)$; **1128.** $y^{x} = \frac{1}{2} \{ e^{x} (\ln x) + f^{x} (\ln x) \}, \qquad y^{xy} = \frac{1}{2^{3}} \{ f^{xy} (\ln x) + 3f^{x} (\ln x) + 2f^{y} (\ln x) \}.$ 1129. $y'' := q^{(2)}(x) \int_{x} (q(x)) + q^{(2)}(x) \int_{x} (q(x)) \int_{x} (q(x)) + q^{(2)}(x) \int_{x} (q(x)) \int_{x}$ 1131. $\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ 1132 $\frac{2\ln x - 3}{x^2} dx^2 (x > 0)$. 1133. $x^x \left[(1 - \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^3$. 1134. $u d^{4}v + 2du dv + v d^{4}v$ 1135. $v \frac{d^{2}u + u d^{2}v + u + u dv}{d^{2}v + u dv}$ (v > 0)1136. $a^{m-1}v^{q-2} \mid \text{fin } (m-1) \ v^2 du^2 + 2 m a v \ du \ dv + \tau \ cv = 1) \ a^2 \ v^2)$ $+ uv \ (mv \ d^2u + nu \ d^2v) \mid , \qquad 1137. \qquad a^u \ \ln a \ (du^2 \ \ln a + d^2u) \cdot$ $1138. \qquad |(c^2 - u^2) \ du^2 + 4 uv \ du \ dv + (u^4 - v^4) \ dv^2 + (u^2 + v^4) \ (u \ d^2u + v \ dv^2) \mid$ $\times (u^2 + v^2)^{-2} \ (u^2 + v^2) \cdot (u^2 + v^2) \cdot$ $1138. \quad | -2uv \ du^2 + 2 \ (u^2 - v^2) \ du \ dv + 2uv \ dv^2 +$ $+ (u^2 + v^2)^{-2} \ (v \ d^2u - u \ d^2v) \ (u^2 + v^2)^{-2} \ (u^2 + v^2) \cdot$

1140
$$g' = \frac{3}{4^2}, \frac{3}{2^{-1}}, d' = \frac{3}{8^{-1}}, (t \neq t)$$

1141 $g' = \frac{1}{a s^{-1}}, g'' = \frac{3}{2^{-1}} \frac{s}{s n^3 t}, (t \neq k\pi, k \text{ es entero})$

1142.
$$a^{2} = \frac{1}{4a + 1} \int_{0}^{1} d^{2} = \frac{1}{4a^{2} + 1} \int_{0}^{1} (1 + 2b + 1) k \cos entero)$$

1143
$$q = \frac{e^{-t}}{1 + t} = \frac{e^{-t}}{1 + t} = \frac{e^{-t}}{1 + t} = \frac{e^{-t}}{1 + t} = \frac{1}{4}$$

1146.
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{g}$$
 $\frac{2}{g}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ 1147 $\frac{6}{g} = \frac{6}{g}$ $\frac{3}{6}$

$$\frac{1148}{2} = \frac{1}{12} \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} \left(\frac{3}{$$

1153.
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1}{124} = \frac{1}{7} = \frac{1}{124} $

$$\frac{g}{1157} = \frac{ax_1 \cdot a + 1 \cdot a + 2}{x^{m+4}} (x \neq 1). \quad 1158, a^{m+4} = \frac{17}{2^{m} x^{3} 1 \cdot x} (x > 1).$$

donde n !! denota el producto de los números naturales que no son superiores a n v tienen la misma panidad que este o sea, $170^\circ = 1 \cdot 3 \cdot 5$, 17

1159.
$$y^5 = \frac{8}{(1-x)^8} \ (x \neq 1)$$

1160.
$$y^{-100} = \frac{197!! (399 - x)}{2!^{100} (1 - x)^{100} \sqrt{1 - x}} (x < 1)$$
. 1161. $y^{\pm 00} = 2^{\pm 0} e^{\pm x} = 1$

$$\times (x^2 + 20x + 95). \ \ 1162, \ y^{10} = e^x \sum_{\frac{1}{2} = 0} (-1)^{\frac{1}{2}} \frac{4^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2} - 1}}, \text{ donde } A^4_{10} = (0.9) \quad (1 - 1)$$

$$y = A_{10}^{*} = 1, \quad 1163. \quad y^{(k)} = -\frac{6}{x^{2}}(x > 0), \quad 1164. \quad y^{(k)} = \frac{274}{x^{6}} - \frac{.20}{x^{6}} \ln x, (x > 0)$$

$$y = A_{10}^{*} = 1$$
. $1102x = y = x^{2}$
 1165 . $y^{*h0} = 2^{*0} \left(-x^{2} \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x \right)$. 1166 . $y = x^{2}$

 $27 \frac{(1-3x)^2-36}{7} \sin 3x - \frac{27(1-3x)^2-28}{10} \cos 3x \quad \left(x \neq \frac{1}{3}\right) \quad 1167. \quad y^{(10)} = \frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac$ $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$ $(1-3x)^{\frac{1$ 1169. $y^{tV} = -4e^x \cos x$. 1170. $y^{(6)} = -\frac{60}{x^6} + \sqrt{\frac{144}{x^6}} - \frac{160}{x^6} + \frac{96}{x} \sin 2x + \frac{169}{x^6} = -\frac{160}{x^6} + \frac{96}{x^6} \sin 2x + \frac{169}{x^6} = -\frac{160}{x^6} + \frac{160}{x^6} = -\frac{160}{x^6} + \frac{160}{x^6} = -\frac{160}{x^6} + \frac{160}{x^6} = -\frac{160}{x^6} + \frac{160}{x^6} = -\frac{160}{x^6} = -\frac{160}$ $\pm \frac{60}{x^3} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \cos 2x. \qquad 1171. \quad 120 \ dx^3. \qquad 1172. \quad -\frac{15}{8x^3 \sqrt{x}} \ dx^3$ (x > 0). 1173. $-1024 (x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10}$. 1174. $e^{x} \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^{2}} + \frac{6}{x^{2}} + \frac{1}{x^{2}} \right)$ $\pm \frac{8}{8} - \frac{6}{x^4}$ dx⁴. 1175. $8 \sin x \sin x \sin x dx^4$. 1176. $2u d^{20}u \pm 20 du d^{6}u + 90 d^{2}u d^{6}u + 40 du d^{6}u$ 1177. eu (dut + 6dut deu + 4du deu + $240d^3u \ d^3u + 420d^3u \ d^3u + 252 \ (d^3u)^4$ $-3d^2u^3+d^4u). \quad 1178. \quad \frac{2du^2}{u^3}-\frac{3du\,d^2u}{u^2}-\frac{d^3u}{u} \qquad 1178 \quad d^2y=y'\,dx^2+y'\,d^2x$ $d^3y = y''' dx^3 + 3y'' dx d^2x + y' d^3x; \qquad d^3y = y''' dx^3 + 5y''' dx^3 d^3x + 4y'' dx d^3x + dx dy$ $+ 3y'' d^2x^3 + y' d^3x. 1180. y'' = \frac{dx}{d^2x} \frac{d^3y}{d^2x}, \quad y''' = \frac{dx}{d^2x} \frac{d^3y}{d^2x} \frac{d^3y}{d^2x} \frac{d^3y}{d^2x} \frac{d^3y}{d^2x}.$ 1187. $P^{(n)}(x) = a_0 a!$ 1188 $\frac{(x-1)^{n-1} a^n c^{n-1} (ad-bc)}{(ad-bc)}$ 1189 $a! \left[\frac{(x-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n-1}} \right]$ 1190. $(-1)^n a! \left[\frac{1}{(x-2)^{n-1}} + \frac{1}{(x-1)^{n-1}} \right]$ 1191. $\frac{1 \cdot 3}{(1-2x)^{n+1}/2}$ $l_x < \frac{1}{2}$. 1192. $\frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \frac{1}{(1+x)^{n-\frac{1}{2}}} \frac{4}{3} \cdot \frac{(3n-5)}{(3n+2x)}$ $(n \ge 2, x \ne -1)$. 1193 - 110 18 $2x + \frac{nx}{2}$ 1194. $2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{nx}{2}\right)$ 1195 $\frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{nx}{2}$ - $-\frac{3^{4}}{4}$ and $\frac{3}{5}$ $\frac{4\pi}{2}$ 1198. $\frac{3}{4}$ cos $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3^{4}}{7}$ $\frac{3^{4}}{7}$ cos $\frac{3\pi}{2}$ 1.97 $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{nx}{2}\right] - \frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{nx}{2}\right]$ 1198. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x\frac{n\pi}{2}\right].$ 1199. $\frac{(a-b)^n}{2} \sin \left[a-b \right] x + \frac{n\pi}{2} + \frac{(a+b)^n}{2} \sin \left[(a+b) x + \frac{n\pi}{2} \right]$ 1200. $\frac{b^n}{2}\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{(2a-b)^n}{4}\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right] - \frac{(2a-b)^n}{4} \times$ $\times \cos \left[(2a + b)x + \frac{n\pi}{2} \right] = 1201, \ 4^{n-1} \cos \left(4x + \frac{n\pi}{2} \right), \ 1202, \ a^n x \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right) +$ $+ na^{n+1} \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$. 1203. $a^n \left[x^n - \frac{n(n-1)}{a^n}\right] \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) - 2na^{n-1}xX$ $\times \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right)$. 1204. $(-1)^n e^{-x} \left\{x^2 + 2\left(n-1\right)x + \left(n-1\right)\left(n+2\right)\right\}$ 1205. $e^{k} \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k} \frac{(n-1)}{x^{k+1}} \frac{(n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}$

1206. $a^{x}2^{n/p}\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$ 1207. $a^{x}2^{n/p}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$ **1208.** $\frac{(a-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}[(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n]$ 1209. $e^{ax} \left[a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P(x) + \dots + P^{(n)}(x) \right]$ 1210. $\frac{1}{2} \left\{ \left[(x+n) - \frac{1}{2} (x+n) + \frac{1}{2} (x+n$ $-(-1)^n(x-n)$] ch $x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]$ sh x{. 1211. $d^n y = e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^k (n-1)^2}{2!} x^{n-1} + \dots + n! \right] dx^n$ 1212. $\frac{(-1)^n n_i}{x^{n+1}} \left\{ \ln x - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right\} dx^n (x>0)$. 1214. a) $(a^x + b^x)^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(n\phi - \frac{n\pi}{2} \right) \times \right]$ \times ch ax cos $\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(n\phi - \frac{n\pi}{2}\right)$ sh ax $\sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)$; b) $(a^2 + b^2)^{\frac{n\pi}{2}} \times$ $\times \left[\cos\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{ch} \operatorname{ax} \sin\left(bx + \frac{\pi n}{2}\right) + \sin\left(n\varphi - \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sh} \operatorname{ax} \cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)\right],$ donde $\cos \varphi = \sqrt{\frac{a}{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 1215, f^{(a)}(x) = \sum_{p=1}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} \times \frac{b}{a^2 + b^2}$ $\times (p-k)^n \, C^k_{ip} \cos \left[(2p-2k) \, x + \frac{n\pi}{2} \right] \quad \text{1216. a} \ \sum_{p} (-1)^{p+k} \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{3p}} C^k_{ip+1} \times \\$ $\times \sin\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]$ b) $\sum_{i=1}^{p-1}2^{n-1p+1}(p-k_i^nC_{2p}^k\cot\left[(2p-2k_i)x+\frac{n\pi}{2}\right])$ $+\frac{n\pi}{2}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2p-2k+1)^n}{2^{kp}} C_{kp+1}^k, \cos \left[(2p-2k+1)x + \frac{n\pi}{2} \right] \right\}$ 1218. $\frac{(-1)^n}{n} \frac{(n+1)!}{n} \sin(n \operatorname{acctg} x), x \neq 0$ 1219. $a \frac{n!}{3} [2^{n+1} + (-1)^n]$ b) $\frac{n(2n-3)^n}{2n-1}$, n > 1). 1220. 8) $n(n-1)e^{n-2}$ b) $f^{2k}(0) = 0$, $f^{2k+1}(0) = 0$ $= (-1)^k (2k!)$ $\{k = 0, -1, -2, -1\}$ c) $f^{\otimes k} \{0\} = 0$, $= [1 \ 3, \ (2k+1)]^2 \ (k=0, 1 \ 2, \ldots), \ 1221, \ a) \ f^{-2k}(0) = (-1)^k m^2 (m^2 + 2^2)$ $\{m^2 - (2k-2)^2\}, \quad f^{(2k-1)}(0) = 0; \quad \text{b)} \quad f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = m, \quad f^{(2k-1)}(0) = 0$ $= (-1)^k m (m^2 + 1^k) \dots (m^4 + (2k - 1)^4) \quad (k = 1, 2, ...) \quad 1222. \quad a) \quad i^{2k} \in \mathbb{N} = (-1)^k m (m^2 + 1^k) \dots (m^4 + 1^k) \quad (k = 1, 2, ...) \quad (k = 1, 2, ...)$ $=(-1)^{k-1} \cdot 2(2k-1)^{k-1} + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-1} \cdot (2k-1)^{k-1} = 0 \quad (k=1,2,...)$ b) $f^{(2k+1)}(0) = 2^{2k+1} [(k-1)^{k}]^2$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ (k=1, 2, ...). 1223. $n! \neq (a)$. $z_m(x) = (-1)^m \left[x^m - m^2 x^{m-1} + \frac{m^2 (m-1)^2}{1+2} x^{m-2} + \cdots + (-1)^m m_n \right]$ 1281. $H_m(x) = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{12}(2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2!}(m-3)(2x)^{m-4} = ...$ 1236. Para x=0 no existe derivada finita f'(x) 1244. A(-1,-1), C(1,1). 1245. No ex válida. 1246. a) $\theta = \frac{1}{2}$;

b) $\theta = \frac{\sqrt{x^2 + x \Delta x + \frac{1}{3} (\Delta x)^2 - x}}{\Delta x} (x \ge 0, \ \Delta x > 0); \ c) \ \theta = \frac{x}{\Delta x} / \sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}}$ $(x(x+\Delta x) > 0)$ d, $\theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ 1248. $\epsilon = \frac{1}{2}$ è $\sqrt{2}$ 1250 En general, no 1261. $f(x) = \varepsilon_0 + \epsilon_1 x + \cdots + \epsilon_{n-1} x^{n-1}$, donde ϵ_i (r=0,1, n-1) son constantes 1268. Para $-\infty < x < \frac{1}{r}$ la función es cremente; para $\frac{1}{2} < x < \pm \infty$ es decreciente 1269 Para $-\frac{4}{100} < x < -1$ la función es decreciente, para -1 < x < 1 es creciente para $1 < x < + \infty$ es decreciente 1270. Para $-\infty < x < -1$ la función es decreciente, para -1 <x < 1 la función es creciente, para 1 < x < + ∞ es decreciento, 1271 Para 0 < x < 100 la función es creciente, para $100 < x < +\infty$ es decreciente 1272. La función es creciente. 1273. En los intervalos $\frac{k^{-1}}{2}$, $\frac{k^{-1}}{2}$, a función es creciente; en los intervalos $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ es decrecen en $(k=0,\pm 3,\pm 2,...)$, 1274 En los intervalos $(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k})$ y $(-\frac{1}{2k+1},$ $-\frac{1}{2k+2}$ is function as crediente; on los intervalos $(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1})$ $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ es decreciente (k=0, 1, 2, ...). 1275. Para $-\infty < x < 0$ ia función es decreciente, para $0 < x < \frac{2}{\ln 9}$ es creciente, para $\frac{2}{\ln 9} < x < +\infty$ es decreciente, 1276. Para 0 < x < n la función es creciente para n < x < 00 es decreciente 1277. Es decreciente para $-\infty < x < -1$ y 0 < x < 1, es creciente pars -1 < x < 0 y $1 < x < +\infty$, 1278. La función es creciente en los intervalos $\left(\frac{-7\pi}{12} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + 2k\pi$, es decreciente en los intervalos $\begin{cases} \frac{18n}{12} + 2k\pi & \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ & \frac{1}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \quad 1283 \text{ No. } 1298 \text{ En el pusto } A$ la concavidad de la curva es hacia arriba, en el punto B la concavidad es hacia abajo, C es un punto de inflexión 1299. La gráfica para - es < x < 1 tiene la concavidad hacia arriba, para 1 < x < + ∞ la concavidad es hacia abajo, x = 1 es un punto de inflexión, 1300 Para $|x| < \frac{a}{\sqrt{x^2}}$ la concavidad os hacia abajo, para $|x| > \frac{n}{|V|}$ la concavidad es hacia arriba; $x = \frac{n}{2} \frac{n}{|V|^2}$ es un punto de inflexión. 1301. Para x < 0 la concavidad es hacia abaio. para x>0 la concavidad es hacia arriba; x=0 es un punto de inflexión. 1302, La concavidad es hacia arriba 1303, Para $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ is la concavidad es hacia abajo, para $(2k+1)\pi \le x \le (2k+2)\pi$ la concavidad es hacia arriba, $x = k\pi$ son puntos de inflexión $\{k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 1304. Para $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ la concavidad es hacia abajo, para $|x| > \sqrt{\frac{1}{2}}$ la concavidad es hacia arriba, $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ son puntos de inflexión 1305 Para $|x| \le 1$ la concavidad es hacia arriba, para |x| > 1 la concavidad es hacia sba,o, $x=\pm 1$ son puntos de inflexión, 1306 Para $e^{-ikx} = \frac{zkx + \frac{x}{4}}{4} < x < e^{-ikx + \frac{x}{4}}$ la la concavidad es hacia arnos, para $e^{-2kx + \frac{x}{2}} < x < e^{-\frac{kx+\frac{x}{2}}{2}}$ la concavidad es hacia abajo, $x=e^{\frac{kx}{4}}$ son puntos de inflexión (k=0) ± 1 -2.), 1307. La concavidad es hacia arriba para $0 < x < +\infty$ 1309 $b = \frac{1}{a + 1}$. 1310. La concavidad es hacia abajo (para a > 0) 1318. $\frac{a}{k}$. 1319. 1. 1320. 2. 1321. - 2 1322. $\frac{1}{2}$. 1323. $-\frac{1}{3}$, 1324. $\frac{1}{3}$ 1325 $\frac{1}{5}$ 1326 $\frac{1}{2}$, 1327. 1. 1328. $\frac{a-b}{3ab}$ 1329. $\frac{1}{6}$ in a. 1330, -2, 1331, 1 1332. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, 1333. $\frac{1}{6}$ 1334. $\frac{2}{3}$ 1335, 1 1336.0 1337.0. 1338. 0. 1339. 0. 1340. 0. 1341. 0. 1342. 1. 1343. 1. 1344. — 1. 1345. e^h. 1346. e^{-t}. 1347. $e^{\frac{\pi}{R}}$ 1348. e^{-1} . 1349. 1. 1350. 1. 1351. 1. 1352. $e^{\frac{\pi}{4\ln 4\pi}} \left(n \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ et entero} \right)$. 1353, $e^{\frac{1}{8} \cdot (\ln^2 \sigma - \ln^2 \theta)}$, 1354, $\frac{1}{2}$, 1355, $\frac{1}{2}$, 1356, 0, 1357, $-\frac{1}{2}$ 1358, $\sigma^a (\ln a - 1)$. 1359. $\leftarrow \frac{e}{2}$, 1360. $\frac{1}{e}$, 1361. $e^{-\frac{e}{4}}$, 1362. 1. 1363. $e^{\frac{1}{4}}$, 1363.1. $e^{-\frac{1}{4}}$. 1363.2, $e^{\frac{1}{4}}$, 1363.3, $e^{-\frac{1}{4}}$, 1363.4, $e^{-\frac{1}{4}}$, 1364, $e^{-\frac{1}{4}}$, 1365, $e^{-\frac{1}{4}}$, 1368, $e^{-\frac{1}{4}}$ 1367, $\frac{mn}{a-m}$. 1368. $\sqrt{\epsilon}$. 1368. 1.0. 1368. $-\frac{1}{6}$. 1370. a. 1371. ig a. 1373.1. $f(0) = -\frac{1}{12}$ 1371.2. $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 1374. La regla de L'Hospital no es aplicable, el límite es igual a caro; b) la regla de L'Hospital no es aplicable, el límite es igual a l. c) aplicando formalmente la regla de L'Hospital se obtiene un resultado falso igual a 6, el limite no existe; d) la aplicación de la regia de L'Hospital es gints e implica un resultado falso, igual a cero, no existe límite. 1375. 4/2. 1376. $5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$. 1377. $1 + 2x + 2x^3 - 2x^4 + o(x^4)$: $-48. 1376. 1+60x+1950x^2+o(x^2). 1379. a+\frac{x}{mn^{m-1}}-\frac{(m-1)x^2}{2m^2n^{m-1}}+o(x^2).$ **1380.** $\frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^2)$. **1381.** $1 + 2x + x^3 - \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{6}x^6 - \frac{1}{15}x^6 + o(x^3)$ 1382 $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{790} + o(x^3)$, 1383, $x - \frac{x^2}{18} - \frac{x^{39}}{2040} + o(x^{14})$, 1384, $-\frac{x^3}{2} - \frac{x^{18}}{18} - \frac{x^{18}}{18} + o(x^{18})$ $=\frac{x^4}{15} + o(x^4). \qquad 1385. \qquad x = \frac{x^4}{3} + o(x^3). \qquad 1386. \qquad x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{15} + o(x^4).$ 1387. $-\frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^4}{2835} + o(x^4)$, 1388. $1 + \frac{1}{9}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$ 1389. $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)$. 1390. $y=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2)$. 1391 $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$. 1392 $\ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{\ln x^n} + o(h^n)$. 1394, a) E₃ menor que $\frac{3}{(n+1)!}$; b) no es superior a $\frac{1}{3640}$, c) es menor que 2 · 10 °; d) es menor que $\frac{1}{16}$. 1395., x 1 < 0,222 = arc 12°30′. 1396, a) 3,1072, b) 3,0171, c) 1,9961. d) .64872; c) 0.309017; f) 0.182321; g) $0.67474 = arc 38^{\circ}39'35';$ h) $0.46676 = arc 26^{\circ}44 a7''$,) 1.12.17' 1397 a, 2.716281828; b) 0.01745241; c) 0.98769; d) 1.2361; e) 1.04139; 1398. $= \frac{1}{12};$ 1398; $= \frac{1}{3};$ 1490. $= \frac{1}{4};$ 1401; $= \frac{1}{3};$ 1402. $= \frac{1}{6};$ 1403. $\ln^2 a$. 1404. $\frac{1}{2}$. 1405 0. 1406. $\frac{1}{3}$ 1406 1 $\frac{19}{90}$ 1406.2. $\frac{1}{9}$ 1406.3. $\frac{1}{2}$ 1407 $\frac{x^2}{30}$ 1408 x^2 1409. $\frac{a}{2}$, 1410. $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ 1410.1, $A = -\frac{2}{5}$ $B = -\frac{1}{15}$ 1410.2 $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{12}$, $C = -\frac{1}{9}$, $D = \frac{1}{12}$, 1411. a) $\frac{2x}{R^3}$ b) $\frac{4}{3}$ r c) $\frac{An}{100}$, d) $\frac{70}{x}$. 1412. $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. 1413. $\frac{\alpha^4}{180}$, donde α es la mitad del ángulo central del arco. 1414 Máximo y=2 $\frac{1}{4}$ para $x=\frac{1}{2}$ 1415 No hay extremo, 1416, Mínimo y=0 para x=1, 1417, Mínimo y=0 para x=0, si m es par, y no hay extremo para x=0, si m es impar; máximo $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ para $x = \frac{m}{m + n}$; mínimo y = 0 para x = 1, si n es par, y no hay extremo para x=1, si n es impar. 1418 Minimo y=2 para x=0. 1419. Minimo y=0 para x=-1, máximo $y=10^{10}$ e $^{9}\approx 1\,234\,000$ para x=9. 1420

Máx.mo y = 1 para x = 0, si n es impar, y no hay extremo para x = 0, si n es par. 1421. Minimo y = 0 para x = 0 1422. Máximo $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} \approx 0.529$ para $x = \frac{1}{2}$ minumo y = 0 para x = 1, no hay extremo para x = 0 1423 M₃n₃. mo $f(x_0) = 0$, si $\phi(x_0) > 0$ y n es par, máx.mo $f(x_0) = 0$, si $\phi(x_0) < 0$ y n es par. / (Ya) no es extremo si n es impar, 1425 No 1427 a, minimo f (0)= = 0, b) minimo f(0) = 0, 1428 Minimo f(0) = 0 1429 Para x = 1 máximo y = 0, para x = 3 mínumo y = -4 1430 Mínumo y = 0 para x = 0, máximo . 1 para x = ± 1 1431. Para $s = \frac{5 - \sqrt{13}}{5} \approx 0.23$ minumo y ≈ -0.76 . para x = 1 máximo y = 0 para $x = \frac{5+1/13}{6} \approx 1,43$ minumo $y \approx -0.05$, par ra x = 2 no hay extremo. 1432, Para x = -1 máximo y = -2, para x = 1 m. mmo y=2 1433 Para x=-1 minimo y=-1, para x=1 maximo y=11434. Para $x = \frac{7}{5}$ mínimo $y = -\frac{1}{24}$. 1435. Para x = 0 y x = 2 míniwo er le fronters y=0, pare x=1 máximo y=1, 1436, Pare $x=\frac{3}{x}$ minimo $y = -\frac{3}{6} \stackrel{4}{\cdot} \stackrel{7}{\cdot} \stackrel{7}{\cdot} \approx -0.46$, para x = 1 no hay extremo 1437. Para x = 1máx.mo $e^{-1} \approx 0.368$ 1438 Para x = +0 máximo en la frontera y = 0para $x = e^{-2} \approx 0.135 \text{ m.nimo } y = -\frac{2}{100} \approx -0.736, 1439, \text{ Para } x = 1 \text{ mini$ mo = 0 para x = $e^2 \approx 7.389$ máximo $y = \frac{4}{e^2} \approx 0.541$ 1440. Para $x = k + (k = 0, \pm 1, \pm 2, -)$ máximo $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$, para $x = \pm \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$ $+ 2 k \pi \cdot k = 0$, 1 + 2) minimo $y = \frac{3}{4}$ 1441 Para $x = k \pi (k \cdot 0)$ +1, +2) máximo) = 10, para $x = \pi k + \frac{1}{2} (k = 0 + 1, +2, -)$ minimo y = 5 1442 Para x = 1 max.mo $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + 2 \approx 0.439$ 1443 Para $x = -\frac{1}{4} = 2\pi k$ $k = 0 \pm 1, \pm 2, ...$ minimo $y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4} + 2k\pi}$ para $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ (k = 0, ... + 1, ... + 2, ...) máximo $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \frac{3\pi}{6} + 2k\pi$ 1444 Para x = -1 maximo . $e^{-2} \approx 0.135$; para x = 0 minimo . z = 0 (punto anguloso), para x = 1 máximo y = 1, (punto anguloso) 1445. $\frac{1}{\alpha}$; 32, 1446. 2, 66, 1447. 0; 132, 1448. 2; 100,01, 1449. .; 3, 1480. 0; $\frac{100}{2} \approx 36.8.1451.0; 1.1452.0; \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \approx 1.21453, -\frac{12}{2}e^{-\frac{\sqrt{11}}{4}} \approx -0.067.1$

¹⁴⁵⁴ $m(x) = -\frac{1}{6}$, st $-\infty < x \le -3$; $m(x) = \frac{1+x}{3+x^2}$, st $-3 < x \le -3$ $\leq -1 \text{ m.x} = 0$, si $-1 < x < +\infty$, $M(x) = \frac{1}{2}$, si $-\infty < x < 1$ $M(x) = \frac{1+x}{3+x^3}$, si $1 < x < +\infty$. 1468. a) $\frac{14^{10}}{2^{14}} \approx 1.77 \cdot 10^5$; b) $\frac{1}{200}$; c) $\sqrt{3} \approx 1.44 + 1457$. $\frac{9+6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85$. 1458 $q = -\frac{1}{9} + 1489 \frac{4}{17} + 1460$. $g(x) = -\frac{1}{12} + \frac{1489}{12} = \frac{4}{12}$ $= (x_1 + x_2) x - \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2); \quad \Delta = \frac{1}{8} (x_1 - x_2)^2, \quad 1461, \frac{2}{3} \quad 1462. \text{ Una}$ raix (3, $+\infty$). 1463. Una raíz: $-\infty < x_3 < -1$, si h > 27; tres raíces: $-\infty <$ $x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 3$ y $3 < x_3 < +\infty$ sl -5 < h < 27, una raiz $3 < x_3 <$ $+\infty$, si h < -3 1464. Dos raices, $\infty < x_1 < 1$ y $1 < x_2 < +\infty$, 1465. Una raiz: $-\infty < x_1 < -1$, si $-\infty < a < -4$, tres raices. $\infty < x_1 <$ -1, $-1 < x_3 < 1$, $1 < x_9 < +\infty$, si -4 < a < 4, una raíz $1 < x_1 < +\infty$, s $4 < a < +\infty$, 1466. Una raiz $0 < x_1 < 1$, si $-\infty < k < 0$, dos raices, $0 < x_1 < \frac{1}{x}$ $y = \frac{1}{x} < x_2 < +\infty$, si $0 < k < \frac{1}{x}$; no hay raites, si $k > \frac{1}{x}$. 1467...No hay raices, si a < 0, una raiz. $-\infty < x_1 < 0$, si $0 < a < \frac{a^2}{a}$, tres raices. $-\infty < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$ y $2 < x_3 < +\infty$, si $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ 1468 Dos raíces, si $|s| < 3\sqrt{3}/16$; no hay raíces, si $|s| > 3\sqrt{3}/15$ 1469. Dos raíces $0 < |x_1| < \xi$ y $\xi < |x_2| < +\infty$, donde $\xi \approx 1.2$ es una raíz positiva de la ecuación cth x = x, si |k| >sh $\xi \approx 1.50$, no hay raíces, si $|k| < \sinh \xi$ 1470. a) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$, b) $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$. 1471°) Sumetría respecto del origen de coordenadas. Los ceros de la función son x=0 y $x = \pm \sqrt{3} \approx \pm 1.73$, Minimo y = -2 para x = -1; máximo y = 2 para x = 1. Funto de inflexión x = 0, y = 0 1472. Simetría respecto del eje Gy Los ceros son $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1,65$ Mínimo y = 1 para x = 0, má ximo $y = 1\frac{1}{2}$ para $x = \pm 1$. Puntos de inflexión: $x = \pm \frac{1}{1/2} \approx -0.58$, y = 11473. Simetria respecto del punto A(1, 2). Ceros x = 1 y x = 1 Minimo y = 0 para x = 2, máximo y = 4 para x = 0. Punto de inflexión x = 1, y = 2. 1474. Simetria respecto del eje Oy. Ceros de la función $x = \pm \sqrt{2} \approx 1.41\,$ Má ximo y = 2 para x = 0, minimo $y = 1 - \frac{1.5}{2} = -0.12$ para $x = \pm 1/2 + 1.5 =$ ≈ ± 2.06. Puntos de inflexión $x_{1,4} = \pm 0.77$, $y_{1,2} = 1.04$, $x_{0,4} \approx \pm 2.67$, $y_{3,4} \approx -0.010$, Asintota y = 0

^{*)} A los problemes de construcción de gráficas no siempre se den respuestes completas.

1475 Puntos de discontinuidad x = 2 y x = 3 Ceros $x = \pm 1$ Mínimo $y = -(10 - \sqrt{96}) \approx -0.20$ para $* = \frac{7 - \sqrt{24}}{5} \approx 0.42$ máximo $y = -(10 + \sqrt{96}) \approx -19,80$ para $x = \frac{7 + \sqrt{24}}{6} \approx 2,38$. de inflexión $x \approx -0.58$, $y \approx -0.07$ Asíntotas x = 2, x = 3 e y = 11476 Puntos de discontinuidad $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ Cero de la función x=0 No hay puntos de extremo Punto de inflexión $x\approx -0.22$, $y\approx -0.19$ Asintotas x = -1, x = 1 e y = 0.1477. Cero de la función x = 0. Punto de discontinuidad x = -1 Minimo y = 0 para x = 0, máximo $y = -9\frac{15}{15}$ para x = -4. No hay puntos de inflexión Asintolas, x = 1 e y = x - 31478. Minimo y = 0 para x = -1 Punto de inflexión x = -4, $y = \frac{61}{605}$ Asintotas: x = 1 e y = 1, 1479, Máximos $y = -\frac{34 + 17 - 142}{29} \approx -8,82$ para $\frac{3+1.7}{2} \approx -3.36 \text{ c}_1$ 0 para x = 0, mínimo $y = \frac{34 \cdot 17}{32} \approx -0.06$ para $x = \frac{1}{5}$ $\frac{7}{3} \approx 6$ Punto de inflexión $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{1}{45}$ Asintotas x = - 1 e v x 3 1480 Simetria respecto del origen de coordenadas No has purios de extremo ponto de inflexión x = 0, y = 0. Asintotas x = -1, x = 1 e y = 0 1481 Maximo $y = 13 \frac{1}{2}$ para x = 5 Punto de inflexión x = 1, y = 0. Asintotas x = 1 e y = x + 5 1482 Minuno $y = 2\frac{2}{3}$ para x=2, maximo $y\approx -3.2$ para $x\approx -2.4$, punto de inflexión x=0, y=8Asíntotas, x = -1 e y - x, 1483. Simetría respecto del eje Oy. Ceros de la función: $x=\pm \frac{1}{4} = \pm 0.79$. No hay puntos de extremo. Puntos de unflex.on $x = \pm \left(\frac{1}{2} \approx \pm 0.71, -2\frac{2}{3}\right)$ Asintotas $x \approx -1, x = 0$ x 1 e 3 = 0 1484 Campo de existencia $0 \le x < +\infty$ Ceros x = 0 5 x = 3 Minimo v = 2 para x = 1 máximo en la frontera y = 0 para x = 0 Concav dad hacia arriba 1485 Campo de existencia | r <21 5 = 2,83 Simetria respecto del origen de coordenadas y de los ejes coordenados. Ceros. v = 0 $x = \pm 2 \sqrt{2}$ Máximo y = 4 para $x = \pm 2$, minimo x + 0 para x = 0, mínimo de la frontera $x_1 = 0$ para $x = \pm 2\sqrt{2}$ No hay pontos de inflexión 1485 1. Cero de la función x = 2 Minimo $y = -\sqrt{5} \approx -2.24$ para x = -0.5Puntos de inflexión $x_1 = -\frac{3+1}{8} \frac{\sqrt{41}}{2} \approx -1.18$, $y_1 \approx -2.06$ y $x_2 = \frac{y_1 + 1 - 3}{8} \approx 0.42$:

 $g_3 = 1.46$ Asintotas: y = -1 para $x \to -\infty$ e y = 1 para $x \to +\infty$ 1486. Campo de existencia $1 \le x \le 2$ y $3 \le x \le +\infty$, Ceros x = 1, x = 2y = 3 Máximo $y = \frac{1}{3} \sqrt{12} \approx 0.62$ para $z = \frac{6 - 1/3}{2} \approx 1.62$; mínumos en la frontera ly l=0 para x=1 2 y 3 1487 Minimo y=0 para x=1, máximo $g = \frac{2}{3} \sqrt[3]{4} \approx 1.06$ para $x = -\frac{1}{3}$, punto de inflexión x = -1. y=0, Asintota $y=x-\frac{\epsilon}{3}$ 1488 Simetria respecto del eje Oy. Mimmo y=-3 para x=0 Concavidad bacia abajo. Asíntota y=0 1489 Simetría respecto del origen de coordenadas. Cero de la función x = 0. Minimo $y = -\frac{3}{1} \overline{16} \approx -2.52 \text{ para } x = -2, \text{ máximo} \quad y = \frac{3}{1} \overline{16} \quad \text{para } x = 2 \text{ Punto}$ de inflexion: x=0, y=0 Asintota y=0 1490. Simetria respecto del eje Ox Minimo $y = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \approx 1,59$ para $x = \pm 1$, máximo y = 2 para x = 0 Conca vidad hacia abajo. 1491. Simetria respecto del origen de coordenadas Pontos de discontinu.dad: $x=\pm 1$. Cero de la función x=0. Minumo $y = \frac{V3}{3} \approx 1.38$ para $x = \sqrt{3}$; máximo $y = -\frac{V3}{3}$ para $x = -\sqrt{3}$ Puntos de inflexión: $x_1 = 0$, $y_3 = 0$ y $x_{1,3} = \pm 3$, $y_{2,3} = \pm 1 \frac{1}{5}$ 1492 Campo de existencia de la función |x > 1 Simetría respecto del eje Oy. Mínimo en Is frontera y=0 para x=+1 Concavidad hacia abajo. Asintotas: $y=\frac{x}{y}$ para $x \to +\infty$ e $y = -\frac{x}{9}$ para $x \to -\infty$, 1493 Campo de existencia de la función x>0 Minimo $y=\frac{3}{2}$ $\sqrt{3}\approx 2.60$ para $x=\frac{1}{2}$. Concavidad hacia amba Asintotas $y=x+\frac{3}{2}$ y x=0 1494. Campo de existencia. $x \ge 0$ y x < -3Cero de la función $x = \frac{5 + 1/\sqrt{13}}{2} \approx 4,30$. Mínumo y = 13 para x = -4; má ximo en la frontera y = 1 para x = 0. Concavidad hacia arriba. Asíntotas $y = \frac{5}{5} - 2x$ para $x \to -\infty$; $y = -\frac{1}{9}$ para $x \to +\infty$; x = -3 para $x \to -3 - 0$. 1495. Mínimo y = 0 para x = 0, máximo $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1.59$ para x = -2Puntos de inflexión $x_1 = -\sqrt{3} = -0.27$, $y_1 = \sqrt[3]{\frac{1/2^2 - 5}{2}} \approx 0.4$ $x_{t} = -(2+1/3) \approx -3.73$, $y_{t} = -\sqrt[4]{\frac{5+\sqrt{27}}{2}} \approx -1.72$. Asintota x = -1.72. 1496. Simetria respecto de eje Oy. La función es positiva. Máximo $y = \sqrt{3} \approx 1.73$ para x = 0, mínimo $y = \sqrt{2} \approx 1.41$ para $x = \pm 1$. Puntos de inflexion $x_{1,2} \approx \pm 0.47$, $y_{1,2} \approx 1.14$ y $x_{3,4} \approx \pm 4.58$, $y_{3,4} \approx 4.55$. Asintotas $y = \pm x$. 1497. Periodo de la función: $T = 2\pi$, campo fundamental $0 \le x \le 2\pi$ Ceros de la función $x_1 = \pi + \arcsin \frac{1/5 - 1}{9} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - \arcsin \frac{1/5 - 1}{2} \approx 1.21 \pi \text{ y } x_0 = 2\pi - 1.21 \pi$ $\approx 1,79\pi$. Minimos y=1 para $x=\frac{\pi}{2}$ to y=1 para $x=\frac{3\pi}{2}$ max.mo $y = 1 \frac{1}{4}$ para $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$ Puntos de inflexión $x_1 = \arcsin{\frac{\pm \sqrt{33}}{8}} \approx 0.321$ $y_1 = \frac{19 - 31/33}{32} \approx 1,13$ $x_2 = \pi - \arctan \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \approx 0,68\pi,$ $y_2 = \frac{19 + 3\sqrt{3}}{29}$ $x_1 = \pi$ arcs. $1 = \frac{33}{30} - \frac{1}{2} \approx 1,20\pi$, $y_3 = \frac{.9 - 3\sqrt{23}}{30} \approx 0,055$, $x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33 - 1}}{2} \approx 1,80\pi$, $y_4 = \frac{19 - 3\sqrt{33}}{29}$, 1498 Periodo de la función: 2π , campo fundamental $\pi \leq x \leq \pi$ Simetría respecto del origen de coordenadas. Ceros. $x_1 = 0$ y $x_{2,3} = \pm \pi$. Mínimo $y = -\frac{15}{2} \sqrt{15} \approx -7.3$ para $x = -\arccos \frac{1}{4} \approx -0.42\pi$, máximo $y = \frac{1.5}{2} \sqrt{15} \approx 7.3$ para $x = \frac{1.5}{2} \sqrt{15} \approx 7.3$ = arccos $\frac{1}{2} \approx 0.42\pi$. Puntos de inflexión: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_{2,3} = 0$ $z \pm z^{-1}\cos^{2}(x) + \frac{7}{8} = \pm 0.84\pi;$ $y_{2,3} = \pm \frac{21}{20} \int_{0}^{\pi} 15 \approx \pm 2.14, x_{4,5} = \pm \pi y_{4,5} = 0$ 1499 Período de la función $T=2\pi$, campo fundamental $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ Simetria respecto del origen de coordenadas Ceros: $x_1 = 0$ y $x_2 = \pm \pi$ Minimos, $y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0.94$ para $x = -\frac{3\pi}{4}$ y x $\frac{\pi}{4}$, $v = \frac{3\pi}{3}$ para x $\sqrt{1}$, máximos; $y = -\frac{2}{3}$ para $x = -\frac{\pi}{2}$ $1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ para $x = \frac{\pi}{4}$ $y = x = \frac{3\pi}{4}$ Puntos de inflexión $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm \arcsin \left[-\frac{5}{6} \approx \pm 0.37\pi, y_{2,3} = \right]$ $- - \frac{4}{27} \sqrt{30} \approx +0.81 \ x_{a,b} = \pm \left(\alpha - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0.63\pi, u_{a,b} = -\frac{1}{27} \sqrt{30}$ 1500 Periodo de la función $T = 2\pi$, campo fundamental $[-\pi,\pi]$ Simetria respecto des eje Or Ceros de la función $v_{1,2}$ + acces $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62 \tau$. Mammos $y = \frac{1}{2}$ para x = 0 y = -1 $\frac{1}{2}$ para $x = \pm \pi$, máximos. $y = \frac{3}{4}$ Pa

 $m = \pm \frac{\pi}{2}$. Puntos de inflexión $x_{1,j} = \pm \sec \cos \frac{1+\sqrt{33}}{2} \approx \pm 0.18\pi$ $u_{1,1} \approx 0.63;$ $z_{1,4} = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, \ y_{1,4} \approx -0.44$ 1501, Período de la función: $T = \frac{\pi}{9}$, campo fundamental $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$ Simetria respecto del eje O). La función es positiva. Máximo y = 1 para x 0 minumo $y=\frac{1}{2}$ para $x=\pm\frac{\pi}{4}$ Puntos de inflexión $x_{1,1}=-\frac{\pi}{2}$, $y_1=\frac{3}{2}$ 1502. Periodo de la función $T = \pi$, campo fundamental $\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ metría respecto del eje Oy Ceros de la función $x_1 = 0$ y $x_{1,i} = +\frac{\pi}{2}$ M m mos. y = 0 para x = 0 e y = -1 para $x = \pm \frac{\pi}{2}$, máximo $y = \frac{9}{16}$ para $x = \pm \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.2 \text{ T. Puntos de inflexión}$ $x_{z} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx$ $\approx \pm 0.11\pi$, $y_{1,2} \approx 0.29$, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - 1/\sqrt{29}}{16} \approx \pm 0.36\pi$, $v_{4,4} \approx -0.24$ 1503, Periodo de la función $T=\pi$, campo fundamental $0 \le x \le \pi$. Punto de discontinuidad $x = \frac{3\pi}{4}$. Ceros $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$. No hay extremos, la función es creciente Punto de unitexión: $x = \frac{\pi}{4}$ $y = \frac{1^2 2}{2}$ Asintota $y = \frac{3\pi}{4}$. 1504, Periodo de la función T=2 π campo fundamental $[-\pi,\pi]$ Simetría respecto de, eje Oy Ceros de la función $z_{3,2} = \pm \frac{\pi}{2}$. Minimo y = 1 para x = 0, máximo y = -1para $x = \pm \pi$ Puntos de inflexión $x_{1,4} = \frac{\pi}{2}$ $y_{1,b} = 0$. Asintotas $x = \pm \frac{\pi}{4}$ y $x=\pm \frac{3n}{4}$.1504.1. Período de la función $T=2\pi$, campo fundamental $-\pi \le$ $\leq x \leq \pi$. La función es impar Mínimo $y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0.58$ para $x = -\frac{2\pi}{3}$ máximo $y = \frac{1/3}{3} \approx 0.58$ para $x = \frac{2\pi}{3}$. Puntos de inflexión $x_1 = 0$. $y_1 = 0, x_{7,3} = \mp \pi, y_{2,3} = 0.1505$, Centros de sametría $(k\pi, 2 k\pi)$. Ceros de la funcion: $x_1 = 0$, $x_{2,3} \approx \pm 0.37$, ... Máximos $y = \frac{\pi}{a} - 1 + 2k\pi$ para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, minimos $y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right)$ para $x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. Puntos de inflexión $x = k \pi$, $y = 2\pi$ Asíntotas $y = \frac{2k+1}{2}\pi$ (k es entero) 1506. Simetria respecto de la recta x = 1 La función es positiva Máximo

y = e para x = 1. Puntos de inflexión $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. $a_{1,1} = \sqrt{e} \approx 1.65$ Asintota y = 0 1507 Simetria respecto del eje Oy La l'uncion es pos tiva Maximo y = 1 para x = 0. Puntos de inflexión $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22$ $g_{a} = \frac{5}{6} e^{-\frac{\pi}{8}} \approx 0.56$

Asintota y = 0 1508, La función es positiva, Mínimo y = 1 para x = 0 Concavidad hacia arriba. Asintota y = x para x - + . 1509. La función no es negativa, cero x = 0 Mímimo y = 0 para x = 0, máximo $y = \sqrt[3]{\frac{4}{6}} e^{-\frac{x}{6}} \approx 0.39$ para $x = \frac{2}{3}$ Puntos de inflexión $x_i = \frac{2 - \sqrt{6}}{3} \approx -0.05$ $y_i \approx 0.34$ y $x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \approx 1.48$, $y_2 \approx 0.30$. Asintota y = 0 para x + + = 1509 1 La función no es negativa. Minimo p=0 para x $=k\pi$ ($k=0,\pm 1,\pm 2$ =1) Má x mos $y = \frac{1}{2} e^{-\left(ak + \frac{1}{2}\right)x}$ para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Puntos de inflexión $x_k = 1)^k \frac{x}{6} + k\pi y_k = \frac{1}{4} e^{-\left[kk + \frac{1}{4}(t-1)^k\right]x}$. 1510. Le función es positiva para x>-1 y es negativa para x<-1 Minimo y = 1 para x=0Concavidad hacia arriba para x>-1 y hacia abaso para x<-1 1511 Si metria tespecto del eje Oy. La función no es negativa, cero x = 0. Minimo y = 0 (punto anguloso) para x = 0 Concavidad hacia abajo, 1512, Campo de existencia de la función, x > 0 Cero de la función x = 1 Maximo $x = \frac{7}{2} \approx 0.74$ para $x = e^2 \approx 7,39$ Punto de inflexión: $x = e^{\frac{x}{2}} \approx 14,33$, $y = \frac{8}{3}$ e $\frac{1}{2} \approx 0.70$ As neotas x = 0 chando $x \rightarrow + 0$ e = 0 chando $x \rightarrow + \infty$ 1513 5 metria respecto del origen de coordenadas. Cero x 0. No hay partos de extremo, la función es creciente. Puntos de interción x=0 > 0 1514 Simelina respacto de, origen de coordenadas. Cero de la función y . O la función es creciente. Concavidad hacia arnoa para x>0 y concavidad hacia abajo para $x \le 0,0$ (0,0) es un punto de lofles en 1515 Campo de existencia de la funcion x 1 < 1 Simetria re perto del origen de coordenadas. La función es monotona creciente. Concavidad hacia arriva para $\tau>0$ y concavidad hacia abajo para x < 0 punto de inflexion x = 0, y = 0 Asinto as $x = \pm 1$ 1516. Simetria respecto del origen de coordenadas. Cero de la luncion x=0. No hay puntos de extremo, la función es creciente. Punto de inflexión. x = 0 y=0 Asintotas: $y=x-\frac{\pi}{2}$ cuando $x\to-\infty$ e $y=x+\frac{\pi}{2}$ cuando $x\to+\infty$ 1517. Cero de la función $x \approx -5.95$. Mínimo $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1,285$ para

x 1, máx.mo $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx 1,858$ para x=-1. Concavidad hacia arriba

para x > 0 y concavidad hacia abajo para x < 0; punto de inflexión x = 0. $y = \pi/2$, Asintotas, $y = \frac{x}{2} + \pi$ chando $x \to -\infty$ a $y = \frac{x}{6}$ chando x + + = 1618. Simetria respecto del eje Oy La función no es negativa, ero x=0. Minimo y=0 para x=0. Concavidad hacia arriba. Asintotas. $y=-\frac{\pi}{2}$: -1 cuando $x \to -\infty$ e $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ para $x \to +\infty$, 1519. Signetria respecto del origen de coordenadas. Cero de la función x=0. Máximo $y=-\frac{\pi}{2}$ (punto anguloso) para x=1; máximo $y=\frac{\pi}{9}$ (punto anguioso) para x=1Punto de inflexión x = 0, y = 0 Asintota y = 0 1520 Sumetría respecto del e_je Oy La funcion es no-negativa cero x=0 Minumo y=0 para x=0 (pun to anguloso) Concavidad hacia abajo. Asintola y - \pi 1521 Punto de disconthousand de la función x = 0 Cero de la función x = -2 Minimo $y = 4\sqrt{6} \approx 6.59 \text{ para } x = 2$; máximo $y = \frac{1}{4} \approx 0.37 \text{ para } x = -1$. Punto de inflexion $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{8}{5}e^{-x/2} \approx 0.13$. As into tas: x = 0 a y = x + 3 1522 Campo de existencia de la función $|x| \ge 1$ Simetría respecto del eje oy. Máxumo en la frontera $a=2^{1.97}\approx 2.67$ para $x=\pm 1$. Concavidad hacia arriba Asintota y = 1 1523 Campo de existencia de la función x < 1 y x > 2 Pun tos de intersección con los ejes de courdenadas (0, in 2) y (1/3, 0) Máximo $y = 1.12 \text{ para } x = \frac{1 - 1.13}{3} = 0.72$ Asintotas x = 1, x = 2 e y = 0.1534Campo de existencia de la función | x | & a Puntos de intersección con es ejes de coordenadas (0, a) y (0.67 a, 0) (aproximadamente). La función es monotona creciente. Mínimo en la frontera $u=-\frac{\pi}{2}$ g para x=-gy máximo en la frontera $y = \frac{\pi}{2}a$ para x = a Concavidad hacia arriba

1525. Campo de existencia de la función $x \le 0$ y $x \ge \frac{2}{3}$. . Mínimo en la frontera y=0 para x=0, máximo en la frontera $y=\pi$ para $x=\frac{2}{3}$ Con cavidad hacia abajo para $x \le 0$ y concavidad hacia arriba para $x \ge \frac{2}{3}$. Asintota $z = \frac{\pi}{2}$. 1526. Campo de existencia x > 0. La función es positiva. Mís nimo $y = \left(\frac{1}{s}\right)^{1/e} \approx 0.692$ para $x = \frac{1}{s} \approx 0.3680$ Máximo en la frontera y=1 para $x=\pm$ 0. Concavidad hacia amba. 1527. Campo de existencia de la function x > 0 Minimo en la frontera y = 0 para $x = \pm 0$; máximo $y = e^{x^2 - e^{x^2 - 4x}}$ para x = e Asíniota y = 1, 1528 Campo de existencia x > -1, $x \neq 0$ is función es positiva. Punto de discontinuidad evitable x = 0. No hay puntos de extremo, la función es decreciente. Concavidad hacia arriba. Asíntotas $\dot{x} = -1$ e y = 1.1529 La función es monótona para x > 0 Minimo en la frontera y=0 para $x=\pm 0$. As ntota y=c x $\frac{1}{9}$. 1530. La función es positiva. Simetría respecto del eje Qy. Puntos de discontinuidad. $x = \pm 1$. Minumo y = e para x = 0; máximo $y = \frac{1}{41/2} \approx 0.15$ para $x = \pm \sqrt{3}$ Cuatro puntos de inflexión. Asíntotas x = -1 cuando $x \Rightarrow -1 + 0$; x = 1 cuando $x \to 1 - 0$ e y = 0 cuando $x \to \infty$, 1531. Las funciones x e y son no-negativas. $x_{min} = 0$ para x = -1; $y_{min} = 0$ para x = 1 Concavidad hadia striba para 1 > − 1 y concevidad hacía abajo para r < − 1 1532 Puntos de intersección</p> con los ejes de coordenadas, (0,0) para t=0, ($\pm 2\sqrt{3}-3$,0) para $t=\pm\sqrt{3}$ y (0, -2) para r = 2, $x_{max} = 1$ a $y_{max} = 2$ para r = 1 (punto de retroceso) $P_{min} = -2$ para t = -1, Concavidad hacia arriba para t < 1 y concavidad ha cia abajo para / > 1, 1533 Punto de intersección con los ejes de coordenadas (0,0) para t = 0, $x_{max} = 0$ para t = 0, $x_{min} = 4$ para t = 2, y decrece cuando t crece Punto de inflexión (0,08,0,3) para t = 0,32 (aproximadamente) Asintotas. y = 0 $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$ 1534 Punto de intersección con el eje O) (0, 1) para t = 0, punto de intersección con el eje Ox (-1, 0)para $t=\infty$. Extremos en la frontera: $x_{min}=0$ e $y_{max}=1$ para t=0, $x_{max}=-1$ e $y_{min}=0$ para $t=\infty$ No hay puntos de inflexión Asintora $y=rac{t}{2}$. Concavidad hacia arriba para |t|>1 y concavidad hacia abajo pa ra | t | < 1 1535. Las funciones $x \in y$ son positives, $x_{min} = 1 \in y_{min} = 1$ para r = 0 (punto de retroceso) Concavidad hacia arriba para r < 0, concavidad hacia abajo para t>0 Asintola y=2x cuando $t\to +\infty$. 1536. Campo fundamental [0, n] Puntos de intersección con los ejes de coordenadas $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$. 0 para $t = \frac{\pi}{6}$ $\left(0 - \frac{a}{3\sqrt{2}}\right)$ para $t = \frac{\pi}{4}$ (-a, 0) para $t = \frac{\pi}{2}$, $\left(0, \frac{a}{1-2}\right)$ para $t = \frac{3t}{4}$ $(\frac{a}{2}, 0)$ para $t = \frac{6\pi}{6}$ Extremos: $x_{max} = a = a$ $y_{max} = a \text{ para } t = 0$, $y_{min} = -a \text{ para } t = \frac{\pi}{2}$ $x_{min} = -a \text{ para } t = \frac{\pi}{2}$ $y_{max} = a$ para $t=\frac{2\pi}{2}$, $\tau_{max}=a$ e $r_{min}=-a$ para $t=\pi$. Concavidad hacia arriba para $0 < t < \frac{\pi}{2}$, concavidad hacia abajo para $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. 1537. Las funciones x e y son no-negativas y periódicas, el campo fundamental es $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Extremos $x_{min} = 0$ e $y_{max} = 1$ para $t = \frac{\pi}{2}$ y $x_{max} = 1$ $e(y_{min}=0)$ para t=0. Concavidad hacia arriba. 1538. Campo de existencia t > 0 Simetria respecto de la recta x + y = 0. Extremos $x_{min} = -\frac{1}{\pi} + 0.37$. $y = -e \approx -2.72$ para $t \approx \frac{1}{e}$ $q_{max} = \frac{1}{e}$, x = e para t = e. Puntos de mflexion $z = -1/2e^{-1/2} = -34$, $y = -1/2e^{1/2} = -5.82$ para $t = e^{-\sqrt{2}t} \approx 0.24$ y $t_2 = 1/2e^{1/4}$ $r_1 = 1/2e^{-1/4}$ para $t = e^{-2} \approx 4$ Cuando $t = \frac{1}{a}$ — cambia el sentido de la concavidad. Asíntotas x = 0 e , 0 1539. Las funciones x e y son periòdicas, de período $T=2\pi$, campo fundamental - $\pi \leqslant i \leqslant \pi$ Simetria de la curva respecto de los ejes de coordenadas La curva tiene dos ramas. Extremos $x_{min}=a, y=0$ para $r=0, x_{max}=-a$ y=0 para $r=\pm\pi$. Concavidad hacia arriba para $-\pi < \epsilon < -\pi/2$ y $0 < \epsilon < \pi/2$ $<\pi/2$, concavidad hacia abajo para $-\pi/2 < t < 0$ y $\pi/2 < t < \pi$. 1540 Sinetria respecto del eje Oy $y_{min}=0$, x=0 para t=0. Concevidad hacia abajo 1541. Las ecuaciones paramétricas son $x = \frac{3at}{3} = \frac{3at^2}{3} = \frac{$ Simetria respecto de la recta y = x. Punto de intersección con los ejes de coordeniidas 0 (0 0) (punto doble). $x_{max} = a \sqrt[3]{4} \approx 1.59 a para y = a \sqrt[3]{2} \approx 1.2 a$ $y_{max} = a \sqrt[3]{4}$ para $x = a \sqrt[3]{2}$ Asintota x + y + a = 0 1542 Simetria respecto del ongen de coordenadas, de los ejes de coordenadas y de las bisectrices de los ángulos coordenados 0 (0, 0) es un punto aisado. Puntos de intersección con los ejes de coordenadas (± 1, 0) y (0, ± 1), $|x|_{min} = 1$ para y = 0 $x'_{\min} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \approx 1,10$ para $y = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.71;$ $y|_{\min} = 1$ para x=0 $y_{max} = \sqrt{\frac{1+1/2}{2}}$ para $x_{n} = \frac{1}{2}$ 1543 Las e-uacrones paramétricas son $x = 1 - t^3$, $y = 1 - t^3$, donde $t = \frac{y}{x}$ (∞). $< t < + \infty$). La curva tiene dos ramas. Simetria respecto de la recta x + y = 0Extremos $x_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{7} \approx .89$, $y = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \approx 2.38$ $t=-\sqrt[4]{2}\approx -1.25; y_{\max}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}, \ x=\frac{3}{2}\sqrt[4]{4} \ {\rm pars} \ t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx -1.25; y_{\max}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ Puntos de inflexión $x_1 \approx 2.18, y_1 \approx -4.14 \text{ para } t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3)/5} \approx$ $\approx -1.90 \text{ } x_2 \approx 4.14, \ y_2 \approx -2.18 \text{ para } t = -1 \sqrt{\frac{1}{2}(7-3)/5}) \approx -0.53; \ \text{para}$ $t = -\sqrt[3]{2}$ la concavidad cambia de sentido. 1544 La curva consta de la recta r = x y de la rama haperbólica $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$, $y = (1+t)^{\frac{1+t}{t}}(-1 < t < +\infty)$. (4) es un punto doble Concavidad hacia arriba para $x \neq y$. Asintotas x = e

525

y=1 1545. Campo de existencia $\{x_1 \ge \ln (1 + \sqrt{2}) \approx 0.88$. Simetria respecto de los eies de coordenadas. Mímmo en la frontera | y | = 0 para x = $\pm \ln (1 + \sqrt{2})$. Concavidad hacia abajo para y > 0 y concavidad hacia arriba para y < 0 Asintotas y = x e y = -x. 1546. Campo de existencia de la fun $e_1 \circ n \cdot r > 0$, $| \varphi | \le \alpha$, donde $\alpha = \arccos \left(-\frac{a}{b}\right)$. La curva es cerrada Simetria respecto del eje polar. Máximo r=a+b para $\varphi=0$, minimo en la frontera r=0 para $\phi=\pm \alpha$ 1547 Campo de existencia $0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}$. $\frac{2\pi}{3} \le \phi \le \frac{\pi}{3}$ ≤ n 4t ≤ p ≤ 7 La función r es periodica, de periodo 3 La curva es cerrada y tiene tres pétalos iguales. Ejes de simetría $\phi = \frac{\tau}{6}$, $\phi = \frac{5\pi}{6}$ $y \phi = \frac{3\pi}{2}$ E) ongen de coordenadas $\theta(0,0)$ es un punto triple. Para $\theta \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}$ se tiene, máximo r = a para $\varphi = \frac{\pi}{6}$ y mínimo r = 0 para $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 1548. Campo de existencia de la función ' $\phi < \frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{5}{6}\pi$ el per.odo es $\frac{2\pi}{3}$ Mínimo r = a para $\phi = 0$ y $\phi = \pm \frac{2\pi}{3}$. Asíntotas $\varphi = \pm \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{7}$ y $\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$ 1549. Es una espural, para la cual el origen de coordenadas es un punto asintótico, r es monótona decreciente para φ creciente Asintota $\varphi=1.1550$ Campo de existencia $\rho \ge \frac{\sqrt{5-1}}{2} \approx 0.62$. Maximo en la frontera $\varphi = \pi$ para $r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, mínimo $\varphi = \arccos \frac{1}{r} \approx erc$ 5-30 para r=2. Asíntota $r\cos\varphi=1$ cuando $r\to+\infty$. 1551. Familia de parábolas con los vértices (1, a 1) (minimos). Los puntos de intersección con los ejes de coordenadas son (0, a) y $(1 \mp \sqrt{1 - a}, 0)$ (para $a \le 1$) Concavidad hacia arriba 1552. Una familia de hipérbolas si $a \neq 0$ y la recta y = x si a = 0 Minamos $y = 2 \mid a \mid$ para $x = \mid a \mid y$ máximos $y = -2 \mid a \mid$ para $x = -\mid a \mid (a \neq 0)$. Asintotas y = x y x = 0 1553. Una familia de chipse si $0 < a < +\infty$, una fam.ha de hipérbolas si $-\infty < a < 0$; la recta y = x si a = 0. Todas las curvas de as familias pasan por los puntos (-1, -1) y (1, 1). Para y ≥ x se tiene 1) má ximo $y = \sqrt{1 + a para}$ $x = \frac{1}{\sqrt{1 + a}}$ si a > 0, máximo $y = \sqrt{1 + a pa}$ ra $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ si $-1 \le a \le 0$, minimos en la frontera y +7 1 para $x = 4.1 \ (a \neq 0)$, 2) concavided hacia abajo. Para $y \leq x$ se tiene: 1) minimo $y = -\sqrt{1+a}$ para $x = -\frac{1}{1/1+a}$, si a > 0, mínumo $y = \sqrt{1+a}$ para $x = \frac{1}{|y'|^{1-1-\alpha}}$, si $-1 \le a \le 0$; máximos en la frontera y = 7.1 para x = 7.1, 2) concavidad bacia arriba. Asíntotas, $y = (1 + \sqrt{-a}) x e y = (1 - \sqrt{-a}) x$ $\eta a < 0$ 1554. Una familia de curvas exponenciales, si $a \neq 0$, la recta $y' = 1 + \frac{\pi}{2}$ s) a=0 Punto común de la familia (0, 1) Mínimos $y=\frac{1}{2n}(1+\ln 2a)$ para $z=\frac{1}{\pi}\ln 2a$, si a>0, y es monótona creciente si $a\leq 0$. Asíntota $y=\frac{x}{2}-1555$ Una familia de curvas que pasan por el punto 0 (0, 0) y que tienen una tangente comun con la recta y - x Maximo $y = ae^{-1} \approx 0.37$ a para x = a, si a > 0, mínimo $y = ae^{-1}$ para x = a, si a < 0 Punto de inflexión x = 2a. $y = 2ae^{-p} \approx 0.27a$ Asíntota y = 0.1558 $\frac{a^{m+n}m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}.1559. (m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^mn^n}\right)^{\frac{n}{m+n}}$ 1560. La base del sistema de logaritmos no tiene que ser superior a e " ≈ 1.445 1561. Un cuadrado de lado \sqrt{S} 1562. Los ángulos agudos del triángulo son iguales a 30° y 60°, 1563. La altura del bote $H=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ tiene que ser igual al diámetro de su base, el área de la superficie total $P = \sqrt{54 \pi V^T}$ 1564. $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + 8}}{4}$, donde 2α es el arco del segmento y 2φ es el arco que subtiende el lado del rectángulo, 1565. Los lados del rectángulo son $a\sqrt{2}$ y b = 1566 S. b > b el perametro P del rectàngulo inscrito de basex y altura y nene un máximo en la frontera para y : h si $n \le b$, el perimetro ltiene un mínimo en la frontera para y=0; si h=b, el perímetro P es constanto 1567 $b = \frac{d}{\sqrt{2}}$, $b \ge d \sqrt{\frac{2}{3}}$, 1568. Las dimensiones del paralelepipodo son' $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ y $\frac{R}{\sqrt{3}}$, 1569, $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^2$. 1570. $\pi\,R^2\,\left(1\pm\sqrt{5}
ight)pprox\,81\,$ % del área da la esfera. 1571, El volumen del cono es el doble del volumen de la esfera, 1572. $\frac{2\pi}{q\sqrt{2}}P$. 1573. Si tg $q<\frac{1}{2}$, el méxi mo del àrea de la superficie total del culmdro se alcanza para $r = \frac{R}{2(1-|\alpha|\alpha)}$. donde r es el radio de la base del cilindro. Si $\lg a > \frac{1}{2}$, entonces, para r = Rse tiene un máximo en la frontera, 1574, $p(\sqrt[3]{2}-1)$ $\sqrt{2-\frac{1}{2}}$ 1575, λ_i 3, 1576. Si $b \le \frac{a}{1-2}$, el máximo de la longitud de la caer la $MB = \frac{a^2}{c}$, donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el punto M tiene las coordenadas x e y, se alcanza para $x=\pm \frac{a^2}{a^2} \int^y a^2 - 2b^2$, $y = \frac{b^2}{a^2} - \sin b > \frac{a}{b-2}$, el máximo frontera de la longitud de la cuerda MB = 2 h se alcanza para x = 0, 3 $= h = 1577 \times \frac{a}{2 - 15}$ g 1578 El mínimo del área de la superficie se alcanza para r . h ... donde r es el radio de la base del culmoro y h es su altura, \$579, 4 = 60° 1580 El trapecio está circunstrito en la circunferencia los lados laterales son $AB = CD = a \sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 1581. $\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx \arctan 294$, donde o es el ángulo central del sector que queda 1682. $q = \arctan \frac{q}{r}$, si Access $\frac{q}{b} = \operatorname{ctr}_{ab}^{a} = \operatorname{ctr}_{ab}^{a} = \operatorname{st}_{ab}^{a} = \operatorname{$ 1584 $AM = a\left(1+\frac{3}{\sqrt{S_1}}\right)^{-1}$. 1585. La distancia del punto Imminoso al centro de la esfera grande es igual a $x = \frac{a}{\sqrt{r}}$, si $a \ge r + R \sqrt{\frac{a}{r}}$ $y = a + s_1 + R < a < r - R$ donde a es la distancia entre los centros de 125 esferas 1586 1 1587 7 2 5 5 1 1588 donde k es el coeficiente de proporcionandad 1589 arctg k 1590 S₁ ≤ 4 a e ángulo de incl.nación de la barra se determina por la fórma a $\cos a = \frac{l-1}{l-6} \frac{l}{6a} = \sin l > 4 a$ no hay posición de equil brio 1591 b = 3 b = 3 y = 3(1 - x), 1592 $a = e^{x_0}$, $b = e^{x_0}$, 1 - x $c \rightarrow c'$ (, $x_0 \rightarrow x_0^2$). 1593 a) El primer orden b) el segundo, c) el segundo 1595 a) $\sqrt{2}$, (2, 2), b) 500,000, (150, 500,000) (aproximadamente) 1596. p. 1 $\frac{2x}{ab}$ 1597 $\frac{x^2 + \sqrt{x^2 - 2}}{ab}$, donde $x = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{3 - b^2}}{ab}$ es la excentrice dad de la chose. 1598. $\frac{(e^2x^2+a^2)^2}{ab}$, donde $e = \frac{1-a^2+b^2}{a^2}$ es la excep tricidad de la hipérbola 1599, 3 d $xy_1^{\frac{1}{2}}$, 1600, $\frac{a^2}{h}$ (1 - ϵ - $\cos^2 \gamma^2$, donde ϵ es la excentricidad de la elipse.

1601. $2\sqrt{2ay}$. 1602. at, 1604. $\frac{(r^2+r^2)^2}{(r^2+2r^2-rr^2)}$ 1605. $\frac{(a^2+r^2)^2}{2a^2+r^2}$ 1606. $r\sqrt{1+m^2}$ 1607. $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$ 1608. $\frac{a^4}{3r}$ 1609. $\frac{1}{12}$, $\frac{\ln 2}{2}$ 1610. $x_0 \approx 680$ m 1611. La parábola semicúbica $27 p \eta^2 + 8 \cdot \xi - p)^3 - 1612$. La astroide $(a\xi)^{4/4} + (b\eta)^{4/2} = e^{4/4}$, dende $e^2 = a^2 - b^2$. 1613. La astroide $(\xi+\eta)^{4/2} + (\xi-\eta)^{4/2} = 2a^{4/4}$, 1614. La catenaria $\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}$. 1615. La espiral logarítimica p = mae $m(\psi-\frac{\pi}{2})$ 1616. $\xi = ma + a (\tau - \sin \tau)$, $\eta = -2a + a (1 - \cos \tau)$, donde $\tau = t - \pi$. 1617. $x_1 = -2.602$, $x_2 = 0.340$: $x_3 = 2.262$, 1618. $x_4 = -0.724$, donde $\tau = t - \pi$. 1619. $x = 2.087 = a \operatorname{ch} (19^2 35^2)$, 1620. ± 0.824 , 1621. $x_4 = 0.472$. $x_4 = 9.999$. 1622. $x_7 = 2.5662$. 1623. $x_4 = 4.730$. $x_2 = 7.853$. 1624. $x_4 = 0.56715$. 1625. $x_4 = 1.99678$. 1626. $x_1 = 4.493$, $x_2 = 7.725$, $x_3 = 10.994$. 1627. $x_4 = 2.66$.

Capítulo III

Para abreviar en las respuestas de este capítulo se ha omindo la constante aditiva arbitraria C 1628. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$. 1629, $\frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 - \frac{1}{7}x^7$. 1630. $x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4$. 631. $x - \frac{1}{x} - 2\ln x$. 1632. $a \cdot n \cdot x - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^3}$. 1633. $\frac{3}{3}x^4 / 1 + 21 / x -

1659.
$$-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$$
 1660. $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^3}$, 1661. $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

1662
$$\frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}} \right|$$
 1663, $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left(x \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$.

1664.
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln_{1} x \sqrt{3} + \sqrt{3x^{2} - 2}$$
, 1665. $-\left(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)$

1666.
$$-x \sin 5\alpha - \frac{1}{5} \cos 5x$$
. 1667. $-\frac{1}{2} \operatorname{cig} \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

1668.
$$\lg \frac{x}{2}$$
 1669. $- \operatorname{clg} \frac{x}{2}$. 1670. $- \lg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$

1673.
$$\frac{1}{2}$$
 [ch (2x + 1) + sh (2x - 1)]. 1672. 2 th $\frac{x}{2}$. 1673. - 2 cth $\frac{x}{2}$.

1874.
$$=\sqrt{1-x^2}$$
, 1675. $\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{1}{6}}$ 1676. $=\frac{1}{4}\ln(3-2x^2)$, 1677. $=\frac{1}{2(1+x^2)}$.

1674.
$$-V = x^2$$
, 1679. $\frac{1}{8V^2} \ln \left| \frac{x^4 - V^2}{x^4 + V^2} \right|$, 1680. $2 \arctan V \overline{x}$, 1681. $\cos \frac{1}{x}$.

1682.
$$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$$
 1683. $-\arcsin\left|\frac{1}{x}\right|$ 1684. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 1685. $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1686.
$$\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^2+27}$$
. 1687. $2 \operatorname{sgn} x \ln (\sqrt[3]{x}) + \sqrt{1+x}$) $(x(1+x) > 1)$

1688.
$$2 \arcsin \sqrt{x}$$
, 1689. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, 1690. $\ln (2 + e^x)$. 1691. $\arctan e^x$.

1698.
$$2 \arctan \sqrt{1 + e^{-ix}}$$
. 1693. $\frac{1}{3} \ln^4 x$. 1694. $\ln |\ln (\ln x)|$. 1695. $\frac{1}{5} \sin^4 x$.

1700,
$$\frac{V \cos x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$
 $(a^2 \neq b^2)$, 1700.1, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln[\sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos 2x}]$.

1700.2.
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin (\sqrt{2} \sin x)$$
. 1700.3. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2} \cot x + \sqrt{\cot 2x})$.

1701.
$$-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{cig}^2 x}$$
. 1702. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{aretg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[4]{2}}\right)$. 1703. $\operatorname{in}\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$

1704.
$$\ln \left| \lg \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$
. 1705. $\ln \left| \lg \left(\frac{\pi}{2} \right) \right|$. 1706. 2 arctg e^x.

1704. If
$$|x| \le (2^{-1} + 1)$$
 $|x| \le (2^{-1} + 1)$ $|x| = (2^{-1} + 1)$

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1710}, \quad \frac{1}{\arcsin x}, \quad 1711. \quad \frac{2}{3} \ln^{\frac{x}{3}} (x + 1) \cdot \frac{1}{1 + x^{2}}, \quad 1712 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} \arccos \frac{x^{2} - 1}{x \cdot 1 \cdot 2}.$$

$$\mathfrak{t}_{113},\ \frac{1}{2\,\,\mathbb{F}^{\,\overline{2}}}\,\ln\frac{x^{2}\,+\,x\,\,\sqrt{\,2}\,\,+\,1}{x^{2}\,+\,x\,\,\sqrt{\,2}\,\,+\,1},\ \ 1714,\ \,-\,\frac{1}{15\,(x^{2}\,+\,1)^{3}}\,.$$

1715
$$\frac{2}{n+2} \ln \left(x^{\frac{n+2}{4}} + \sqrt{1+x^{n+2}} \right)$$
 so $n = -2$, $\frac{1}{1/2} \ln (x)$, so $n = -2$.

1718. $\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} = 1717.$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\sqrt{-\frac{2}{3}} \sin x \right).$ 1718. $\frac{1}{2} \arctan (\log^2 x).$ 1719. $\frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right|$. 1720. $2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$. 1721. $\frac{4}{3}x^9 - \frac{1}{3}$ $-\frac{12}{5}x^3+\frac{9}{7}x^4-\frac{1727.1}{11}-\frac{(1-x)^{11}}{11}+\frac{(1-x)^{12}}{12}$, 1722. $-x-2\ln \frac{1}{1}-x$ 723. $\frac{1}{2}(1-x)^2 + \ln|1+x|$. 1724. $9x = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - 27\ln|3+x|$. 1725. $x + \ln (1 + x^2)$. 1726. $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \ln \left| \frac{\sqrt[3]{2} + x}{\sqrt[3]{2} - x} \right| + 2 \ln (2 - x^2) - x$. 1727 $\frac{1}{99(1-x)^{20}} - \frac{1}{49(1-x)^{20}} + \frac{1}{97(1-x)^{20}}$, 1728. $\frac{x^4}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^8}{3} - \frac{x^8}{2} + \frac{x^8}{3} - \frac$ $+x-\ln (x+1)$, 1729, $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{3}}-(x-1)^{\frac{3}{6}}\right]$, 1730, $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{6}}$ 1731. $-\frac{1+2x}{10}, (1-3x)^{\frac{3}{3}}$. 1732. $\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{3}{3}} = \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{3}{3}}$. 1733. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right|$ 1734. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$ 1735 $\arctan x = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{2}$ 1736. $\frac{1}{101} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \frac{y'}{2}}{x + \frac{y'}{2}} \right| = \frac{\epsilon}{5 \sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{1 - \frac{3}{3}}$ 1737 In $\left| \frac{x + 3}{(x + \frac{y}{2})^2} \right|$ 1788. $\frac{1}{2} : -\frac{x^2+1}{x^2+2}$ 1739 $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+b)(x+b)} + \frac{2}{(a-b)^3} \cdot \ln\left|\frac{x+b}{x+b}\right|$. 1740. $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + \overline{b^2}} \frac{1}{b} \operatorname{arrig} \frac{x}{b} = \frac{1}{a} \operatorname{arcig} \frac{c}{b}$, $(a \neq b)$, 1741. $\frac{x}{2} = \frac{1}{4} \sin 2x$ $1742 \cdot \frac{x}{2} = -\frac{1}{4} \sin 2x + 1743 + \frac{x}{2} \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin (2x + \alpha) + 1744 + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x.$ 1745. $3 \sin \frac{x}{6} + \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6}$ 1746. $-\frac{1}{10} \cos \left(5x + \frac{7}{12} + \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{57}{2}\right)\right)$. 1747 $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$ 1748, $\sin x - \frac{1}{3}\sin x$ 1749 $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x$ $+\frac{1}{32}\sin 4x$ 1750. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$ 175t. $-x - \cos x$ 1762. $\frac{1}{2} \lg^2 x + \ln \cos x$, 1763. $-\frac{3}{16} \cos 2x - \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x + \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{1$ $+\frac{3}{126}\cos 8x + \frac{1}{192}\cos 12x$ 1754 tg x ctg x 1755 $-\frac{1}{\sin x}$ t $+ \ln \left| \lg \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right|$ 1756. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln \lg x$. 1757. $\ln \left| \sin x \right| - \frac{1}{2} \sin^2 x$ 1758. $\lg x + \frac{1}{3} \lg^3 x$. 1759 $x - \ln(1 + e^x)$. 1760. $x + 2 \arcsin e^x$. 1761. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$. 1762. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$. 1763. $\frac{5}{3} \sin^3 x$ 1764. $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x$ $+\frac{1}{8} \sinh 4x$. 1766. $-(\sinh x + \cosh x)$. 1766. $-\frac{3}{140} (9 + 12x + 14x^2) (1 - x)^{-1}$.

1767 $-\frac{1+55x^3}{6500}(1-5x^3)^{11}$, 1768, $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^3)\sqrt{2}$, 769. $-\frac{1}{15}(8+4x^3+3x^4)\sqrt{1-x^4}$. 1779. $-\frac{5+25x^3}{1005}(2-5x^4)$ 177) $\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{7}\sin^2 x + \frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^2 x}$, 1772, $-\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\ln(1 + \cos^4 x)$ 1773. $\frac{1}{3} \log^3 x + \frac{1}{5} \log^5 x$. 1774. $\frac{2}{3} (-2 + \ln x) \sqrt{1 + \ln x}$. 1775. $-x - 2e^{-x}$. $+2\ln{(1+e^{x/x})}$, 1776, $x=2\ln{(1+\sqrt{1+e^x})}$, 1777, $(and_{10},\sqrt{x})^3$, 1778, $\frac{x}{1+e^{x/x}}$ 1779 $\frac{x}{9}$ } $\sqrt[3]{x^2 + 2} + 10^{-3} = \sqrt{x^2 + 2}$ 1780. $\frac{x}{9} \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{9} \arctan \frac{x}{9}$ 1781 $\frac{x}{a+1} = \frac{x}{a^3-x^2}$, 1782. $-\sqrt{a^3-x^3}+a \arcsin \frac{x}{a}$ 1783. $-\frac{3a+x}{2} \times x$ $\times \sqrt{x(2a-x)} + 3a^{3} \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}}$, 1784, 2 arcsin $\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$, 1785, $\frac{2x-(a+b)}{4}$ \angle $\times \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. 1786. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} \div$ $+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}).$ 1787, $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}).$ 1788. $\sqrt{x^2 - a^2} = 2a \text{ in } (\sqrt{x - a} + \sqrt{x + a})$ Si x > a: $-\sqrt{x^2 - a^2} = -\sqrt{x^2 - a^2}$ $+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$, if x<-a, 1789, $2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})$ st x+a>0 y x+b>0, $-2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$ st x+a<0y + b < 0, 1790. $\frac{2x + a + b}{4} \sqrt{(x + a)} (x + b) - \frac{b}{4} \frac{a)^2}{n} (1 + x + a + b)$ $+\sqrt{x+b}$), si x+a>0 x x + b>0, 1781, x (ln x - 1) 1792 $\frac{x^{n-1}}{n-1}$ < $\times \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) (n \neq -1), \quad 1793, \quad -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2), \quad 1794, \quad \frac{2}{3} x^* < 1794, \quad \frac{2}{3} x^* < 1794$ $\times \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right)$. 1795, $-(x+1)e^{-x}$. 1796. $-\frac{e^{-xx}}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$ 1797 $=\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$ 1798 $x \le n x + \cos x$ 1799. $=\frac{2x^4}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$ 1800. $x \cosh x + \sinh x$ 1801. $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right) \sinh 3x - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{27}\right) \cosh 3x$ 1802. $x \arcsin x = -\frac{x^3}{3} + \frac{2}{27} \cosh 3x$ $\frac{1}{2} (x_1 + x^2) = 1803. \quad \text{where } x + \sqrt{1 - x^2} = 1804. \quad -\frac{x}{2} + \frac{1 + x^2}{2} \text{ and } x$ 1805. $=\frac{2+x^2}{9}Y'_1 = x^2 + \frac{x^2}{3}\arccos x$ 1806. $=\frac{\arccos x}{x} = \exp\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ 1807. $x \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) = \sqrt{1 + x^2}$ 1808. $x = \frac{1 - x^2}{2} \ln \frac{1 + x}{1 + x}$ 1809. $= \sqrt{x} + x$ $+(1 \pm x) \arcsin (1 + x)$ 1810. $\cot (2 + x) \cot (2 + x) \arcsin (x)$ 1811 $\frac{1}{3}(x^3 + 1) e^{x^3}$. 1812. $\theta (\arcsin x)^3 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$. 1813. $\frac{1+x^2}{2} (\arctan x)^3 - \frac{1}{2} (\arctan x)^3 + \frac{1}{2} (-1)^3 + \frac{1}{2} (-1)^$ = $x \operatorname{srctg}(x + \frac{1}{2}) \ln(1 + x^2)$, 1814, $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - x^2 + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^2$ 1815. $\sqrt{1+x^2}$ in $(x+\sqrt{1+x^2}) = x$. 1816. $-\frac{x}{2(x+x^2)} + \frac{1}{2}$ arcig x 1817. $\frac{x}{2a^{2}(a^{2}+x^{2})} + \frac{1}{2} \frac{1}{2a^{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} (a \neq 0)$, 1818. $\frac{x}{2} = V(a + x^{2} + x^{2})$ $\pm \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{(a)}$ $(a \neq 0)$. 1819. $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} \pm \frac{a}{2} = x, x \pm \sqrt{x^2 + a}$. 1829. $\frac{x(2x^3+a^2)}{6}\sqrt{a^4+x^4} - \frac{a^4}{6}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}).$ 1821 $\frac{x^2}{4}$ $=\frac{x}{4}\sin 2x = \frac{\cos 2x}{8}$ 1822 $2(\sqrt[3]{x}-1)\sin^{3}(x)$ 1923, $2(6-x)\sqrt[3]{x}\cos \sqrt[3]{x} \rightarrow$ $-6(2-x)\sin\sqrt{x}.$ 3824. $-\frac{(1-x)e^{xx-1/2x}}{2(1+x)^2}$ 1825. $\frac{(1+x)e^{2x}e^{x}}{2(1+x)^2}$ 1626 $\frac{x}{2} [\sin (\ln x) + \cos (\ln x)]$ 1627. $\frac{x}{2} [\sin (\ln x) + \cos (\ln x)]$ 1828. $\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2}e^{ax}$ 1829. $\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax}$ 1830. $\frac{e^{2x}}{6}$ (2 - $\sin 2x$ - $-\cos 2x) \qquad 1831 \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x - e^{x}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}e^{x^{2}}, \quad 1832. -x +$ $\pm \frac{1}{2} \ln - \pm e^{xx} - e^{-x} \operatorname{arcrtg}(e^{x}).$ 1833. $- \{x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln (e \sin x) \}$. 1834. $x \log x + \ln |\cos x|$ 1836. $\frac{e^x}{x+1}$ 1836. $\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arelig} \left(\times \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \cdot \operatorname{ecns} ab > 0;$ $\frac{\operatorname{sgr} a}{2|V-ab|} \left[\frac{|V_1a| + |V|b|}{|A-a|b|} \right], \quad \text{c.in} \quad ab < 0.$ 1837 $\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arcig} \frac{2a+1}{|V|^7}$ $+\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} g \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ 1541. $\frac{1}{2} \ln (x^2-2x \cos \alpha+1) + \operatorname{cig} \alpha \cdot \operatorname{arclg} \frac{x-\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $(\alpha \neq k\pi, k \text{ es entero}).$ 1842. $\frac{1}{4} \ln(x^4 - x^2 + 2) + \frac{1}{2\sqrt{7}} \arcsin \frac{2x^2 - 1}{1/7}$ 1843. $\frac{1}{9} \ln \left\{ \left[x^3 + \frac{1}{4} , (x^3 + 2)^2 \right], \right.$ 1844. $\left. \frac{1}{2} \ln \left[\frac{3 \sin x + 5 \cos x}{\sin x + \cos x} \right] \right.$ 1845. $\arcsin \left(\frac{\log \frac{x}{2} + 1}{2}\right)$. 1846. $\frac{1}{1/b} \ln(x \sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2})$. $\sin b > 0$. $\int_{1}^{\infty} \operatorname{arcstr}\left(x \sqrt{-\frac{b}{a}}\right), \quad \text{si} \quad a > 0 \quad y \quad b < 0. \quad 1847. \text{ arcsir} \int_{1}^{a} \int_{1}^{a} \left(x \sqrt{-\frac{b}{a}}\right) dx$

1848. $\ln \left| z + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right|$, 1849. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(z - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} z + 1} \right)$ 1851. $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. $+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. 1853 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{1/2}}$ **1853** 1. arcsin $\frac{2 \sin x - 1}{2}$, 1854 $\frac{1}{2} \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1} + \frac{1}{2} = x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}$ 1555. $\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4+\frac{3}{4}} \arcsin \frac{2x^2-1}{1.5}$ 1866. $-\ln \left|\frac{x+2+2}{x}\right|^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1}$ 1857. $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{1x, \sqrt{5}} \qquad \left(\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{\sqrt{5}}{2} \right).$ 1858. $\frac{-1}{1/2} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x} \right|$. 1859. $\arcsin \frac{x-2}{x-1/\sqrt{2}} (|x| > \sqrt{2})$. 1860. $\frac{1}{5} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}{x + 2} + \frac{1}{-5\sqrt{5}} \arcsin \frac{x + 7}{1x - 2\sqrt{5}} (x + 1) > \sqrt{6}$. 1861 $\frac{2x-1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{x-x^2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{2x-x}{3}$ $x \sqrt[3]{2+x+x^2} + \frac{7}{8} \ln \frac{1}{2} + x + \sqrt[3]{2+x+x^2}$ 1863. $\frac{x^2-1}{4} + x^4 + 2x^2 + 1$ $\frac{1}{5} \ln x^2 + x + 1 \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1864 - \sqrt{1 + x + x^2} + \frac{1}{2} \arctan \frac{1 - 2x}{1.5} - \frac{1}{5}$ $-\ln \left| \frac{2 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x + x^2}{r} \right| \quad \left(\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{5}{2} \right),$ 1865. $\ln \left| \frac{x^2 - 1 + 1}{x} \right|^{\frac{2^2 - 1}{2}}$ 1866. $\ln \left| x \right|^2 = \ln \left| x \right|^5$. 1867. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)!}{(x+1)!(x+3)^2} \right|$ 1868. $\frac{x^6}{9} - \frac{x^6}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{1}{5} = \frac{x^3}{5}$ $-\frac{21x^4}{4} + \frac{43x^9}{3} - \frac{85x^2}{2} + 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right|.$ 1869. $x + \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{1}{6} \ln |x|$ $=\frac{9}{5}$ n x-2 $=\frac{28}{3}$ ln x 3.. 1870. $x \pm \frac{1}{3}$ arctg $x = \frac{8}{3}$ arctg $\frac{x}{2}$ 1871 $=\frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{-1} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right|,$ 1872 $\frac{x}{x+4} + \frac{1}{2} \cdot n \cdot x^2 - 1$ $1873 - \frac{5x - 6}{x^2 - 3x + 2} + 4 \ln \left| \frac{x - 1}{x - 2} \right| \qquad 1874 - \frac{9x^3 + 50x + 63}{4(x + 2)(x + 3)^2} + \frac{1}{8} \times$ $\times \ln \left[\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right] = \frac{3x^3+3x-2}{8(x-1)(x+1)^3} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$, 1876, and $\frac{x+1}{x+1} = \frac{3x^3+3x-2}{16} = \frac{3x^3+3x-2}{16$ $+\frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}$ 1877, $\frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$, 1878. $-\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg} (x-2)$ 1879 $-\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x + 2} - \frac{8}{25} \operatorname{aretg}(x+1)$, 1880. $\ln \left| \frac{\tau}{1+x} \right| -$

 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2x}{\sqrt{3}}.$ 1881. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^n}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}}.$ 1882. $\frac{1}{5} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1/3} \operatorname{aretg} \frac{2x+1}{\sqrt{2}}$, 1883. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ 1884 $\frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$ 1886 $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2$ $+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}. \quad 1886. \quad \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan x^3.$ $1887 - \frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{x+x^2} + \frac{1}{2} \arctan \frac{2x-1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$ $1888 \cdot \frac{1}{6} \ln \frac{(x-x)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$ $1889 \cdot \frac{2}{5} \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}} + \frac{8}{5} \times \frac{2}{5} \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2+x+2} + \frac{2}{5} \ln \frac{x^2+2x+2}$ $\times \arctan(x+1) = \frac{2}{5}\arctan(2x+1)$ 1890. a+2b+3c=0. 1891 $\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x-1)^2}$ $+\frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ 1892. $\frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^4}{x^2 + 1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1/3}$ 1893. $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + \frac{3}{8} \arctan g \times -1894 + \frac{1}{x^2+2x+2} + \arctan g (x+1), 1895, \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{1}{x^2+2x+2} +$ $+\frac{3}{1812} \ln \frac{x^2+x}{x^2+x} + \frac{2+1}{2-1} - \frac{3}{812} \arctan \left(\frac{x}{x^2+x} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{3$ $\times n \frac{(x-1)^2}{x^2-x} + \frac{8}{313} \arctan \left(\frac{2x+1}{33} \right) = 1897 \frac{7x^3-11x}{32(x^4-1)^3} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| =$ $-\frac{2}{54} \arctan x \qquad 1898 \quad \frac{x^3 + 2x}{6(x^4 + x^2 - 1)} \qquad 1899 \quad -\frac{8x^4 + 8x^2 + 4x}{28(x^3 + x + 1)^2}$ 1900 $\frac{x}{x^3 + x + 1}$ (toda la integral). 1901. $\frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3 \cdot 3} \times$ $\times \sec^{-1}g \frac{2x-1}{1-3}$ 1902, $\alpha \gamma + \varepsilon \alpha = 2b\beta$, 1903, $-\frac{1}{96(x-1)^{16}} \frac{3}{97(x-1)^{16}}$ $-\frac{3}{98(x-1)^{10}} - \frac{3}{99(x-1)^{10}}, \ 1904, \ \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2-1} \right| - \frac{1}{4} \arctan x^4, \ 1905, \ \frac{1}{4\sqrt{5}} \times$ $\times \operatorname{arctg} \frac{x^4}{13}$ 1906. $\frac{1}{12} \ln \frac{(x^2 + x_1^2)}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2 + 1}{13}$ 1907 $\frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4 + 2} - \ln \frac{x^6}{x^4 + 1}$ 1908. $\frac{1}{10} \frac{x^5}{x^{10} - 10} + \frac{1}{2 |\mathbf{1}|} \ln \left(\frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + 1} \right)$ 1909 $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 2)^4}$ 1910. $\frac{x^5 + 2}{10(x^{10} + 2x^5 + 2)} = \frac{1}{10} \arcsin(x^4 - 1)$ 1911. $\frac{1}{n}(x^n + \ln x^n + 1)$ $(n \neq 0)$. 1912. $\frac{1}{2n}\left(\arctan x^n + \frac{x^n}{x^{2n} + 1}\right)$ $(n \neq 0)$ 1913. $\frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10} + 2}$ 1914. $\frac{1}{10(x^{10} + 1)} + \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10} + 1}$ 1915. $\frac{1}{7} \ln \frac{1x^7}{(1-x^7)^3}$ 1916. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x(x^4 - 5)}{x^5 - 5x + 1} \right|$. 1917. $\frac{1}{1 \cdot 3} \operatorname{aretg} \frac{x^2 - 1}{x \cdot 1' \cdot 3}$. 1918 $\frac{1}{1 \cdot 3} \times$ 541

1463, $\frac{1}{6\sqrt{3}} \ln \frac{1}{2} \frac{2(2x^2 - 2x + 5) - (x + 1)}{2(2x^2 - 2x + 5) + (x + 1)}$ 1964. $\frac{1}{1+x-4x} = \frac{1}{1+x+4x} = \frac{1}{1+x+4x} + \frac{1}{1+x+4x} = \frac{1}{1+x+4x}$ $+\frac{1+x+\frac{1}{2}x}{1+x+\frac{1}{2}x}\frac{1}{1+x+\frac{1}{2}x}\frac{1}{1+x+\frac{1}{2}$ $\frac{1 + x}{\sqrt{1 + x + 1}} = \frac{1 + x + 1}{\sqrt{1 + x + 2}} = \frac{1962}{\sqrt{1 + x + 2}} = \frac{1962}{\sqrt{1 + x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{1 +$ $-\frac{x+x_{1}}{x}\int_{\mathbb{R}^{2}}\mathbb{R}^{2}dx = -(2+x_{1})^{2}(x+x_{1}) = 0.0001 \qquad \left(\frac{2}{x}\int_{\mathbb{R}^{2}}x+\frac{x_{2}+1}{x+1}\int_{\mathbb{R}^{2}}x-\frac{1}{x_{2}+1}\int_{\mathbb{R}^{2}}x-\frac$ $+ \frac{x}{1 + 1 \sqrt{2}} \sqrt{\frac{x}{1 + 1}} $-5 \sec 2\pi \frac{1}{(x < 1)} (x < 1)$ 0 $x > 3) <math>\frac{1}{1 - x_1} \sec 2\pi \frac{1}{(x < 1)} \sec 2\pi \frac{1}{(x < 1)} = \frac{1}{1 - x_1} \sec 2\pi \frac{1}{(x < 1)} = \frac{1}{1 - x_1} = \frac{1}{1 -$ $-\frac{1-x}{1-x} - 28755 \frac{x}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2}{1-x} - \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + x^2 + 2}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{x^2 + x^2 + x$ $\times \frac{x+1}{2} = 2861 \left[\frac{1+x+x+1}{1+x} \sqrt{2+x-1} \right] n \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{1+x+x} \sqrt{1+x} + \frac{1}{2} + x \right) d + \frac{1}{2} \right]$ $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x+x} + \frac{1}$ $+3b^{2}a, (a \neq 6) \qquad 1952, \frac{1}{2} + 2x = x^{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + 2x - x^{2}}}{1 - x} \right|,$ $+z^{5}as=(x\delta d+y\delta a) \text{ at } as so, \ s=->x \text{ abond } a + b\delta a) = \frac{1}{1+x^{1}} \text{ arising } \frac{\delta}{2} - \frac{1}{1+x^{1}} \text{$ $-\frac{x^2+x_*}{(1+x)^8}\sqrt{\frac{5+x^6}{(1+x)^8}} \cdot \frac{6887}{(1+x)^8} \cdot \frac{1+\frac{x^6+x_*}{x^2+x_*}\sqrt{(1+x)}}{(1+x)^8} \cdot \frac{17}{(1+x)^8} \cdot \frac{17}{(1+x)^8}$ $-1 + x\bar{x} + x\bar{x} \sqrt{x(1-x)} \frac{c - x\bar{c}}{1/2} \cdot 2481 \cdot (1-x)\sqrt{1-x\bar{x}} \sqrt{1+x\bar{x}} \sqrt{1+x\bar{c}} \cdot 3961 \cdot (1+x\bar{x}\sqrt{1+1}) \ln{1-x\bar{c}} + (1+x\bar{c}+x)\sqrt{1+x\bar{c}} \cdot (1+x\bar{c}+x) (1$ +3.) Vx++4x+3-66 21x+2+Vx+43+ 1942 - 1947 - 14x+3+ (16+ $+\frac{\pi}{6} - \frac{\pi^{4}x}{6} - \frac{\pi^{4}x}{16} - \frac{\pi^{4}x}{16} - \frac{\pi^{4}x}{16} - \frac{\pi^{4}x}{16} + \frac{\pi^{4}x}{16} - \frac{$ 1944. $\left(\frac{63}{255}x - \frac{21}{128}x^2 + \frac{21}{160}x^2 - \frac{9}{25}x^2 + \frac{10}{10}\right)$ $\sqrt{1+x^2} - \frac{63}{255}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. $-\frac{11}{4} \arctan \frac{1-2x}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{19+5x+2x^{\frac{2}{3}}}{8} - \frac{19+5x+2x^{\frac{2}{3}}}{8} - \frac{19+5x+2x^{\frac{2}{3}}}{8} - \frac{11}{8} \arctan \frac{1-x}{8} - \frac{11}{8} - \frac{1$ $-\frac{2x-x+1}{5}\sqrt{\frac{2x-1}{4}} \int_{0}^{2x} \frac{1+2x}{4} \int_{0}^{2x} \frac{1-2x}{4} \int_{0}^{2x} \frac{1-$

+1, $\frac{x}{4} + \frac{x}{4} $\left(\frac{5}{5}+3+7\right)^{2}+3+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2x+x+1}\right)^{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2x+x+1}\sqrt{\frac{2p-2}{p}}=1500$ $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}$ $\frac{1}{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{\alpha}} = 1 \text{ sond} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ $+\frac{1}{\sqrt{5}}$ = 8881 $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ $+\frac{1}{\sqrt{5}}$ $+\frac{1}{\sqrt{5}}$ = 8881 $+\frac{1}{\sqrt{5}}$ $+\frac{1}{\sqrt{5}}$ $+\frac{7}{1-\frac{1}{2}x}\frac{7}{1}x - \frac{7}{1}x = \frac{x}{1}$ 1861 $\frac{x}{7}$ 1 $\frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}$ 4x V + 0 m 2 - x V 2, 5521 \\ \frac{1 \frac{1 - 45}{\pi_0} \text{200} - x}{\pi_0 \frac{1 - 45}{\pi_0 \frac $+\sqrt{x+r}\frac{1-4\theta}{2}z_{-r}x_{r}^{r}-1$) $a_{r}^{r}\left(\frac{4r-r}{2}+\frac{1}{2}\right)$ sains'anou sainaia, laon nos , & y tobstrumente deb sur as ant 18 + bimonifoq nu sa % abnob . [. 18 + . 18 + . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 | . 18 $= (x) \frac{1}{2} \frac{1}{2$ shoot $\{1^{1/n}|\hat{\xi} - \frac{1}{\xi} - 1\xi + --\}_{\xi_{2}^{n}}^{-1} = h^{\frac{n-n+m-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-n+m}} \frac{1}{t^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n-n}} \frac{1}{t^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n-n+m}} \frac{1}{t^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n-n}} \frac{1}$ $\frac{1+x^2}{4} \text{ Stone } \frac{x}{4} + \frac{1+x^2}{(1+x+4x)^2} + \frac{1+x^2}{(1+x+4x)^2} = x^2 + 4q + 4q$ $1823. \ \, I_{n} = \frac{2n + 3}{n} + \frac{2n}{n} + \frac{2$

 $-\frac{1}{3}$ arctg $\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$. 1966, $\frac{3}{2(2x+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^4}{(2x+1)^2}$, dende z=x+ $+\sqrt{x^2+x+1}$, 1967. $\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - 2 \sec z$, donde $z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$ 1968. $\frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} \left[(z-1)^n + (z-1)^{-n} \right] + \left[(z-1)^n - (z-1)^{-n} \right] + \left[(z-1)^n + (z-1)^{-n} \right] \right\} + \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} \left[(z-1)^n + (z-1)^{-n} \right] + \left[(z-1)^n - (z-1)^{-n} \right] \right\} + \frac{1}{8} \left[(z-1)^n + (z-1)^{-n} \right] + \frac{1}{8} \left[(z-1)^n + (z-1)^n + (z-1)^{-n} \right] + \frac{1}{8} \left[(z-1)^n + (z-1)^n + (z-1)^{-n} \right] + \frac{1}{8} \left[(z-1)^n + $+\frac{1}{2}\ln|z-1|$, donde $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$, 1868. $-\frac{5}{18(x+1)}-\frac{1}{6(x+1)^2}+$ $+ \, \frac{3}{4} \ln |z-1| - \frac{16}{27} \ln |z-2| - \frac{17}{108} \ln |z+1|, \quad \text{donds} \quad z = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + 1} \, .$ 1970. $\frac{2(3-4z)}{5(1-2-z^3)} + \frac{2}{5(1-z)} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z} \right|$, donde $z = -z + \sqrt{z(1+z)}$, 1971. $\frac{z}{4} \times 1$ $\times (\sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{x^{2}+1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^{2}+1}}{x+\sqrt{x^{2}+1}}\right|$, 1972, $\frac{1}{3}\sqrt{x^{2}}-\frac{1}{3\sqrt{12}}\times$ $\times \left(\ln \frac{\epsilon \sqrt{3} + \sqrt[4]{12z^4} + 1}{\epsilon \sqrt{3} - \frac{\epsilon}{2}\sqrt{12z^4} + 1} - 2 \operatorname{arclg} \left(\frac{\sqrt[4]{12z^4}}{\epsilon \sqrt{3} - 1}\right), \operatorname{donde} \right) \approx \frac{1 + x}{1 - x} \cdot 1973, \sqrt{1 + x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2$ $-\sqrt{1-x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x. \quad \text{1974.} \quad \sqrt{1+x+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2)\sqrt{1+x+x^2}}.$ 1975. $\frac{2}{3}((x+1)^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{4}{3}})-\frac{2}{5}((x+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}),$ 1976. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}.$ 1977. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 1} \right|$, 1978. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 \sqrt{2}} (|x_1| > \sqrt{\sqrt{2} - 1})$. 1979. $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$. 1981. $\frac{1}{3} \sqrt{(x+x^2)^4} - \frac{1+2x}{8} \times$ $\times \sqrt{x+x^2} + \frac{1}{8} \ln (\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) \le x > 0.$ 1982. $\frac{5}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{6}} + 18x^{\frac{1}{6}} +$ + $\frac{3x^{\frac{3}{4}}}{1}$ - 21 arctg $x^{\frac{1}{4}}$ 1983. $\frac{3}{5}z^{\frac{3}{4}}$ - 22¹ + 3z, donde $z = \sqrt{1+\sqrt[3]{z^{\frac{3}{4}}}}$. 1984. $-z + \frac{2}{3}z^{2} - \frac{z^{4}}{5}$, donde $z = \sqrt{1 - z^{2}}$, 1985. $\frac{1}{6} \ln \frac{z^{2} + z + 1}{z^{2} - z^{2}} - \frac{1}{6} \ln \frac{z^{2} + z + 1}{z^{2} - z^{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arctg $\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, donde $z = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x}$. 1988. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \frac{1}{2} \arctan z$. donde $z = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \cdot 1987 \cdot \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^4+z+1}{z^2-z+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{z^4-1}{z\sqrt{3}}, donde$ $z = \sqrt[6]{1+x^4}$, 1988, $\frac{5}{4}z^4 - \frac{5}{9}z^6$, donde $z = \sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}$, 1989, $\frac{3z}{2(z^4+1)}$

 $-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arclg} \frac{2z}{\sqrt{3}}, \operatorname{donde} z = \frac{\sqrt[3]{2x-x^2}}{z} + 1990, m = \frac{2}{z}, \operatorname{donde}$ $k = \pm 1, \pm 2$... 1991, $\sin x - \frac{2}{3} \sin^2 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$. 1992. $\frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin$ $+\frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^2 2x$ 1993. $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x$ $\frac{1}{.8}\sin^2 2x$. 1994. $\frac{x}{16} = \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^2 2x}{48}$, 1995. $\frac{\sin^6 x}{5} = \frac{2 \sin^6 x}{7} + \frac{\sin^6 x}{9}$ 1996. $-\frac{\cos 2x}{64} = \frac{\cos 2x}{64}$ 1997. $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$ 1999. $-\frac{3}{2}\cos x - \frac{\cos^5 x}{2\sin^3 x} - \frac{1}{\cos^5 x}$ $+\frac{\cos^4 2x}{96} - \frac{\cos^3 2x}{320}$ $= \frac{3}{2} \ln |\lg \frac{x}{2}| = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln |\lg \frac{x}{2}| = \frac{\sin x}{2 \cos x} + \frac{1}{2} \ln |\lg \frac{x}{2}| = \frac{\sin x}{2 \cos x} + \frac{1}{2} \ln |\lg \frac{x}{2}| = $+\frac{1}{2}\left|\arg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 2001. $-3 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^{2} 2x$. 2002. $\frac{\operatorname{tg}^{4} x}{4} + \frac{3\operatorname{tg}^{2} x}{2}$. $\frac{\cos^2 x}{2} + 3 \ln \log x_1 = 2003. \quad \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \sin \log \frac{x}{2} = 2004. \quad \frac{e^4 x}{4} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos^3 x}$ $-\frac{e^2x}{2} - \ln |\cos x|_1^2 = 2006 - x - \frac{e^2x}{5} - \frac{e^2g^2x}{3} - e^2gx = 2006.$ 2007. $-2\sqrt{\operatorname{cig} x} + \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{ig}^{*} x}$. 2008. $\frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} + O^{3} (\frac{1+t^{3}}{1-t^{3}}) = -\frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} + O^{3} (\frac{1+t^{3}}{1-t^{3}}) = -\frac{$ $=\frac{1}{2} \operatorname{aretg} \frac{1-t^2}{t+3}$, donde $t=\frac{3}{2} \operatorname{set} \hat{x}$. 2009. $\frac{1}{2^2+3} \operatorname{to} \frac{x^2+2\sqrt{2}+1}{x^2+3\sqrt{2}+1}$. $= \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{z \sqrt{2}}{z^2 - 1}, \ z \neq 1 \quad \overline{g} \times 2010 \quad \frac{1}{5} = \frac{z^2 - 10^2}{z^3 - 1^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2z^2 - 1}{1}.$ dende z = $\sqrt[3]{\lg x}$, 2011 $I_n = \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n}{n} I_{n+1} K_n = \frac{\sin x \cdot \sin^{n-1} x}{n}$ $\pm \frac{n-1}{6} K_{n-1}$, $r_1 = -\frac{1}{6} \cos x \sin^4 x - \frac{5}{24} \cos x \sin^4 x - \frac{5}{16} \cos x \sin^4 x + \frac{5}{16} x$. $K_4 = \frac{1}{8} \sin x \cos^2 x + \frac{7}{48} \sin x \cos^2 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^2 x + \frac{35}{198} \sin x \cos x + \frac{35}{12} x$ $2012, I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-1}, \ K_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos x^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}K_n \ ...$ $I_{s} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^3 x} + \frac{3}{8}\ln_1 \left[\frac{x}{2} \right], \ K_s = \frac{\sin x}{6\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{16\cos^3 x} + \frac{5\sin x}{16\cos$ $+\frac{5}{16} \ln \lg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$. 2013. $-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x$. 2014. $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} $+\frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24}$. 2015. $\frac{3}{2}\cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10}\cos \frac{8x}{6} - \frac{9}{14}\cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22}\cos \frac{11x}{6}$ 2016. $-\frac{1}{9}\cos(a-b)\cos x - \frac{1}{4}\cos(x+a+b) + \frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$ 2017. $\frac{\lambda}{4}$ + $+\frac{\sin 2ax}{6a}+\frac{\sin 2bx}{6b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a+b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}. \quad 2018. \quad -\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 2$ $+\frac{3}{64}\cos 4x + \frac{1}{148}\cos 6x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{192}\cos 12x$ 2019. Sin (a ---) X

 $\times \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right|$, si $\sin(a-b) \neq 2000$, $\frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right|$ $\cos(a-b) \neq 2$, 2021. $\frac{2}{\sin(a-b)} = \left| \frac{\cos(a+b)}{\cos(a+a)} \right|$, si $\sin(a-b) \neq 2$. 2022. $\frac{1}{\cos x + a} = \frac{\sin \frac{x}{x}}{\cos x + a} = (\cos a \neq 0). \quad 2023. \quad \frac{\cos \frac{x}{x}}{\sin a} = \frac{\cos \frac{x}{x}}{\cos \frac{x}{x} + a} = (\sin a \neq 1).$ 2024. $-x + \operatorname{cig} x \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\sqrt{5}(x + x)} \right| (\sin x \neq 0)$. 2026. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Tig} \frac{x}{2}(\frac{x}{2})}{\sqrt{5}}$. 2028. $\frac{1}{6} = \frac{(1 - c_5 x + 2 + c_5 x)^2}{1 + 3 + 3 + 3} = 2027 = \frac{1}{5} + 2 s n x + c_5 x) + \frac{4}{3 \sqrt{3}} < \frac{1}{3}$ $\times \ln \left| \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \right| = 202 \text{R} \cdot \text{a} \left(\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{x}{1 + x^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right), \right) \right)$ $0 < \varepsilon < 1$ b) $\frac{1}{1/\varepsilon^2 - 1} \ln \frac{\varepsilon + \cos \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \sin \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varepsilon}$ si $\varepsilon > 1.2029. \varepsilon - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$ $\times \arctan(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2$ $ab \neq 6$), donde $z = \lg x$, 2032. $\frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2 \sqrt{2}} \ln \left| \lg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ $\frac{\cos x}{a + \sin x + b \cos x}$ 2034. $\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin x \cos x}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arg \left(\frac{2\cos x - \sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right) \qquad 2035 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \arg \left(\frac{\cot x}{\sqrt{3}}\right)$ 2036. $\frac{1}{4}\left\{1/2 + 1/2 \text{ arctg } \frac{n}{1/4 + 21/6} + 1/2 + 1/2 \text{ arctg } \frac{n}{\sqrt{4 + 1/4}}\right\}$ donde = $-\frac{1}{9} 2x = 2037 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = n \frac{\sqrt{7} - \sin 2x}{1/2 + \sin 2x} = 2038. \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x)$ 2033, arctg $\left(\frac{1}{2} \lg 2x\right)$, 2040, $-\frac{z}{4(z^2+2)} + \frac{3}{24^2}$ arctg $\frac{z}{\sqrt{2}}$, donde $z = \lg x$. 2041 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ of $ig\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)$, dende $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y sin $\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 2043. $x = -\frac{3}{5}$ in $\sin x + 2\cos x$ [2043.1 0.1 x + 0.3 in [$\sin x - 3\cos x$] 2014 14 + 1 in 5 s.m. + 3 cms 1] 2045. $\frac{ab_3 - a_1b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{a\sin x + b\cos x} + \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^3} \ln \left| \lg \left(\frac{x}{2} + \frac{\phi}{2} \right) \right|$, donds $\cos q = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} y \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} 2047 - \frac{3x}{5} + \frac{4}{5} \ln |\sin x - 2\cos x - 3| -$

 $-\frac{6}{5}\arctan \frac{5 \lg \frac{4}{2} + 1}{2} \cdot 2049, \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \lg \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + \sin x + \cos x).$ 2049. $\frac{2}{5}x = \frac{1}{5} \ln |3 \sin x + 4 \cos x| = 2 + \frac{4}{5 \sqrt{23}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \left(2 \log \frac{x}{2} - 1 \right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3} \left(2 \log \frac{x}{2} - 1 \right)} \right|$ 2051. $-\sin x + 3\cos x + 2\sqrt{2} \cdot n \left[\lg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right] \cdot 2052, \quad \frac{1}{5} \left(\sin x + 3\cos x \right) +$ $+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2\lg\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2\lg\frac{x}{2}}\right|, \ 2054, \ -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2+\sin x}.$ 2055. $\frac{3}{5}$ a dg sinx $2\cos x$) $\frac{1}{1.\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}$ 2036. $\frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} (\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2} (\sin x + \cos x) + 1} \right| = \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} (\sin x + \cos x)}{\sqrt{3} + \sqrt{2} (\sin x + \cos x)} \right|$ **2068.** $\frac{2 \sin x - \cos x}{10 (\sin x + 2 \cos x)^2} + \frac{1}{10 \sqrt{5}} \ln \left| \log \left(\frac{x}{2} + \frac{\arctan 2}{2} \right) \right|$. **2059.** $= -\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}, \quad B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}, \quad C = -\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$ 2060. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|}$ 2061. $2\sqrt{16x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{16x + \sqrt{2}}{|\cos x| + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2$ $+\frac{1}{1.2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2 \log x}}{\log x - 1} \right) (\log x > 0).$ 2002. $-\frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{\sin x - \cos x}{1.2} \right) - \frac{1}{2} > 0$ $\times \ln \left(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x} \right) = \frac{\varepsilon \sin x}{(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos x)} + \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^2} < \infty$ \times arctg $\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \lg \frac{x}{2}\right)$ 2064. $-\frac{2}{n} \frac{\cos a}{\cos a} \left(\cos \frac{x+a}{2}\right)^n \left(\sin \frac{x-a}{2}\right)^{-n} (\cos a + 0)$ 2063. $I_n = 2I_{n-1}\cos a$ $I_{n-1} + \frac{2\sin a}{n-1}I^{n-1}$, donde n > 2 y . - $= \sin \frac{x-a}{2} \left(\sin \frac{x+a}{2} \right)^{-3} \quad 2069. \quad e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right)$ 2070. $\left(\frac{x^3}{5} - \frac{4x^3}{25} + \frac{24x}{625}\right) \cos 5x + \frac{1}{12}$ $4\left(\frac{x^4}{5} - \frac{6x^2}{125} + \frac{24}{3.25}\right) \sin 5x, \quad 2071 \quad (21 - 10x^2 + x^4) \sin x + (20x - 4x^2) \cos x$ 2072. $=\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^6+6x^6+6)$ 2073. $2e^t(t^5-5t^6+20t^2-60t^2+170t)$ 31. donde $t = \sqrt{x}$. 2074. $e^{ax} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right]$ 2075. $\frac{e^{ax}}{4} \times$ $\times \left[\frac{3(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2 + 9b^2} \right], \quad 2076. \quad \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9} \quad |x| (\sin x - b \cos bx) = \frac{e^x}{9}$

 $-\cos x$) + $\cos x$]. 2077. $\frac{e^{x}}{2}$ [x^{x} ($\sin x + \cos x$) $-2x \sin x + (\sin x - \cos x)$]. 2018. $e^{x} \left[\frac{x-}{2} - \frac{x}{10} \left(2 \sin 2x + \cos 2x \right) + \frac{1}{50} \left(4 \sin 2x - 3 \cos 2x \right) \right].$ 2013, $\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{4} x^2 + 3x^2 \cos x + x = (6 \sin x + \frac{3}{4} \sin 2x) - (5 \cos x + \frac{1}{4} \cos x + \frac{3}{4} \sin 2x)$ $+\frac{3}{3}\cos 2x$) $-\frac{1}{3}\cos^2 x$, 2080, $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})$, 2082. $x + \frac{1}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x)$. 2083. $e^x - \ln(1 + e^x)$. 2014. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}\ln e^{x} - i$, $+\frac{1}{6}\ln(e^{x} + 2)$. 2085. $x - 3 \ln\left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) \sqrt{1 + e^{\frac{x}{4}}}$ - 3 arctg $e^{\frac{x}{4}}$. 2085. $x + \frac{8}{x}$. 2087. $-2 \arcsin \left(e^{-\frac{A}{k}} \right)$, 2088. $\ln (e^x + Ve^{2x} - 1) + \frac{8}{x}$ $\frac{1+e^2}{+\arcsin{(e^{-x})}} = \frac{1+e^2}{2089}. \qquad \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\sin{(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})} = \frac{1+e^2}{1+e^2}$ $-\sec\sin\frac{2e^x}{e^x\sqrt{-5}}, \qquad 2090, \qquad -\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\times$ $\times \ln \frac{\sqrt{1+e^2}-1\cdot (1-\sqrt{1-e^2})}{(1\sqrt{1+e^2}+1)+\sqrt{1-e^2}} = 2092 \ a_1 + \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{n-1)!} = 0.$ **2093.** $e^{x}\left(1-\frac{4}{x}\right)$. 2094. $-e^{-x}$ - (e^{-x}) , 2093. $e^{4}\ln(e^{xx-4})-e^{3}\ln(e^{xx-2})$ 2096. $\frac{e^x}{x+1}$. 2097. $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^x\ln(e^{4x-4})$. **2098.** $x [\ln^n x - n \ln^{n-1} x + n (n-1) \ln^{n-1} x + \dots + 1]^{n-1} n (n-1) \dots 2 \ln x + \dots$ $+ (-1)^n n!$, 2099. $\frac{x^4}{4} \left(-m^2 x + \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32} \right)$. 2100. $-\frac{1}{2\sqrt{4}} \times$ $\times \left(\ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^3 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4} \right)$ 2101. $\ln(x+a) \ln(x+b)$. 2102. $x \ln^2 (x+b)$ $+\sqrt{1+x^2}$) $-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$, 2103. $-\frac{x}{2}+x\ln(\sqrt{1-x}+x^2)$ $+\sqrt{1+x}$) $+\frac{1}{2} \arcsin x$, 2104, $\frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 2105, $-\frac{x}{2}$ + $= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 2) + \frac{x^2}{2} \arctan (x + 1). \qquad 2106. \qquad -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln (1 + x) + \frac{1}{3} \ln (1$ $\frac{3+x}{3} \arctan \sqrt{x} = 2107, \qquad \frac{3+x}{4} \sqrt{2x-x^2+\frac{2x^2-3}{4}} \arctan (1-x).$ 2103. $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + \left(x-\frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x}$. 2103. $-\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2} \times$ \times arccos $\frac{1}{x}$. 2110. $2|1-\sqrt{x}|_1+(1+x)$ arcsin $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. 2111. $\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ $-\ln \sqrt{1-x^2}$, 2112. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, 2113. $x + \arg x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $+\left(\frac{1+x^2}{2}\arg x - \frac{x}{2}\right)(\ln(1+x^2) - 1), \quad \text{2114.} \quad x = \frac{1-x^2}{2} - \frac{1+x}{1-x}$ 2115. $-\ln\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 2516. $-\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{3x}$ 2117. $\frac{3x}{8} + \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{\sinh 4x}{32}$. 2118. $\frac{\cosh^4 x}{3} - \cosh x$. 2119. $\frac{\cosh 6x}{24} - \frac{\cosh 4x}{16} - \frac{\cosh 2x}{8}$ 2120. In ch z. 2121 z - clh z. 2122. $0.5 \left(\ln \left(t^{2x} + \sqrt{t^{2x} - 1} \right) + \arcsin \left(t^{2x} \right) \right)$ 2123. $\frac{6}{\sqrt{5}} \sec g \ 3^{-16} \left(2 \ln \frac{x}{2} + 1 \right)$. 2123.1 $\frac{1}{\sqrt{5}} \sec g \ \frac{\ln x - 2}{\sqrt{5}}$ 2123.2. $\frac{20}{21\sqrt{11}} \operatorname{aredg} \left(\frac{3 \operatorname{th} \frac{x}{2}}{3\sqrt{11}} \right)$. 2123.3. $-\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \operatorname{n} \left[3 \operatorname{ch} x - 4 \operatorname{ch} x \right]$ 2124. $\frac{a + b + ax \sin bx - b \sin ax \cos bx}{a^2 + b^2}$ 2125. $-\frac{1}{5x^3} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x}$ are g x 2125. $\frac{a \cosh ax \cos bx + b \sinh ax \sin bx}{a^2 + b^2}$ 2127. $\frac{1}{8} \cdot \frac{x + x^2}{(1 - x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right|$ 2128. $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1 + x\sqrt{3} + x^2}{1 - x\sqrt{3} + x^2} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + x\sqrt{3} + x^2}{1 - x\sqrt{3} + x^2} \right|$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arg\frac{1-x^{4}}{x\sqrt{3}}=2129\cdot2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)(x\geq0).$ 2130. $-\frac{1}{24} = 10x + 8x^2$) $\sqrt{x (1-x)} + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x}$ (0 < x < 1). 2°31 $-\frac{2}{1}1^{1-x^2}$ in $1+1^{1/2}$ ix <) 2132. $-\frac{4}{5}\sqrt{1-x\sqrt{x}}$ $\alpha > 0$. 2133. $\frac{1}{15}$, $8 - 4x^2 + 3x^4 + \sqrt{1+x^2}$. 2134. $\frac{1}{2}$ in $\frac{1+z)^3}{1-z+z^2} = 7/3$ sincing $\frac{2z-1}{1\sqrt{3}}$, donde $z = \sqrt[3]{\frac{1-z}{z}}$ 2135. $-\frac{1}{3} = \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{1-x^2+x^5}}{x^2} \right| = 2136 = \frac{1}{2} \arccos \frac{x^2+1}{x^4\sqrt{2}}$. 2137 $-\frac{2+x^2}{2} - \frac{2}{x}\sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x$, |x| < 1). 2138. $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x}^2 + \frac{1}{2}$ $+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|(x>0;x<-1)$ 2139 $-\frac{n(1+x+x^2)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} + 1\sqrt{3} \arctan \frac{1+\frac{n}{2}}{1\sqrt{3}}$ 2140. $=\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)$ arccos, 2x-3) (1 < x < 2). 2141. $-x^2 + \frac{x^4}{2} \ln (4 + x^4) + 2 \arctan \frac{x^4}{2}$ 2142, $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \operatorname{arcsin} x + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + \ln |x| \quad (0 < |x| < 1)$

2143. $(1+\sqrt{1+x^2}) \ln (1+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$ 2144. $-\frac{x^2+7}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}$ $+\frac{(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}}{3} \ln \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \text{ (i.t.)} > 1), \qquad \textbf{2145.} \ \left(\frac{3-x}{1-x}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{$ $-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)V1-x^2-\frac{1}{2}x\cos x-\ln\frac{1+V1-x^4}{x}(0< x<1).$ 2148, $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\lg \frac{2}{2}+1}{\sqrt{3}}$ 2147. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}+\cos 4x}$ 2148. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} = \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$ 2149. $a \left[x \text{ arcig } x - \frac{1}{2} \ln (x^{0} + 1) \right] - a - b (\operatorname{arcig} x)^{0}$ 2150. $g\left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln \left| x^4 - 1 \right| \right) + \frac{a+b}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$. 2151. $-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{\ln x}{2(1+x^2)} = \frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{\ln x}{2(1+x^2)} = \frac{\ln x}{2(1+x$ $+\frac{1}{4}(1+\frac{x^2}{1-x^2}+x>0)$ 2152. $\sqrt{1+x^2}$ and $x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 2153. - $(\cos^2 x + \frac{1}{1} + \cos^2 x)$ 2154. $-\frac{6x + x^2}{3} - \frac{2 + x^2}{3} \sqrt{1 - x^2}$ ercces x x < 1 2155 $\frac{x^2}{6} + \left(x - \frac{x^2}{3}\right) a \exp x + \frac{1}{2} \arcsin x^2 + \frac{2}{3} \ln (1 + x^2)$ 2156. $-\frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} = \frac{1-x^4}{4(1+x^2)} \operatorname{arcetg} x$. 2157. $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)} =$ $+\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1(1+n^2-n)^2/2} (|x| < 1)$. 2158. $-\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} \sqrt{1-n^2} \arcsin n x + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \sqrt{1-n^2} \arcsin n x + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \sqrt{1-n^2} - \frac{n^2}{2} \sqrt{1-n^2} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \sqrt{1-n^2} - \frac{n^2}{2} \sqrt{1-n^2$ $+\frac{1}{4} (\arcsin x)^2 \quad (|x| < 1), \ 2159, \ \frac{x}{4} + \frac{x^4}{12} + \frac{1}{4} (1 + x^2)^2 \operatorname{sectg} x.$ 2160. x^2 - $\ln (1 + e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arclg} e^{\frac{x}{2}} - \left(\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 2163 = \frac{\operatorname{cth} (1 + e^x \operatorname{ch} 1) + e^x \operatorname{ch} 1) + e^x \operatorname{ch} 1$ $-\frac{e^{-x}}{4 \sinh 1} = 2164. - 2 \ln (4 \ln x + 1/3 + 4 \ln^2 x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + 1} \ln^2 x + 1/2 \ln x}{\sqrt{1 + 1} \ln^2 x + 1/2 \ln x}$ 2165. $e^{x} \lg \frac{x}{2}$. 2166. $\frac{x \cdot x!}{2}$ 2167. $\frac{x^{2} \lg x}{3}$. 2168. $\frac{2x^{2}}{3} (x + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1 + x | 1$ 2169. $\frac{(1+x)(1+x)}{2} + \frac{(1-x)(1-x)}{2}$ 2170. $e^x - 1$, si x < 0; $1 - e^{-x}$, si $x \ge 0$. 2175, x. si $|x| \le 1$, $\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x$, si |x| > 1. 2172. $\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sgn} x$ $+\frac{1}{4}(x)-\frac{1}{2}\left\{1-2\left[x\right]-\frac{1}{2}\right\}$, donde $(x,-x-x)-2^{1}$ 13. $\frac{|x|}{\pi}$ $\{x,-x-x\}$

$$\begin{split} &-(-1)^{\lfloor x \rfloor} \cos \pi x \big), \quad 2174, \quad x - \frac{x^3}{3} \quad \text{si} \quad \|x\| \leqslant 1; \quad x - \frac{x}{2} - x_1 + \frac{1}{6} - \text{sgn} \, x - \text{si} \\ &. x > 1 - 2175, \quad x, \quad \text{si} \quad \infty < x \leqslant 0; \quad \frac{x^2}{2} + x, \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad x^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{si} \\ &x > 1 - 2176, \quad x / (x) - f(x), \quad 2177, \quad \frac{1}{2} f(2x), \quad 2178, \quad f(x) = 2 \sqrt{x}, \quad 2179, \quad x - \frac{x^3}{2}, \\ &2180, \quad f(x) = x - \text{si} \quad -\infty < x \leqslant 0; \quad f(x) = e^x - 1 - \text{si} \quad 0 < x < +\infty. \end{split}$$

Capitulo IV

2181. 2 $\frac{1}{2}$, 2182. a) $S_n = 16 \frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^3}$ $S_n = 16 \frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n}$. b) $S_n = \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{n}}$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n}}$; c) $S_n = \frac{10.230}{10}$. $S_n = \frac{10.250 \cdot 2^n}{\frac{10}{10}} = 2183, \ \underline{S}_n = 31 = \frac{\frac{n}{4} \cdot 2}{\frac{n}{30} \cdot 1}, \ \frac{3}{5}, \ 2184 \cdot \epsilon_0 T + \frac{1}{2} g T^2 \cdot 2185 \ .$ 2186. $\frac{a-1}{\ln a}$. 2187. 1 2188. $\sin x$. 2189. $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ 2190. $\frac{b^{m-1} - c^{m+1}}{m+1}$. 2191. ($n \frac{b}{a} = 2192$, a) 0, so $(\alpha^{n} < 1)$ b) $n \ln \alpha^{n}$, so $|\alpha| > 1$. 2193.4. $\frac{b-a}{2}$ [f(a)-f(b)]. 2201. En general, no 2203. No necesanaments. 2206. 11 $\frac{1}{4}$. 2207, 2. 2208, $\frac{\pi}{6}$. 2209 $\frac{\pi}{3}$. 2215, 1, 2211. 1. 2212. $\frac{\tau}{2 \sin \alpha}$. 2213. $\frac{2\tau}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$. 2214. $\frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$. 2218, $\frac{\pi}{2 ab}$. 2216. a) La función subintegral $\frac{1}{2}$ y su primitiva in $\{x\}$ son discontinues en el segmento de integración [-1,1], b) la función $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arctg $\frac{\lg x}{\sqrt{2}}$, que desempeña el papel de primitiva, es discontinua para $0 \le x \le 2\pi$; c) la función arctg $\frac{1}{x}$ es discontinua para $z = 0 - 2217 - \frac{2}{3} = -2218, 200)^{2}\overline{2}, -2219, \frac{1}{2}, -2220, \ln 2, -2224, \frac{1}{4}$ 2222, $\frac{2}{1}$, 2223, $\frac{1}{g+1}$ 2224, $\frac{2}{3}$ (2)/ $\overline{2}$ -1), 2225, $\frac{1}{e}$, 2226, $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{a}$ $\int f(x) dx$ 2227 $\frac{5}{6}$ 1 2228 $\frac{7}{\sqrt[3]{3}}$. 2229, $x + \frac{4}{2}$, 2230, $\frac{1}{\ln 2}$. 2231. $\theta_1 = \sin \theta^2$

2232. a) $2x\sqrt{1+x^2}$, b) $\frac{3x^4}{\sqrt{1+x^{13}}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$, c) $(\sin x + \cos x) \cdot \cos(x \sin^3 x)$. 2233. a) 1; b) $\frac{\pi^2}{4}$; c) 0. 2233. 1. A. 2235. 1. 2237. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{1}{5}$ 2238. a) $\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{2}$, si $\alpha < 0$; $\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^{4}}{2}$, si $0 \le \alpha \le 1; \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{3}$, si $\alpha > 1$ $b)\,\frac{\tau}{2}\,, (si-|\alpha|\leqslant l;\,\frac{\alpha}{2\alpha^2},\ si-|\alpha|>l,\,c)\,2,\ si-|\alpha|\leqslant l;\,\frac{2}{|\alpha|}\,,\ si-|\alpha|>l$ 2239. $\frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$, 2240. π_c 2241, 4π , 2242, $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 2243. 1, 2244. $\frac{2\pi}{3} - \frac{V_3^2}{2}$. 2245. $\frac{1}{6}$ 2246. $\frac{\pi a^4}{10}$, 2247. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}$, 2248. $2-\frac{\pi}{2}$, 2243. $\frac{\pi^2}{4}$, 2250. $\frac{\pi}{\sqrt{2^2}}$. 2251. a) La función inversa $\pi = \pm i^{\frac{1}{2}}$ es biforme, b) la función $z=rac{1}{t}$ es discontinua para t=0, c) no existe una rama uniforme y continua de la función x = Arcigit, definida en un segmento finito y que tome los valores desde 0 hasta π. 2252. No. 2253. Si, se puede 2256. f(x+b) + f(x+a). 2260. $\frac{3}{5}e^{-\frac{b}{4}}$. 2261. $\int [f(\arcsin t) + f(x + \arcsin t)] dt +$ $+ \int |f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)| dt, \qquad 2262. \quad 4n.$ 2264. arctg $\frac{32}{27} + 2\pi$. 2268. 315 $\frac{1}{26}$. 2269. $\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 2270. $\frac{5}{27} \epsilon^3 + \frac{\pi}{27}$. 2273. $-66\frac{6}{7}$. 2272. $-\frac{\pi}{3}$ 2273. $\frac{29}{270}$, 2274. $\frac{4}{3}$ $\tau = \sqrt{3}$. 2275. $2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. 2276. $2\pi \sqrt{2}$. 2277. $\frac{1}{6}$. 2278. $\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{4}$. 2279, $\frac{3}{5}$ (eⁿ + 1), 2280, $\frac{3}{8}$ in 2 + $\frac{225}{.024}$, 2281, $I_{\rm B} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, $\frac{\pi}{2}$, so n = 2k; $I_n = \frac{(2k)!}{(2k)!}$ so n = 2k + 1, 2282. Véase el N° 2281, 2283. $(-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right]$ $-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)$, 2284, $2^{2n}\frac{(n^4)^2}{2n+1}$, 2285. Véase et Nº 228 2286. $I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$. 2287. $I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \cdots \right] \right\}$ $\left\{ -(-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right\}$. 2290 $\left\{ \frac{\pi (2m)! (2n)!}{2^{4m+(n+1)}m!n! (m+n)!} \right\}$. 2291. 0, sî n as par; π_i $s_1 n$ es impar. 2292. $(-1)^n \pi$. 2293, $\frac{\pi}{2^n}$. 2294, $\frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}$. 2285. 0. 2296. 0. $2297. \quad \frac{1}{7200} \left(1 - e^{-207} \right) \left[C_{20}^n + 2 \sum_{n=1}^{n-1} C_{20}^n \frac{n^2}{n^2 + (2n - 2k)^2} \right] \cdot 2298. \quad \frac{\pi}{4n} \left(-1 \right)^{n-1}$ 2299 $\frac{(m-1)(n-1)!}{(n+n-1)!}$ (2302 En os puntos de discontinuidad de la función f(x) is denvada F'(x) puede existir como no existir 2303. +x, +C2304 MICCOS (COS X) \mp G. 2305. $x(x) - \frac{[x]((x) + 1)}{2} + G$. 2386. $\frac{x^2(x)}{2} = \frac{|x|(|x|+1)(2|x|+1)}{12} + C, \quad 2307, \quad C + \frac{1}{2} \arccos(\cos \pi x), \quad 2308, \quad \frac{1}{2}(|1+x|-1)(|1+x|+1) + C.$ = |l-x|, l+C, 2309. = 1, 2310. |l-y| in 71 2311. $\frac{39}{\pi}$. 2312. $= \frac{\pi^2}{4}$. 2313. In al. 2314. \rightarrow 15 $\frac{\pi}{6}$, 2315. $\frac{8}{3}$, 2316. a) \rightarrow : b) \leftrightarrow ; c) \leftrightarrow ; d) \leftarrow . 2317. a) La segunda, b) la segunda; c) la primera. 2318. a) $\frac{1}{3}$; b) $6\frac{2}{3}$, c) 10; d) $\frac{1}{2}$ cos φ . 2319. $\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}=b$, que es el samieje menor de la chipse. 2320, $v_{in}=\frac{1}{2}(v_0+v_1)$, donde v_1 es la velocidad final del cuerpo 2321. $\frac{1}{2}t_2^2$. 2321.1. A. 2322. 7322. a $\theta = \sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}$, b) $\theta = \frac{1}{4}$, c) $\theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$, $\lim_{x \to 0} \theta = \frac{1}{2}$. $\lim_{x \to +\infty} \theta = 1$ 2323 $\frac{8\pi}{3} = \frac{17}{3}$ 6 6 < 1. 2324 Está comprendida entre $\frac{1}{1.0 \text{ V/2}}$ V , 2325. 0.01 - 0.0059 (0 < 4 < 1), 2326.1. a) V_0 b) $f(0) \ln \frac{b}{a}$, 2328, $\frac{6}{50\pi} (0 < 6 < 1)$, 2329, $\frac{2}{a} 6 (16) < 1$), 2330, $\frac{6}{a} (16) < 1$). 2334. $\frac{1}{a}$ 2335. — 1. 2336. τ 2337. π . 2338. $\frac{2}{3} \ln 2$. 2336. $\frac{17}{3\sqrt{3}}$. 2340. $\frac{9\pi}{1/3}$ 2341 $\frac{\pi}{1/2}$, 2342. $\frac{\pi}{2}$, 2343. $\frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{1/3}\right)$, 2344 0. 2345. $\frac{\pi}{2} - 1$ 2345. $\frac{a}{a^2 + b^2}$ 2347. $\frac{b}{a^2 + b^2}$ 2349. $I_a = n!$ 2349. $I_b = \frac{(2n - 3)!!}{(2n - 2)!!} \times 1$ $\times \frac{na^{n+1} \operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{\frac{1}{n-2}}} \quad 2350. \ I_n = n \sum_{k=3}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln (-\frac{1}{n}), \ \text{donde} \quad C_n^k = n \quad \text{el}$ numero de combinaciones de n elementos en grupos de k elementos. 2351 $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}$, si n es par, y $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, si n es impar, 2352 $I_n = \frac{n-1).1}{n!} \pi_n \sin n \exp n \pi_n I_n = \frac{(n-1)!}{n!!}$, sin es impar 2353 a) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$; b) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$, 2354, $\frac{2\sqrt[4]{6e^{-\frac{\pi}{8}}}}{1-e^{-\frac{\pi}{8}}}$, 2356, a) 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0, 2557, a) h b) $\frac{1}{3}$

c) i. d) $\frac{1}{a}I_1(0)$. 2358. Es convergente. 2359 Es convergente 2360 Es divergente 2361 Es convergente para p > 0. 2362. Es convergente si p > -1 yq > -1 2363 Es convergente, si m > -1, n - m > 1 2364. Es convergente para 1 < n < 2 2365 Es convergente para 1 < n < 2. 2366. Es convergente, si m > -2 n - m > 1 2367 Es convergente para n > 0 (s $\neq 0$) 2368. Es divergente 2369 Es convergente, si p < 1, q < 1. 2370 Es convergente 2371. Es convergente, si min (p, q) < 1, max (p, q) > 1. 2372. Es convergente. 2373. Es convergente 2374 Es convergente, si p > 1, q < 1 2375. Es convergente para p > 1, q arbitrario, r < 1 y para p = 1 q > 1, r < 1. 2376. Es convergente, si p < 1 (r = 1, r < 1, 2376. Es convergente, si r < 1 (r = 1, r < 1, 2376. Es convergente, si r < 1) r < 1 y para r < 1

2376.1. Es convergente para $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\alpha + \beta < -1$. 2377 Es convergente, il P_n (x) no tiene raices en el intervalo $(0, +\infty)$ y n > m+1. 2378 Es convergente, no absolutamente 2379. Es convergente, no absolutamente 2380. Es absolutamente convergente, si $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$; es condicionalmente convergente, si $0 \le \frac{p+1}{q} < 1$. 2380.1 Es convergente 2380 2 Es convergente 2381. Es absolutamente convergente, si p > -1: q > p+1, es condicionalmente convergente, si p > -2, $p < q \le p+1$. 2382. Es condicionalmente convergente para 0 < n < 2. 2383 Es absolutamente convergente para n > m+1, es condicionalmente convergente para $n < m < n \le m+1$ 2385 No

2392. n \(\begin{aligned} 2393. 0 2394. \tau 2393. 0 2397. \(\frac{a^2}{3} \) 2399. 4 \(\frac{1}{2} \), 2398. 4 \(\frac{1}{2} \), 2400. 9, n \\
-8.1 \lg e \approx 6.35. 2400.1. \(2 - \frac{1}{\sigma} \approx 0.55. 2400.2 \) \(\frac{1}{3} - \frac{2}{\tau} \) \(\omega 0.47 \) 2401 \(\frac{x^2}{2} \). 2402. \(\pi a^2 \), 2403. \(\pi a b \) 2404. \(\frac{4}{3} \) \(\alpha^3 \), 2403. \(\frac{83}{15} \) \$\sum 2 \textit{p}^3 \] 2406. \(\frac{1}{\sum 4 \textit{C} - \textit{B}^2} \) 2407 \(3\pi a^3 \). 2408. \(\frac{7}{\sup 4 \textit{C} - \textit{B}^2} \) 2407 \(3\pi a^3 \). 2418. \(\frac{3}{3} \), 4\pi^4 + 3\pi \), 2416. \(6\pi a^2 \). 2417. \(\frac{3\pi}{b} \cdot \frac{c^4}{a^5} \), 2417.1. \(\pi a^2 \) \(\frac{15}{\sum 7} - 9 \) \(\frac{2}{3} \left{18} \) \(a^2 \), 2419. \(\frac{3\pi a^2}{2} \), 2420. \(\frac{7a^2}{4} \). 2424. \(\frac{7}{4} \) \(\frac{2}{3} \), 2424.1. \(\frac{2}{3} \) 2424.2. \(\frac{1}{3} \) 2424.3. \(4\frac{4}{15} \), 2424.4. \(\pi \text{X} \) \(\frac{2}{3} \) 2424.4. \(\pi \text{X} \)

 $\times \left(1 + \frac{\pi^2}{6}\right)$ 2425. $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2$ 2426. $\frac{3}{2} a^2$ 2427. $\pi a^3 \sqrt[3]{2}$ 2428. a^2

2429. $\frac{1}{8} \pi a^2$ 2430 $\frac{7a^2}{8 \sqrt{3}}$, 2431. $\frac{8}{27} (10 \sqrt{10} - 1)$. 2432. 2 $\sqrt{x_0} (x_0 + \frac{9}{2})$] $+\rho \ln \frac{\sqrt{x_a} + \sqrt{x_a} + \frac{\rho}{2}}{\sqrt{\rho}}$ 2433. $\sqrt{h^2 - u^2}$, 2434. $x_a - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{\pi x_a}} - \frac{1}{2}$ $= \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{c \cdot a}}}{1 + 1 + 1} + 2435, \frac{e^{c} + 1}{4} + 2436, a = n \frac{a + b}{a - b} + b, 2437, \ln \lg \left(\frac{n}{4} + \frac{a}{2} \right).$ 2438. $a \ln \frac{a}{b}$, 2439. $4a \left(1 + \sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$, 2440, 6a. 2441. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$. 2442. $1+\frac{\ln{(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$. 2443. 8a. 2444. $2\pi^{4}a$. 2445. $2\left({\operatorname{ch}} \frac{T}{2} \right)$ $\times \sqrt{\cosh T} = 1$) $= \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{T} \cosh \frac{T}{2} + \sqrt{\cosh T}}{1 + \sqrt{2}}$. 2445.1. $\frac{1}{2} (\cosh^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}} - 1)$. 2446. $\pi a \sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln{(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})}$. 2447. $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. 2448. a2449. $\rho (\sqrt[4]{2} + \ln (1 + \sqrt[4]{2}))$. 2450. $\frac{3\pi a}{2}$. 2451. $a (2\pi + \ln \pi)$. 2452. $2 + \frac{1}{2} \ln 3$. 2452.1. $6\frac{1}{3}$, 2452.2. Sh R. 2452.3. T. 2455. $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \approx 0.73$. 2456. $\frac{bh}{6}(2a+c)$. 2457. $\frac{h}{E}\{(2A+a)B+(A+2a)b\}$. 2458. $\frac{\tau h}{6}\{(2A+a)B+(A+2a)b\}$. 2439. $\frac{1}{2}SH$. 2462. $\frac{2}{3}aba$ 2463. $\frac{4}{3}\pi aba$. 2484. $\frac{8\pi abo}{3}$. 2465. $\frac{16}{3}a^{2}$. 2465. $\frac{2}{3}a^{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$, 2467. $\frac{16}{15}a^{4}\sqrt{ab}$, 2468. $\frac{\pi a^{4}}{2}$, 2469. $\frac{4}{15}$, 2470. $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^{3}$. 2472, $\frac{3}{7}$ πab^a , 2473, a) $\frac{16\pi}{15}$; b) $\frac{8\pi}{3}$, 2474, a) $\frac{\pi^a}{2}$; b) $2\pi^a$, 2475, a) $\frac{4}{15}$ πab^a , b) $\frac{\pi a^{2}b}{6}$ 2476. a) $\frac{\pi}{2}$; b) 2π . 2477. $2\pi^{2}a^{3}b$. 2478. $\frac{8\pi a^{3}}{3}$. 2479. $\frac{\pi}{5(1-e^{-\epsilon})}$. 2460. e, $5\pi^{2}a^{2}$. b) $(\pi^{2}a^{3}$; c) $7\pi^{3}a^{3}$. 2481. e) $\frac{32}{105}\pi ab^{2}$; b) $\frac{32}{105}\pi a^{3}b$. 2481.1. V_{π} = $=\frac{64}{35}\pi,\ \sqrt{y-\frac{64}{105}}\pi,2483\ \text{s})\ \frac{8}{3}\pi a^{\mu}\ \text{b})\ \frac{13}{4}\pi^{3}a^{3},2484,\text{a})\ \frac{\pi a^{\mu}}{4}\left[\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}\right]\ ,$ b) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$ c) $\frac{\pi^2 a^4}{4}$. 2484.1. $\frac{9}{3} (\pi^4 - 6\pi^2) a^3$. 2484.2. $\frac{2}{3} \pi$. 2485. $\frac{\pi^4 a^3}{2 \cdot 1^4}$. 2486, $\frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + 2 \ln \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right)$. 2487. $2a\sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} + \frac{\delta b^2}{\pi} \times$ $\times \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}$, 2488. $\pi \left[(\sqrt{4} - \sqrt{2}) + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} + 1)}{2} \right]$

das se dan los valores de las tablas 2533. 0,83566. 2534. 1,4675, 2531. - 6,2832. 2532. 0,69315

2535 17,333, 2536, 5,4024, 2537 1,3703) 2538, (2.58 253), O , THA 2540. 3,14159. 2541. 1,463. 2542. 0,3179. 2543. 0,8862. 2544 51,64.

2545.	*	0	<u>n</u>	2 <u>74</u> 3	٦.	47	5 n 3	24
	<i>y</i>	Ü	0.99	1,63	1,85	1,72	1,52	44

Capítulo V

2548. $\frac{2}{3}$, 2547 $\frac{3}{3}$ 2548. 3. 2549. 1 2550, $\frac{1}{3}$, 2651. 2) $\frac{a \sin a}{1 - 2a \cos a + a^2}$; b, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{4^{\circ}}{50\pm 4^{\circ}}$, 2552. $1-\sqrt{2}$. 2553. Es convergente solamente para x = x = . es entera) 2556 Es divergente, 2557. Es divergente 2558 Es con vergence 7859 Es dive gente 2560 Es divergente 2561 Es divergente 2562 Es converç nte 2:63 Es convergente 2564. Es divergente 2566 Puede ser tanto co longer e como divergente. 2567 a) Puede ser tanto convergente como assergente t es cergente. 2578 Es convergente. 2579. Es convergente 2550 Es convers is 1582 a) Es convergente b) es divergente 2582. Es con a gaine 258% is convergence 2584 Es convergence 2585 Es con un ger e 2555 1 Es comergente 2585 2 Es convergente para qualesquiera a v * 2586 is con facous 1587. Es divergente 2588 Es divergente 2589 Es converger e 1589. Es c vergente 2589 2 Es convergente 2590 Es con vergence 1591 2 a = 13 2595. Es conve gence 2596. Es convergente 2597 Ex convergente 2597 1 Es convergente 2598 Es convergente para p > 2 2599 Es convergente para $\frac{b-a}{d} > 1$. 2600 Es convergente si $p > \frac{3}{9}$. 2601. Es convergente, 2602. Es convergente si p+q>1, 2603. Es convergente si q>p. 2604. Es convergente si $\frac{\rho}{2}+q>1$. 2605. Es convergente si α (q-p) > 1, 2607. Es convergente si q > p+1, 2608. Es convergente si p>0.2609 Es convergente si p>0.2610 Es convergente si $p>\frac{1}{6}$, 2611 Es convergente si $b \neq 1$ 2612 Es convergente si p > 1 2613 Es divergente 2614 Es divergente 2614 2 Es convergente si p + x > 1 2616 Es conver gente si x < 1. 2617. Es convergente, 2618. Es divergente, 2619 Es convergente si p > 1 2620 Es convergente si p > 1, q les arbitrario y si p = 1q > 1. 2620.1. Es divergente 2620 2. Es convergente 2620 3 Es convergen te. 2621. Es divergente. 2623. 1,20. 2626. Es convergente si $\alpha > \frac{1}{2}$. 2627. Its convergence si $a = \frac{1}{5}$. 2628. Es divergence, 2629. Es convergence, 2630 En convergente si a > 2, 2631 Es convergente 2632 Es convergente 2633 Es convergente, 2634, Es convergente si $\epsilon = 0$. $\frac{a}{d} < -1$. 2635, Es d ver gente. 2636 Es convergente si a # 0, 2637. Es convergente 2638 Es diver gente 2639, Es convergente. 2640. Es convergente si $a = \sqrt{bc}$ 2641. Es conwargenie si $\alpha < -1$, 2642. Es convergente si $\alpha > \frac{1}{2}$ 2643 Es convergente te si $a^b > a$, c = 0 y si $a^c > 1$, 2644. Es convergente si a + b > 1, 2645. Es convergente, 2646 Es convergente, 2647, Es convergente, 2648. Es divergente 2649 Es convergente 2650 Es convergente 2651. Es convergente 2652 Es convergente si a > 2 2653. Es convergente 2654. Es convergente 2655 a) $N > 100\,000$, b) $N \ge 12$, c) N > 6, 2659, $\frac{2}{9}$, 2660, $1\frac{3}{7}$, 2661 $\ln 2$ 2662, a) 3/2 ln 2, b) 1/2 ln 2, 2664. Es convergente, 2665, Es convergente 2666 Es convergente. 2666 1. No se deduce 2667. Es convergente 2668 Es convergente 2669. Es convergente, 2670, Es divergente 2671, Es convergente 2672 Es convergente 2673 Es divergente 2673.1, Es convergente 2675 Es absolutamente convergente si p>1, es condicionalmente convergente si 0 1, es condicionalmente convergente si $0 \le p \le 1$. 2677. Es absolutamente convergente si p > 1, es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2} Es absolutamente con$ vergente si $\{x + stk\} < \frac{\pi}{4}$ (k es entero); es condicionalmente convergente si $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$. . 2679. Es condicionalmente convergente para cualquier x que no sea igual a un número entero negativo 2680 Es absolutamente convergente si p > 1; es condicionalmente convergente si 0 Es absolutamente convergente si p > 2; es condicionalmente convergente si 1\$ 2, 2682 Es absolutamente convergente si p > 1, es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2} . 2683. Es condicionalmente convergente. 2684. Es$ absolutamente convergente 2685 Es divergente 2686 Es condicionalmente convergente 2687. Es absolutamente convergente si p > 1; es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2} 2688 Es divergente 2689. Es absoluta$ mente convergente si p > 2, es condicionalmente convergente si 02690 Es convergente 2691 Es divergente, 2692. Es absolutamente conver gente si q > p + 1; es condicionalmente convergente si $p < q \le p + 1$, 2693 Es absolutamente convergente si p > 1, q > 1, es condicionslmente convergente si 0 , 2694 Es absolutamente convergente si <math>p > 1; es condicionalmente convergente si p = 1 2695. Es absiliatamente convergente p > 1, es condicionalmente convergente si p = 1/2696. Es absolutaire à en il vergente si p>1, q>1 es cond ci malmente convergente si $0\leq n$, k2698 a) p > 1, b) 0 < p ≤ 1 2698 1 a) Es convergen e, b) es convergente c) es convergente 2699 a) q > p + 1, b) p < q < p + 1, 2700 Es at obta mente convergente si m > 0, es cond ciona men e convergen e si 1 . . . < 0 2703.1. a) n ≥ 1.000 000, b) n ≥ 1.32 · 1010, 2706, a) Es divergente b) puede ser tanto convergente como divergente 2701. $\frac{2}{3}$ 2709. $-\frac{2}{7}$ 2710. $\frac{1+y}{1-xy}$. 2716. Es absolutamente convergente st |x| > 1 2717 Es absolutamente convergente si x>0; es condicionalmente convergente si x=0 2718. Es absolutamente convergente si $x>-\frac{1}{3}$ y si x<-1.2719Es absolutamente convergente si $|x| \neq 1$ y es condicionalmente convergente 1 2720. Es absolutamente convergente para $\frac{\sqrt{17-3}}{8} < z < \frac{1}{3}$ y para $\frac{2}{9} < x < \frac{\sqrt{17} + 3}{6}$. 2721. Es absolutamente convergente para $(z + \pi k) \leqslant \frac{\pi}{6} (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. 2722. Es absolutamente convergente is p>1 y $x\neq k$ (k=-1,-2,...) y es condicionalmente convergente si $0\leq$, 2723 Es absolutamente convergente si <math>q > p + 1 y es con dicionamente convergente s. p < q ≤ p + 1 2724 Es absolutamen e myer gente para x , < 1 2725 Es absolutamente convergente para x '< 1 2726 Es absolutamente convergente para (x = 2727 Es absolutamente convet gente para x # - 1 2728. Es absolutamente convergente para x > 0 2729 Es absolutamente convergente para 0 < x < + \infty 5 a > 1 es avergen e 51 a ≤ 1 o si x = 0 2730. Es absolutamente convergente para x = ? y pala $x > \varepsilon$ 2731 Es absolutamente convergente para x > -2732 Es converg rue st 0 < min(x, y) < 1/2733 Es absolutamente convergente para |x| < 10 € 3 < + ∞ y para x (>1,3 > 1x es condicional nente convergence para $x = -1, 0 \le y \le 1$ 2734 Es absolutamente convergente para max (λ) $< y < + \infty$, 2) x = 1, y > 1 y 3) x > 1, y > 2 2736. Es absolutamente convergente para $|x-k\pi| < \frac{\pi}{4}$, donde k es un número entero, 2738. $\frac{1}{5} < x_1 < 2 - \frac{8x(x^2 + 1)}{(2 - x)^2(2x + 1)^2}$. 2739. a) Es absolutamente convergente tamente convergente para p + x > 1 y para x 0, 1, 2 , es condicions men te convergente para $0 \le p + x \le 1$, c) es absolutamente convergente para 1) $|x|_1 \le 1$, y es arbitrario, 2) $x = \pm 1$. $y > \frac{1}{2}$, (3) x es arbitrario, y = 0, 1, 2 ...; as condimonalmente convergente para x = 1, $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{7}$. 2743

2746 a, es uniformemente convergente, b) converge no uniformemente 2747 Converge in formemente 2748 Converge no uniformemente 2749 Converse an formemente 2750 Converge uniformemen e 2751 a) Converge uni formamente b) converge no in orinemente c) converge uniformemente 2752 a) Converge no unifor sunte, b) converge uniformemente 2753 Converge uniformemente 2754 Converge no uniformemente 2755 a) Converge aniformemente b) converge no un formemente 2756 a) (on verge no uniformemente, b) converge uniformemente 2757 Converge no uniformemente 2758 a) Converge uniformemente b) converge no uniformemente 2759. Converge un formemente 2760 a) Converge uniformemente, converge no un formemente 1761 Converge uniformemente 2762 Converge uniformemente 2763 Converge no uniformemente 2767 a) Converge uniformemente b) converge no aniformemente 2768 Converge un formemente 2768 1 Converge no uniformemente 2769 Con verge no uniformemente 2770 Converge uniformemente 2771 Converge no uniformemen e 2772 Converge uniformemente 2773 a) Converge no uniformemente, b) converge uniformemente 2775 a) Converge uniformemente b) converge no uniformemente 2776 Converge no una ormemente 2777 Con erge uniformemente 2778 Converge uniformemente 2779 Converge uniformemente 2780 Converge antiformemente 2781 Converge in form-mente 2782 Converge uniformemente 1783 Puede 2785 No necesanamente 2795 a) Existely exicontinua para x < 1 b) existely exiconripus para x < + ...) existe para x < ... es discontinua para ... = 0 2799, a) Existe y es derivable para x # 6 (k 1 2 3,)) ex ste para 1 x < + 00, es derivable en todos los puntos, a excepción de x = 0 2502 a) α es arbitrario; b) $\alpha < 1$; c) $\alpha < 2$ 2805. No. 2806. $\frac{1}{2}$ In 2 2807. 1. $\frac{1}{2}$ 508 1 2808.1. $\frac{\pi^2}{6}$. 2809. Es lícita. 2810. St. 2812. R = 1, (-1, 1). Para x = -1es absolutamente convergente n,p>1,y es condicionalmente convergente si 0 , para . = 1 es abso utamente convergente si <math>p > 1 , es divergente st $p \le 1$ 2813. $R = \frac{1}{3}$: $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Para $x = -\frac{4}{3}$ es condicionalmente convergente, para $x=-\frac{2}{3}$ es divergente. 2814, R=4 (-4, 4) Para

2816 R = -. $x = \pm 4$ es divergente. 2815. $R = +\infty$; $(-\infty + \infty)$ $\left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Para $z=\pm \frac{1}{\varepsilon}$ es divergente, 2817. $R=+\infty$; $(-\infty^+\infty)$ 2818 R=2, (-1,3) Para x=-1 es absolutamente convergente si p > 2 y es condicionalmente convergente si 0 para <math>x = 3 es ab solutamente convergente si p > 2, v es divergente si $p \le 2$ 2819 $R = 2^p$ (-1^p-2^p) Para $x^{-\frac{1}{p}}=2^p$ es absolutamente convergente si p>2 y es diver gente si $p \le 2$; para $x = 2^p$ es absolutamente convergente si p > 2 y es condicionalmente convergente si $0 \le p \le 2$, 2820, R = 1, (-1, 1). Para $\tau = -1$ es absolutemente convergente si $m \ge 0$, y es divergente si $m \le 0$ para x = 1es absolutamente convergente si in \$0 y es cond cionalmente convergente

RESPUESTAS

 $-1 \le m \le 0$ 2821. $R = \min\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right)$, (-R, R). Para x = -R es condu-

cionalmente convergente si $a\geqslant t$, y es absolutamente convergente si $a\leqslant n$ para $\cdot = R$ es divergente si $a \ge b$ y es absolutamente convergente si $a \le b$ 2822 $F = \max(a, b), (-R, R)$ Para $\pi = \pm R$ es divergente. 2823. R = 1{- 1, 1, Para x = 1 | es absolutamente convergente si a > 1, y es divergente si a ≤ 1 2824 R = 1 (-1, 1) Para x = ± 1 es absolutemente convergente 2825 R = (+1, 1) Para x = 1 es condicionalmen e convergen e, para x = 1 es divergente 2826 R = 1, (1,1) Para x = 1 es divergente, para x = 1 es condicionalmente convergente, 2827, R = 1, (-1, 1) Para x = 1

es divergente 2828 $R=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, .Para $z=\pm\frac{1}{4}$ as divergen-

te 2839 $R = \frac{1}{3}$, $\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$ Para $x = \pm \frac{1}{3}$ es divergente, 2830

R = 1, (-1, 1) Para $x = \pm 1$ es absolutamente convergente. 2831 R = 1, 11 Para x = - 1 es condicionalmente convergente 2831.1. Para 0 < < c < es 2050 utamente convergente para x 2 es condicionalmente con vo go Har 531 2 fis convergence's amente para x 0 2832 R 1,(1 1) Para . = 1 es ebser stamente convergente si $\gamma=\alpha=\beta>0$ y es condiciona mente convergente si - $1 < \gamma - \alpha - \beta \le 0$, para x = 1 es absolutamente converge $e = \beta$, $\gamma - \alpha - \beta > 0$, y es divergente si $\gamma - \alpha - \beta \le 0$ 2833. x > 0. 2834.

 $1x^{1} > \frac{1}{2}$ 2835 $0 < 1x_{1} < +\infty$, 2836 x > -1, 2837. $|x + k\pi| < \frac{\pi}{4}$,

don's k es entero. 2838. $-1+3(x+1)-3(x+1)^2+$

$$+(x+1)^{d}, 2839. a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n}}{a^{n+1}} (|x| < |a|); b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^{n}}{(a-b)^{n+1}} (|x-b| < a)$$

$$\langle [a-b] \rangle$$
, $\langle [a-b] \rangle$ = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}} (|x| > |a|)$, 2849. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$

$$(0 < x \le 2); \ln 2, \quad 2841. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (|x| < +\infty), \quad 2842. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(|x_1| < +\infty) \qquad 2843. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} (|x| < +\infty)}{(|x| < +\infty)} \qquad 2844. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n}$$

$$(|x| < +\infty) \cdot 2845, \mu x + \frac{\mu (1^x - \mu^x)}{3!} x^x + \frac{\mu (1^x - \mu^x) (3^x - \mu^x)}{5!} x^x + \dots (|x| < 1).$$

$$(|x| < +\infty) \cdot 2845, \mu x + \frac{31}{31} \times (|x| < 1) \cdot 2847, \quad |x - 1| + (x - 1)^2 + (x - 1)^2 + \frac{1}{21} x^2 - \frac{\mu^2}{21} x^2 - \dots + \frac{1}{21} x^2 - \dots$$

2846.
$$-\frac{x}{2^{3}}x^{3} - \frac{7}{41}x^{3} + \dots$$
 (0 < x < 2). 2848. $e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^{3} - \frac{7}{16}x^{3} + \dots\right)$ (|x| < 1).

and the second
2849. $\sin(x+h) = \sin x + h'\cos x + \frac{h^2}{2!}\sin x + \frac{h^3}{3!}\cos x + \dots$ (1) $h < +\infty$); $\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - \frac{h^k}{2!} \cos x + \frac{h^k}{3!} \sin x + \dots$ 2850, a) (+2, 2); b) (3, 7). 2850,1 No 2851. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{kn}}{n!} (|x| < +\infty)$ $2852.1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} (|x| < + \infty), 2843. \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n}.$ $(|x| < +\infty)$, 2854. $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n| (|x| < 1)$, 2855. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |x^n| (|x| < 1)$, 2856. x + 1 $+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{n!}x^{n+1} \quad \left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right), \qquad \text{2957. } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1)$ $2859. \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - (-2)^n\right] x^n \left(|x| < \frac{1}{2} \right), \quad 2859. \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right] x^n \left(|x| < 1 \right).$ 2360. $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[n + \frac{1 - (-1)^n}{2} \right] x^n (|x| < 1)$. 2861. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dende 2n = 1 $= \frac{1}{165} \left[\left(\frac{1/5}{2} + 1 \right)^{n+1} + (-1)^{n} \left(\frac{1/5}{2} + 1 \right)^{n+1} \right]$ (número de Fibolizado) 2852, $\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin^{2n} \frac{2\pi^{-n} + 1}{3} (|x| < 1)$. 2852.1. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ donde $c_n = 1 - n$ $n = 4n \quad c_n = -1$ 51 n = 2k + 1 $c_n = 0$, si n = 2k + 2 6 n = 2k + 32063. $\sum x^n \cos n\alpha \ (|x| < 1).$ $\phi = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), $f^{(1020)}(0) = 1000!$, 2864. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin na$ (|x|<1). 2865. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin na$ $t_1 x_1 < t_1^{-1/a}$). 2866. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!!} \, x^{(n)}(|x| < 1), 2867. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + [1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n} x^n$ $(-1 < x \le 1)$, 2868. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} |x^n| (|x| < +\infty)$, 2869. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(n+1)}}{2^n + 1}$ $\{(x, \le 1); \ \frac{\pi}{4}, \ 2870, \ x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n} (\|x\| \le 1), \ 2871, \ x + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \times \frac{(2n-1)!}{n!} \right\} = 0$

$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+x} \frac{x^{n+x}}{n(n+1)} (-1 < x < 1) \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+x}}{4n+1} (-1 < x < 1)$
$\sum_{n=1}^{n-1} x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} 2^{2n-2}}{2n-1} x^{2n-1} \left(-\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2} \right), d \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{n} \frac{1}{4} \right\}$
$\times \frac{x^{2n+1}}{2^{n}(2n+1)} \{(x < \sqrt{2}), \epsilon\} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2^{n}(2n+1)} (x < \sqrt{2}), \epsilon\} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2^{n}(2n+1)} (x < \sqrt{2}), \epsilon\}$
$\times_{2^{n}} \frac{(2n+1)}{(2n+1)} \left(x < x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{n}}{(2n+1)^{n}} \left(x ^{2} + 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+$
$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)} $ para $0 \le x \le 1$ y $-1 \le x \le 0$; g) $1 + \frac{x^{2n}}{2}$
$+\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)}{(2n+2)}, \frac{x^{2n+k}}{(2n+1)} \right\} (x \le 1), b - 1 + \frac{x^{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)} \frac{x^{2n+k}}{(2n+2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+k}}{(2n+2)!!} $
$(x \le 1)$, 2874. a) $e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{11} (2x)^{n-1} + \frac{n(n-1)\sqrt{n-1}}{21} \right]$
$\times (2x)^{n-a} + \dots = 1$, b) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{n} = \frac{n(n-1)}{1!} e^{n-1} e^{-1} = \frac{n(n-1)(n-1)}{2!}$
$\times a^{n-2}x^{2} + \int c^{n-2}\frac{(-1)^{n-2}a}{(1-4n)^{n-2}} \left[x^{n-1} - \frac{n}{2} - \frac{n-2}{2} x^{n-4} + \frac{n-2}$
$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^{n-1} + \dots \bigg] . \qquad 2875. \sum_{r=1}^{r} \frac{(-1)^n}{n!} (x+1)^{n+1}$
$(+2 \le x \le 0)$, 2876. $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} (x > 1)$, 2877. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{m+1} (x > 0)$.
2878. $\frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n}{(2n)!!} \left(\frac{\pi}{1+x}\right)^{n+1} \left(x > -\frac{1}{2}\right)$. 2881, $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2$
$-\frac{1}{2i}x^2 - \dots (i \times (< i), \qquad 2582, 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}(n-1)}{n!} x^n (x < -\infty)$
2883. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{9}{(2n-2)!} + \frac{9}{(2n-4)!} \right] x^n (1x! < +\infty), \text{donde} (1 = 1).$
$(-1)! = \infty$, $(-2)! = \infty$ etc. 2884, $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$
∞ (−1) ⁴⁺¹ ∞ 2 ⁴ cos
$(-1 \le x < 1). \ 2885. \ x + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} x^{2n+1} (x \le 1). \ 2886. \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos^{n}}{n!}$
$(x < +\infty)$ 2887 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n (x < +\infty)$, 2888. $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} \right\}$
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

 $\left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right\} x^n \left\{1 - 1 < x < 1\right\}$ (-1 < x < 1). 2889. $\sum_{n=1}^{\infty} (1^{n+1})^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $+\frac{1}{2n+1}\left(|x| \leqslant 1\right), \quad 2890, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} \cdot n!}{(2n+2)!} x^{2n} \ (|x| \leqslant 1), \quad 2891, x+\frac{1}{3} \cdot x^{n} = 0$ $-\frac{2}{15}x^3 + \left(-x_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ 2892 $x = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + \left(-x_{11} - \frac{\pi}{2}\right)$ 2893. $-\frac{1}{4}x + \frac{2}{49}x^3 + \frac{2}{945}x^5$ $(x < \pi)$ 2894 $F_0 = 1$ $\sum_{i=1}^{n} \{(-1)^n < \pi\}$ $\left| \frac{f}{2k_1!} \right|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2k_1!} \left| \frac{f}{2k_1!} \right|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2k_2!} \left| \frac{f}{2k_2!} \right$ $P_{n-1} = \frac{(2n-1)^{n}}{n!} \left[e^{n} \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(4(2n-1))(2n-3)} t^{n-4} + \ldots \right] (n \ge 1)$ (polinomios de Legendre 2896 $\sum_{k=0}^{\infty} s_n x^n$, donde $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_{kr}$ 2897. a) $R \geqslant \min(R_1, R_2)$; b) $R \geqslant R R_2$ 2901 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n-1} (|x| < +\infty)$, 2902, $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| \le 1)$. $2503. \sum_{i} (-1)^{n} \frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} |x_{i}| < \frac{4}{7} |x_{i}| \cdot 2904. \sum_{i} (-1)^{n} \frac{x^{n+1}}{2n-1} |x| \le 1).$ 290 $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{26} + \frac{x^3}{2} + \dots + x < 1$ 2906 $\frac{1}{2} + \frac{1-x}{2} + x < 1$ 2907 arctg x $x = 2908. \ ch \times (|x|, < +\infty).$ 2909. $\frac{1-x}{x} \ln |x| = x$ 2910. $\frac{x}{1-x} (-1 \le x < 1)$. 2911. $\frac{x}{(1-x)^2} (|x| < 1)$. 2912. $\frac{x(x-x)}{(1-x)^2} < x < 1$. 2913. $\frac{2x}{(1-x)^4}(|x|, < 1)$. 2916. $R = 2(x-1)^2 + (y-1)^4 < 4$. 2917. $R = \frac{1}{1-x}$ $z^2+y^2<\frac{1}{2} \ \ \text{2818}, R=1; \ \ z^2+y^2<1, \ \ \text{2919}, \ \ R=1; \ z^2+y^2<1, \ \ \text{2920}, \ \ R=1$ $= \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \left[(x + \cos \alpha)^2 + (y + \sin \alpha)^2 < 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]$ 2921, 2,080 2922. a) 0.87 port = -- arc 50°11'40", b) 1 99527; c) 0,60653; d) 0,22314 2923, 0,30902 2924, 0,999848 2925. 0 58. 2926. 2,718282, 2927. 0,1823, 2928. 3,1416. 2930, 3,141592654, 2931, $\ln 2 = 0.69315$; $\ln 3 = 1.09861$ 2932, a) 0,747, b) 2.835; c) 1,605; d) 0,905; e) 1,057; f) 0, 19; 'g) 0,337; h) 0,927; 1) 8,041, j) 0,488; E) 0.507; I) 0.783. 2933. 3.82. 2934. 4.84. 2935. 20,02 m 2936. 2- $-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x$. 2937. La serie de Fourier coincide con el polutomio $P_n(x)$.

2938. $\frac{4}{7}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin{(2k+1)x}}{2k+1}$, $\frac{\pi}{4}$, 2939. $\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin{(2k+1)\frac{\pi^*}{t}}$. 2940. 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$, 2941. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, 2942. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2k+1)x}{(2n+1)^2}$ 2943. $\frac{(a-b)\tau}{4} = \frac{2(a-b)}{1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)} + (a+b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin^n x}{n}$ 2944. $\frac{2}{3}\pi^3 + 4\sum_{n=1}^{20} \frac{(-1)^{n+3}}{n^3}\cos n\pi + 2945. \frac{2\sin \pi\alpha}{n} \left[\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\alpha\cos n\pi}{n^2 - \alpha^2}\right].$ 2946. $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{n^2 + a^2} \right)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n}$ 2947. $\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n! + a!}$ 2948. $2 \sin ah \left[\frac{1}{2 \cdot h} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{ah \cos \frac{nx}{h} - nn \sin \frac{nx}{h}}{(ah)^2 + (nn)^2} \right].$ 2949. $a + l + \frac{2l}{n} \times 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin^{n+1} \frac{n\pi x}{t} \cos^{n\pi a} \frac{n\pi x}{t} (a < x < a + 2t), 2960, 1 - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \cos x$ $=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx + 2951, \quad \frac{16}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx + 2952, \quad \frac{4}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\times (-1)^n+($ $\left. \left. \left. \frac{\cos\left(2k+1\right)x}{2k+1} \right) \right. = 2953, \frac{4}{\pi} \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-1/k\right)}{\left(2k+1\right)^2} \sin\left(2k+1\right)x, 2954, \frac{4}{\pi} \left. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{\left(2k+1\right)^2} \right. \right.$ 2955. $\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi ax}{\pi}$ (x no es entero). $= \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi (2n+1)\pi}{(2n+1)^2}, \quad 2957, \quad \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{4k^2 + 1}, \quad 2958, \quad \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{4k^2 + 1}.$ $= \frac{4}{\pi} \sum_{i} \frac{(-1)^{3+i}}{4k^2 - 1} \cos 2kx, \qquad 2959. \quad \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} + 2 \sum_{i} \frac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} \cos nx.$ 2960. $\frac{4}{\pi} \ln (1+\sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left[2 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sin \frac{m\pi}{2} \right] \right\}$ $\times \cos(8x+4)x$ + $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left[\frac{8}{n} \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n}} \right] \right\}$ $\times \sin(2m-1) \frac{\pi}{4} \cos 8kx$. 2981. a) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi (-n \le r - n)$.

 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)x}{2k+1)^3}}{(2k+1)^3} (0 < x < n); e) \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{(2k+1)^3}{n^2} + \frac$ $= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n} (0 < x < 2\pi); \frac{\pi^3}{6}, \frac{\pi^2}{2}, \frac{\pi^2}{8}, 2962. x^3 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{n^3}$ $\mu^{2} = 2\pi^{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin nx}{n^{2}} \qquad \qquad x^{2} = \frac{1}{n} \pi^{2} + 8\pi^{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n!} \cos nx. \ 2963. \ \frac{\alpha (n-\alpha)}{2}; \ \frac{n^2 - 3.3\alpha + 3\alpha^2}{6}$ 2564 $\frac{2}{3} = \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{1nx}{3} + \frac{1}{2n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{n^2} (0 \le x \le 3).$ 2965. $\frac{1}{2m} C_{2m}^m + \frac{1}{2m^2} C_{2m}^m + \frac{1}{2m^$ $+\frac{1}{2^{\frac{m}{m-1}}}\sum_{n=0}^{\infty}C_{nn}^{m-1}\cos 2k\pi$ 2966, $\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}\sin n\pi(|q|)<1$), 2967, $1+2\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}\cos n\pi$ (|q| < 1). 2988. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$ 2969 $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx$ 2970. - n = 2 $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} + 2971, -\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}, 2972, -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos (2k+1)x}{2k+1}.$ 2973. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad \text{2974.} \quad x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-cs} \frac{(2k+1)\pi s}{2a} = \frac{1}{2a}$ $-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi s}{2a}; \ \ g(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}=$ $= \frac{4a}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^k} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a}, \quad 2975. \quad f(-s) = f(s) \quad f(s+s) = -f(s)$ 2976. f(-x) = -f(x), f(x-x) = f(x). 2977. a) $= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{(2k+1)^k} - \frac{8}{\pi} \right] \right\}$ $\times \frac{(-1)^k}{(2k+1)^k} \Big] \cos(2k+1)x \Big\} \Big(0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Big), \ b \Big) \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \Big[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^k} \Big] \times \Big]$ $\times \sin(2k+1)x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$. 2978. $a_{12} = b_{12} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 2979 a_{2n-1} b_{2n-1} 0 (n-1-2, 3, ...). 2980. a) $a_n = 0$ $b_{2k-1} = 0$, b) $a_n = 0$, $b_{2k} = 0$. 2981 $a_n = a_n$, β_n b_n . 2982, $a_n = a_n$, $\beta_n = b_n$. 2983. $a_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh$ $b_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$. 2984. $A_0 = a_n$

 $A_n = a_n \, \frac{\sin nh}{nh} \, , \, B_n \, \tau \cdot h_n \, \frac{s_n \tau_n h}{nh} \, (n \qquad Z = \mu - 2985, \, A_n = a_n^* - A_n = \frac{s_n}{n} - h_n^* \,$ $B_a = 0 \ (n = 1 \ 2 \ ...)$ 2986. $\frac{1}{2}$. 2987. $\frac{1}{4}$. 2988. 2 ± 1 2 ± 1 , 2989. $\frac{1}{4}$ 2990 ± 1 $\times \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right)$ 2991. In 2 $\frac{1}{2}$ 2992. $\frac{3}{4}$ 2993 | 2994. 2 - 17 2895. 2e: 2895. Se². 2997 $\frac{\pi^2}{3}$ = 3. 2998. $\frac{\pi^2}{4}$ = $\frac{3}{10}$ = 2999. $\frac{1}{2}$ (cos 1 = sin 1) 3069. $\frac{1}{6}$ (4 in 2 - 1). 3601. e^{\pm} ($\alpha_m e^m + \alpha_{m-1} + \cdots + \alpha_n$).donde os coeff cientes α_R $(k=0,1,\ldots,m)$ se determinan por la igualdad $P(n)=\alpha_m n\,(n-1)\ldots$... $(n-m+1)+\alpha_{m+1}n(n-1)$... $(n-m+2)+...+\alpha_1n+\alpha_6$. 3002. α^2 $\times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right)$ 3093, $\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = \frac{1}{x}$. 3004. $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x - \frac{x}{2}$ $\times \sin x$ 3005 $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{V_{-x}} \operatorname{ch} V_{-x} - \operatorname{ch} V_{-x} \right)$, $\sin x \ge 0$ $\frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{V_{-x}} \sin V_{-x} \right) = 0$ $-\cos \sqrt{-x_0^2}$, so x < 0. 3006. In $\frac{1}{1-x}$. 3007. $2x \arctan x + \ln(1+x^3)$ $f(x) \leqslant 1$). 3008. $\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} \leqslant 1 < 1$). 3009. $(1-x)^{-\frac{x}{d}} - 1$ $t|\,x\,| < t_0, \ \ 3010, \ \left(1 \to \frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \to 1, \ \ 3011, \ \frac{1+x}{(1-x)^3} \ (|\,x\,| < 1), \ \ \ 3012, \ \frac{x\,(3-x)}{(1-x)^3}$ (1x) < 1; 3013. $(1 + 2x^2) e^{x^2}$, 3014. $\frac{1}{31 \cdot 3} + \frac{1}{3} \cdot 12$. 3015. $\frac{\pi}{4}$ 3016. 3017. $\frac{\pi}{2}$. 30 8. $\frac{\pi - x}{2}$ (0 < x < 2\pi). 8019. — $\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$ (0 < x < 2\pi). 3020. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x - \alpha} \right|$. 3021. $\frac{\pi}{4}$, si $3 < x < 2\alpha$, 0, so $\alpha < x < 2\alpha - 2\alpha$. $= \frac{\pi}{4} \quad \text{si} \quad 2\pi = 2\alpha < x < 2\pi \quad 3022, \quad \frac{\pi}{4} \text{ sgn} x (|x|, < \pi) \quad 3023, \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2} \right)$ $-\frac{x}{2}\sin x(|x| < \pi), \quad 3024, \, \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi}{4}|x|(|x| \le \pi), \qquad 3025, \, \frac{x}{2}(1 + \cos x) - \frac{\pi}{2}(1 + \cos x) = \frac{\pi}{2}(1 + \cos x)$ • Sing $x = (2\cos\frac{x}{2})$ ($|x| < \pi$). 3026. $e^{\cos x} \cos(\sin x)$ ($|x| < \frac{1}{4}$ \Rightarrow). 3027. $x = (\pi$. $\mu = \pi \ \mu, \ i = 1 \pm 1 \pm 2, \dots), \ 3028. \ 2 (arcsin x)^2 (1x) \leqslant 1). \ \ 3028. \ \frac{4}{4-1}$ $+\frac{4\sqrt{1-x}}{x} \cos (1-\frac{1-x}{2}), \quad \text{s.} \quad x = 0 \quad \frac{4}{4-x} \quad \frac{4\sqrt{1-x}}{x} \sin \frac{1/(x+x-4)}{x}.$ si x < 0 3030, $\frac{a}{x-1}$ 3031 $\frac{a}{x}$ 3032 a) $\frac{x}{1-x}$ b) $\frac{1}{1-x}$ 3033 a) $\frac{x^2}{1-x}$

 $1 + \sum_{(x=1)^2}^{x} 3034$, 1, 3035, $1 + \sum_{(x=1)^2}^{\infty} (t-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{(2n+1)^n}$ 3036 $\frac{\pi}{12}$

.031. $-\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n(p+nq)}$. 3038, $2-\frac{n^2}{6}$. 3039. $\frac{1}{24}$ 3040. $\frac{n^2}{12}$. 3041. F(k)...

 $\frac{\pi}{9}\left\{1+\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{2n-1}{(2n)^{i+1}}\right]^2k^{2n}\right\} \text{ 3042 } E(h)=\frac{\pi}{7}\left\{1-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(2n-1)!1}{(2n)^{i+1}}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$

3043. $2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^3 \epsilon^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \right)^3 \frac{\epsilon^4}{3} \right] - \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 \frac{\epsilon^4}{3} \right]$, donde ϵ es la excentricidad de

 $3047 \frac{2^{-n^{\alpha}}}{n} \quad 3048. \quad \ln{(1+n)} \quad \text{si} \quad |\alpha| < 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{n^{\alpha}} \ln{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \text{si} \quad |\alpha| > 1.$

3049.0 st, $\alpha \mid \leq 1$ y $\pi \ln \alpha^2$ si $\mid \alpha \mid > 1.3050.2 \cdot 10^{-6}$, 3061. $\frac{1}{4}$ 3062.

2 3063. $\frac{3}{7}$, 3064. $a^{-\ln 3}$, 3065, a) No., b) si, c) si; d) si. 3066. Diverge ha-

cia cero 3067. Es convergente 3068. Es convergente si p>1.3069. Diverge hacia cero. 3070. Es convergente para cualquier p. 3071. Es convergente si

 $a_1 = a$ 3072. Es convergente si $\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{p} b_{jj}$ 3073 Diverge hacia cero

3074 Es convergente 3075. Es convergente 3076 Es convergen convergente para qualquier x. 3078 Es convergente para cualquier : 50 9 Es convergente para | x < 1 3080. Es convergente para | x 1 < 2 3 %; Es convergente para , x 1 > e. 3082. Es convergente para cualquier x. 3083. Es

convergente para $|x| \le 1$, $p \neq q$ arbitrarios, y para x = 1 p > 1, . >

3084 Es convergente para cualesquiera x y p. 3085. Es divers tre 3088 Es condicionalmente convergente. 3089. Es divergente 3090 Es atiso em la

convergente si p > 1 es cond.cionalmente convergente si $\frac{1}{2} . 3091$

Es divergente 3092. Es divergente, 3093. Es divergente, 3094 Es condicionalmente convergente. 3095. Es condicionalmente convergente 3096. Es divergente. 3097, Es absolutamente convergente si α>1.

es condicionalmente convergente si $\frac{1}{2} < a \le 1$.

3109. $F'(x) := F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'_{n}(x)}{1 + f_{n}(x)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n}(x)| < + \infty, \quad |f'_{n}(x)| < c_{n}$

 $(1-1)^2$, ...), donde $\sum_{i=0}^{\infty} c_{ii} < +\infty$. 3111, 157,970 + 0 0,0004 (0 < 0 < 1).

3112. $10^{240} \cdot 7.7 \cdot \left(1 + \frac{1}{12000}\right) (16 < 1)$, 3113. $0.0798 \cdot \left(1 + \frac{6}{300}\right) (16 < 1)$, 3114. $10^{10} \times$ $\times 1378 \cdot \left(1 + \frac{6}{288}\right)$ (4, ≤ 1). 3115. $10^{12} \cdot 4.792 \cdot \left(1 + \frac{6}{120}\right)$ (16, ~ 1) 3116. 0.124 $\left(1+\frac{0}{300}\right)(1^{6})<1$), 3117. 0.355 $\left(1+\frac{6}{500}\right)(|9|<1)$. 3118. (2n-1):= $= \sqrt{2} (2\pi)^d e^{-\pi + \frac{t_n}{12\pi}} (|\theta_n| < 1), \ e^{\pm 13\theta}, \ \frac{2^{2\pi}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{t_n}{n}} (|\theta_n| < 1), \ \ 3120, \ \ a) \ \ 1, \ \ b) \ \ \varepsilon$ c) $\frac{d}{6}$; d) 1. 3121, $P_{1}(z) = 1 - \frac{55}{21}z - \frac{1}{15}z^{2} + \frac{5}{49}z^{2}$; $P_{1}(-1) \approx 3.43$ $P_s(1) = -1.57;$ $P_s(6) \approx 8.43.$ 3122. $y = y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{9k}$ $(x - x_0) + \frac{y_0 - y_{-1}}{9k}$ $+\frac{y_1-2y_3+y_{-3}}{7h^2}(x-x_0)^2$, 3123 $y=0.808+0.193x-0.00101x^2$. 3124. $\sin x^2\approx$ $=\frac{5\pi}{288}\left[1-\left(\frac{\pi}{150}\right)^2\right]$ so $20^\circ\approx 0.341$, $\sin 40^\circ\approx 0.645$, $\sin 80^\circ\approx 0.994$. 3125. $P(x) = \frac{1}{3}(7x^3 - 4x^4)$. 3126. $7\frac{1}{3}$. 3121. $B_{n,x}(x) = x$ $B_{n}(x) = x^{n} + \frac{x(1-x)}{n}$ $B_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) x^n + \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n + \frac{1}{n} x$ 3128. $B_n(x) = \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{1}{n}i\right) C_n^i \frac{(x-a)^n (b-x)^{n-i}}{i^n}$, donde i = b-a3129. $B_n(x) = \frac{1}{8} (1-x) (1+x)^2 + \frac{1}{16} (1+x)^4$ 3130. $B_{10}(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \times 10^{-3}$ $\times \sum_{i=1}^n iC_{in}^{n-i} \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i \right], \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{A}) = e^{\lambda a} \left[1 + (e^{a} - 1)^{-x} - e^{b} \right]^n.$ 3132. $B_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right].$ donde $t^2 = -1$, 3138, $\sigma_{2n-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^k}$,

SEGUNDA PARTE

Capítulo VI

3136. El semiplano $y \ge 0$. 3137. $|x| \le 1$; $|y| \ge 1$. 3138. $x^2 + y^2 \le 1$ 3139 La parte exterior de' circulo x2 + -2 > 1 3140 El anillo 1 4 x2 4 $\pm 3^2 \le 4$ 3141 La lúnula $x \le x^2 \pm 3^2 \le 2x$ 3142 $1 \le x^2 \pm x \le 1$ 3143 E. sem plano x + y < 0 3144 El par de ángulos oquestos ' y < $(x \neq 0)$ 3145 £1 par de angulos opuestos obtusos, limitados por las rectas y = 0 e y = -2x, incluyendo la frontera sin el vértice comun O(0, 0)

3146 El triángulo rectuíneo, limitado por las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = -x$ y la recta y = 2, excluyendo el vértice 0 (0, 0). 3147. La familia de andlos concentricos $2\pi k \le x^2 + y^2 \le \pi (2k + 1) (k = 0, 1, 2, ...)$, 3148, La nane exterior del cono x2 + y2 - z2 = 0, incluyendo la frontera excepto el virtice 3149. El conjunto de cuatro octantes del espacio 3150. La parte interior del hiperboionde de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 3151 Reclas paralelis 3152 Curcunferencias concéntricas. 3153 La familia de hipérbolas equiláteras con les asintotes comunes y = ± x 3154 Rectas paralelas, 3155 Un haz de rectas con el vértice en el origen de coordenadas, a excepción del vértice 3156. Una familia de elipses semejantes 3157. Un conjunto de hipérbolas equilateras, que se aproximan asintóticamente a los ejes de coordenadas y están situadas en e. I y III cuadrantes. 3158. Una familia de líneas porgonales de dos lados, cuyos vértices están situados en el eje Oy. 3159 El I v [1] cuadrantes para z=0, una familia de pongonales de dos lados, cuyos vértices están situados en la recta x + y = 0, y con los lados paralelos a los ejes de coordenadas, para 2 > 0 3159 I. Las curvas de nivel son los lados de los ángulos paralelos a las direcciones positivas de los ejes de coordenadas Ox y Oy, y con los vértices en la recta y = x 3159.2. La familia de los contomos de los cuadrados con el centro común 0(0 0), cuyos lados son paraiclos a los ejes de coordenadas Ox y Oy para z > 0, el punto 0 (0 0) para z = 0 3159 3 Rectas paralelas al eje Ox, si a < 0, los lados de los ángulos, paratelos al eje de coordenadas Ox y al semicje positivo Oy, con los vértices en la parabola $y = x^2$, si z > 0, el semieje positivo Oy, si z = 0 3160 Un haz de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (sin incluir este

origen) y que son ortogonales al eje Ox, 3161. Las curvas $y = \frac{C}{\ln x}$, 3162 Las

curves $y = \frac{C+x}{\ln x}$ 3163. Una familia de circunferencias con los centros en

el eje Ox, que son ortogonales a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, 3164. Una familia de circunferencias que son ortogonales al eje Oy y que pasan por los puntos (-a, 0), (a, 0), a excepción de estos últimos. 3165. Las rectas $x = m\pi$ e $y = n\pi$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, para z = 0, el sistema de cuadrados $m\pi \le x \le (m+1)\pi$, $n\pi \le y \le (n+1)\pi$, donde $(-1)^{m+n} = z$, para : 1 o z = 1. 3166 Una familia de planos para elos 3167 Una familia de esferas concentricas con centro en el origen de coordenadas 3168. Una familia de hiperboloides de dos hojas para u < 0; una familia de hiperboloides de una hoja para u > 0, un cono para u = 0, 3169. Una familia de culindros elípticos, cuyo eje común es la recta x + y = 0, z = 0, 3170. Una familia de esferas concentricas $x^2 + y^2 + z^2 = \pi n$, (n = 0, 1, 2) i para u = 0, and familia de capas esféricas $\pi n < x^2 + y^2 + z^2 < \pi (n + 1)$, donde $(-1)^n = u$, para u = -1o a = 1. 3171. Una superficie cilíndrica con la directriz z = f(y), x = 0, cuyas generatrices son paralelas a la recta y = ax, z = 0, 3172. La superficie de rotación de la curva z = f(x), y = 0, en torno del eje Ox 3173. Superficie cón.ca con vértice en el origen de coordenadas y on is directrize x = 1, z = f(x), 3174. Concide con la directriz , ... = f(y), cuyas generatrices son paralelas al plano $O(x)^y$ 3176. $I\left(1, \frac{L}{x}\right) = I(x, y)$. 3177. $\sqrt{1 + x^2}$. 3178. $I(t) = 2t + t^2$, $z = x - 1 + \sqrt{y}$

(x > 0). 3179. $f(x) = x^{0} - x$; $x = 2y + (x - y)^{3}$. 3180. $f(x - y) = x^{0}$ 3183 1. No. 3183.2, 0, no. 3184. a) 0, 1; b) $\frac{1}{2}$, 1; c) 0, 1; d) 0, 1, c) 1, ∞ , 3185, G. 3186, O. 3187, σ . 3188, D. 3189, Q. 3190, L. 3191, σ . 3192, $\ln 2$ 3193. a) $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$. 3194, Puntos de discontinuidad x = 0, y = 0 3195. Todos los puntos de la recta x + y = 03196. 0 (0 0) es un punto de discontinuidad infinita, los puntos de la rectu x + y = 0 (x \neq 0) son de discontinuidad evitable 3197. Los puntos situados en los ejes de coordenadas. 3198. El conjunto de puntos de las rectas $x = m\pi$ e $\nu=n\pi$ (m, $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$). 3199. Los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. 3200. Los puntos de los planos coordenados x = 0, y = 0, 2 0 3201 (a, b, c) 3203 l. Es aniformemente continua 3203 2 Es un formemente continua, 32033. Es continua, pero no uniformemente 3203.4. La función es continua en E_i pero no umformemente, 3212 $f_{\nu}(x,1)=1$ **3212 1.** $f_{\nu}(0,0) = 0$, $f_{\nu}(0,0) = 0$ la función no es diferenciable en el punto 0(0 0). 3212 Z. La función no es diferenciable en el punto 0(0,0) 3212 3. La función es diferenciable en el punto 0 (0, 0) 3213 $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^2 + 8xy^3 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 4y^2 \quad 8x^3y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^3 + 8y^3 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x} = 16xy \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x} = 12x^3 + \frac{\partial^2 u}{\partial x} = 12xy \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x} =$

 $3213 \frac{\partial h}{\partial x} = 4\lambda^{\frac{1}{4}} - 8xy^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^{\frac{1}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{\frac{1}{2}}} - 12x^{\frac{1}{2}} - 8y^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = -16xy^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^{2} u}{\partial y} = -16xy^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{\frac{1}{2}}} - 0 \cdot \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{\frac{1}{2}}} - 0 \cdot \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{\frac{1}{2}}} - 1 - \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^{2} u}{\partial y} - \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^{2} u}{\partial y} - \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial^{2} u$

 $\frac{1}{x^{2}} \frac{y^{2}u}{\partial x^{2}} \frac{\partial^{3}y}{\partial x^{2}} = \frac{2y}{(1+y^{2})^{2}} (xy \neq 1), \quad 3224 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{u}{x^{2} + x^{2}}$ $\frac{x - x - y}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x - y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2 - y^2) \sin y}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{x}{c x^2}$ $=\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}(y\neq 0), \quad 3225, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{(x^2 + y)} \frac{u}{(x^2 + y)} \frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{u}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{u}{y} \frac{u}{y} = \frac{u}{y} \frac{$ $\angle \cdot \cap \frac{x}{n} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z \cdot z}{x^2} \cdot \frac{(x)}{x} \left(\frac{x}{u} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x}{u} \left(\frac{x}{u} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{x}{u} \left(\frac{x}{u} \right)^2 \cdot n^2 \cdot \frac{x}{u} \ .$ $\frac{\partial^2 x}{\partial x \, \partial y} = -\frac{z^2}{x_0^2} \left(\frac{x}{y}\right)^2, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x \, \partial z} = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(-\frac{z}{z} \ln \frac{x}{y}\right), \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y \, \partial z} = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^2$ The article z^{2} is $\frac{\partial^{2} u}{\partial u^{2}}$ $\frac{J^{2}u}{t^{107}} = \frac{gu}{2} \frac{z - y}{t^{12}} \frac{\pi z}{t^{12}}, \quad \frac{g^{2}u}{t^{12}} = \frac{u}{u^{12}} \frac{z + y}{t^{12}} \frac{\pi x}{t^{12}} + \frac{3228}{u^{12}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{g^{2}}{x} \frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial z} = z_1 e^{-z} \ln \ln z \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = z_1^2 \ln nz^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial u}{\partial z^2} = \frac{z_2^2}{2n} + \frac{z_3^2}{2n} + \frac{z_4^2}{2n} + \frac{z_4^2}$ - 29 17 x, 7 x 2 2 2 2 4 (1 1 7 3 x) 7 x 72 x 2 4 2 4 1 x 9 1 x $\frac{a^2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[1 + y^2 \right] \left[$ r = -37301 s, the poleriste = 3235 d. $r \cdot r = r^{-1} \cdot r^{-1} (r \cdot r dx + c r dx)$. $\frac{1}{12} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{12} +$ 3239 $d_x = e^{xy} (y dx + x dy)$ $d'_x = e^{xy} (y'_x + x'_y) dx dy + x^2 e^{xy}$ 3240 $d_x = y'_y = x dx + (x + x) dy + (x + y) dx, a'_x = 2 (dx dy + dy dx + dx'_y)$ 3241 $d_x = \frac{(x^2 - y^2 - dz + \gamma z) \cdot x \cdot ax - y \cdot dy)}{x^2 + z}, \quad d_x = \frac{(x^2 - y^2) \cdot z^2 + z}{x^2 + z \cdot z^2} + \frac{x^2 + z}{x^2 + z^2} + \frac{x^$ -2 dx - dy (dy + dz) 3244, a) 1 + mx + ny; b) xy, c) x + y, 3245, a) 108 9 2 N) 1055 c) 195, d) 0,502, e) 0,97, 3246 La diagonal disminutá 3 mm apro ximadamente el área disminuirá 140 cm² aproximadamente 3247. Hay que disminuir 1.7 mm, 3749 \(\Delta \approx 10,2 m^3\), \(\delta \approx 13\) \(\Delta \approx 7,6 m\), 3251. \(\delta \approx \approx 13\) \(\delta \approx 7,6 m\). 3251. \(\delta \approx \approx 13\) \(\delta \approx 13\) \(\delta \approx 7,6 m\). $y f_y'(x,y)$ no están acotadas en un entorno del punto (0,0). 3256. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 24$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 32^2 7 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 3258, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^3} = 6 (\cos x + \cos y).$ 3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial u \partial z} = 0. 3260. \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial u \partial z} = e^{xyz} (1 + 3xyz + x^2y^2z^2), 3261. \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$

 $\int_{\mathbb{R}^{3}}^{6} \int_{\mathbb{R}^{3}}^{4h} (x-\xi)^{2} (y-h)^{2} donder - \sqrt{(x-\xi)^{2} + y - h}^{2} 3262 \frac{\partial^{p} + q_{n}}{\partial x^{p} \partial x^{q}} = \rho I \psi$ 3263. $\frac{2(1-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-u)^{m+n+1}}$. 3264. $e^{x+y}(x^n+y^n+2(mx+ny)+$ + m(m-1) + n(n-1). 3265. $(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+a}$. 3266. $\sin \frac{n\pi}{n}$ 3267 f^{-1} ; $(i) + 3ij^a(i) + i^aj^{aa}(i)$, 3268, $d^au = 24(dx^a - 2dx^ady - 2dx^dy^a) + dy^a = 24$, $\frac{\partial^a u}{\partial x^a} = 24$ 3269 $d^2 = E[dx^4 - 3dx^2 dy + 3dx dy^2 + dy^4]$. 3270. $d^4u = -8(xdx + y dy)^2 \times \cos^2 (-y^4) - \frac{12}{2}(x dx + y dy) dx^2 + dy^4) \sin(x^4 + y^4)$ 3271. $d^{10}u = -8(xdx + y dy)^2 \times \cos^2 (-y^4) + \frac{12}{2}(x dx + y dy) dx^2 + dy^4) \sin(x^4 + y^4)$ $= -\frac{3! (dx + dy)^{10}}{(c-y)^{10}}, \quad 3272, \quad d^4a = -(dx^4 + 15dx^4 dy^4 + 15dx^3 dy^4 - dy^4) \times$ $\times \cos x \cosh y = 2dxdy (3dx^4 + 10dx^2dy^2 + 3dy^4) \sin x \sinh y$. 3273. $d^2u = 6 dx dy dx$ 3274. $d^{3}u = 2\left(\frac{dx^{0}}{x^{3}} + \frac{dy^{0}}{y^{3}} + \frac{dx^{0}}{z^{1}}\right)$. 3275. $d^{2}u = z^{ax + by} (adx + bdy)^{n}$. 3276. $d^{3}u = z^{ax + by}$ $=\sum_{n}C_{n}^{k}X^{(n-k)}(x)Y^{(k)}(y)dx^{n-k}dy^{k} 3277. d^{n}x=f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^{n}.$ 3278. $d^{2}u = e^{2X + 2y + 5z}$ a dx + b dy + c dz, 3280. a) Au = -u. $A^{2}u = u$. b) Au = -v. 3281 z) az = 0 b) Au = 0. 3282. a) $\Delta_{2}u = 9(x^{2} - yz)^{3} + c^{2}u$ $+(y^1-x_1)^2 \cdot z^2-x_2^2$, $1_{12}=6(x+y+z)$, b) $\Delta_1 u=\frac{1}{x^2}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\Delta_z a = -3283. \frac{\partial^2 a}{\partial x} = 2\pi t' + \pm y' + z^2 - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 2f' \left(x^2 + y^2 + z^2\right) +$ $-4x^2I^2(x^2+y^2+z^2)$ $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 4xy^2 - (x^2+y^2+z^2)$ 3264. $\frac{x}{\partial x} = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$ $f_2\left(x, \frac{x}{y}\right)$ $\frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{x}{y^2} f_2\left(x, \frac{x}{y}\right)$ $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = -\frac{x}{x^2} f_{1R}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2} f_{1R}\left(x, \frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2} f_{1R}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2} f_{1R}\left(x, \frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2} f_{1R}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2} f_{1R}\left(x, \frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2} f_{1R}\left(x, \frac{$ $-\frac{\lambda}{2} f_{11}^{2} = \frac{x}{y^{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{z} \cdot \frac{x}{u} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}} - \frac{x^{2}}{u^{4}} f_{12}^{2} = \frac{x}{u} + \frac{x}{y^{2}} f_{2}^{2} \left(x, \frac{x}{y}\right) 3285 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} =$ $-f_{1} - f_{2} - xzf_{2} + xzf_{3} - xyf_{3} - xyf_{3} - xyf_{3} - xyf_{4} = f_{11}'' - y^{2}f_{22}'' + y^{2}z^{2} + y^{$ $+ 2x^{2} + 2x^{2} + x^{2} +$ $\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} = x + x e^{\frac{x^{2}}{2}} f_{13} + x f_{12}^{2} + x e^{\frac{x^{2}}{2}} + 2x y e^{\frac{x^{2}}{2}} + f_{2}^{2} + e^{\frac{x^{2}}{2}} = \frac{\partial^{2} u}{\partial x \partial x} = v y_{13} + v e^{\frac{x^{2}}{2}} + \frac{\partial^{2} u}{\partial x \partial x} = v y_{13} + v e^{\frac{x^{2}}{2}} +$ $+ \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \frac{d^2u}{dx dx} - x^2y \int_{24}^{2} \frac{1}{4} x^2yz \int_{23}^{4} \frac{1}{4} x \int_{2}^{4} .$ 3266. $\frac{\partial^2u}{\partial x \partial y} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \frac{1}{4$ $+(x+y)f_{12}^{0}+xyf_{23}^{0}+f_{2}^{0}$. 3287 $\Delta u = 3f_{11}^{0}+4(x+y+z)f_{12}^{0}+4(x^{0}+z^{2}+z$ $+z^{4}i\int_{-2\pi}^{\pi}+6f_{4}^{2}$ 3288. $du=f^{2}(i)(dx+dy); d^{3}u=f^{2}(i)(dx+dy)^{3}$. 3289. $du=f^{2}(i)(dx+dy)^{3}$. $=f'(t) \frac{x \, du - y \, dx}{x^3}; \qquad d^3u = f''(t) \frac{(x \, dy - y \, dx)^3}{x^3} - 2f''(t) \frac{dx \, (x \, dy - y \, dx)}{x^3}.$ 3250. $du = l^2 \cdot \frac{x \, dx + \mu \, dy}{\sqrt{x^2 + a^2}}; \quad d^2u = l^2 \cdot \frac{(x \, dx + y \, dy)^2}{x^2 + a^2} + l^2 \cdot \frac{(y \, dx - x \, du)^2}{x}$ 3291. du = f'(t) dt, $d^2u = f''(t) dt^2 + f''(t) d^2t$, donde dt = uz dx + zx dy + xy dz $y = a^{2r} = 2 (z dx dy + y dx dz + x dy dz)$, 3292, du = 2f' (x dx + y dx + x dy dz)

 $d^3u = 4J^4 \cdot (x dx + y dy + z dz)^2 + 2J^4 (dx^2 + dy^3 + dz^3)$. 3293. du = of, dz + dz = 0+ $bf'_{*} dy_{*} d^{2}u = a^{3}f''_{*}, dx^{2} + 2abf''_{*}, dx dy + b^{3}f''_{*}, dy^{3}, 3294, du = f'_{*} (dx + dy) +$ $+f'_{x}(dx - dy)_{x}$ $d^{2}u = f''_{xx}(dx + dy)^{2} + 2f''_{xx}(dx^{2} - dy^{2}) + f''_{xx^{2}}(dx - dy)^{2},$ 3295. $du = \int_{1}^{r} \cdot (y \, dx + x \, dy) + \int_{2}^{r} \cdot \frac{y \, dx - x \, dy}{u^{2}};$ $d^{3}u = \int_{1}^{r} \cdot (y \, dx + x \, dy)^{3} +$ $+2f_{13}'' + \frac{y^4dx^3 - x^2dy^3}{y^2} + f_{32}'' + \frac{(y\ dx - x\ dy)^2}{y^3} + 2f_1' \cdot dx\ dy - 2f_2' + \frac{(y\ dx - x\ dy)\ dy}{y^3}$ 3296. $du = f_1 \cdot (dx + dy) + f_1 dz$, $d^2u = f_1' \cdot (dx + dy)^2 + f_{22}' \cdot (dx + dy) dz + f_{22}' \cdot dz^2$ 3297. $du = f_1' \cdot (dx + dy + dz) + f_2' \cdot (dx + dy + dz) + f_3' \cdot (dx + dy + dz) + f_4' \cdot (dx + dy + dz) + f_4' \cdot (dx + dy + dz) + f_5' \cdot (dx + dz) +$ $+2I_{x}^{'}(x\,dx+y\,dy+z\,dz);$ $d^{2}u=f_{x}^{*}\cdot(dx+du+dz)^{2}+$ $+4f_{1}^{"}$ $+(dx+dy+dz)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)+4f_{1}^{"}$ $(x\,dz+y\,dy+z\,dz)^{3}+$ $+2f_{2}'(dx^{2}+dy^{3}+dz^{2})$, 3298. $du=f_{2}'\cdot\frac{y\,dx-x\,dy}{u^{2}}+f_{3}'\cdot\frac{z\,dy-y\,dz}{z^{2}}$ $d^2u = I_{11}^{\mu} + \frac{(y dx - x dy)^2}{u^4} + 2I_{12}^{\mu} + \frac{(y dx - x dy)(z dy - y dz)}{u^2z^2} +$ $+ I_{22}^{\#} \cdot \frac{(z\,dy - y\,dz)^2}{z^2} - 2I_{1}' \cdot \frac{(y\,dz - x\,dy)\,dy}{u^2} - 2I_{4}' \cdot \frac{(z\,dy - y\,dz)\,dz}{z^2}.3299\ dx =$ $= f_1' + 2if_1' + 3i^2f_{11} dt, \quad f_{11}^2 + 4if_{12}^2 + 4i^2f_{23}^2 + 6i^2f_{24}^2 + 12i^3f_{24}^2 + 9i^4f_{24}^2 + 2i_{24} - 6if_4 dt^2$ $= 4if_1' + 4if_{12}^2 + 4i^2f_{23}^2 + 6i^2f_{24}^2 + 5if_4 dt^2 +$ + $b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy^2 + c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz^2 + 2ab \int_{-\infty}^{\infty} dx \, dy + 2ac \int_{-\infty}^{\infty} dx \, dz + 2bc \int_{-\infty}^{\infty} dy \, dz$ 3301 $du = 2f'_{*} \cdot (x dx + y dy) + 2f'_{*} \cdot (x dx - y dy) - 2f'_{*} \cdot (y dx + x dy)$ $d^2u = 4\int_{-1}^{\pi} (x dx + y dy)^2 + 4\int_{-2}^{\pi} (x dx - y dy)^2 + 4\int_{-1}^{\pi} (y dx + x dy)^2 + \frac{1}{2} (y dx + x dy)^2$ $+8f_{12}^{2}(x^{2}dx^{2}+y^{2}dy^{2})+8f_{12}^{2}(xdx+ydy)(ydx+xdy)+$ $+ 5f_{xx}^{y} \cdot (x dx - y dy) (y dx + x dy) + 2f_{x}^{y} \cdot (dx^{2} + dy^{2}) + 2f_{x}^{y} \cdot (dx^{3} - dy^{3}) +$ $+4f_{*}^{2} dx dy$. 3302 $d^{n}u = \int_{0}^{(n)} (ax + by + cz) (a dx + b dy + c dz)^{n}$ 3303, $d^{n}u =$ $= \left(a dx \frac{\partial}{\partial \xi} + b dy \frac{\partial}{\partial \eta} + c dz \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n f(\xi, \eta, \xi), \text{ donde } \xi = az, \quad \eta = by, \quad \xi = cz.$ 3304. $d^{n}u = \left[dx\left(a_{1}\frac{\partial}{\partial z} + a_{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + a_{3}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + dy\left(b_{1}\frac{\partial}{\partial z} + b_{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + b_{3}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + dz\right]$ $+ dz \left(c_s \frac{\partial}{\partial z} + c_t \frac{\partial}{\partial \eta} + c_s \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \Big]^n f(\xi - r, - \zeta) \qquad 3303. \ F(r = r^*(r) + \frac{2}{r} f(r))$ 3316. 1 3319. x_{dz} . 3331 $x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} + x$. 3332. $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial u} = 2z$. 3333. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ 3334 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$. 3335. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial u} = 0$ $1 \cdot z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad 3336. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x} = 0 \quad 3337. \quad z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ 3339. $x\frac{\partial^2}{\partial x} + y\frac{\partial^2}{\partial y} = z$ 3340. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^3} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. 3341 $1 = V^2 3$ 3342. $\frac{dz}{37} = \cos \alpha + \sin \alpha$ a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ b) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ y $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ 3343. $\frac{2}{1/|x^2|+|x^2|}$. 3344. $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$ 3345. $\frac{\partial a}{\partial t} = \cos a + \cos \beta + \cos \gamma$

igrad ut $\sqrt{3}$, 3346. igrad $u = \frac{1}{x^2}$, cos (grad $u = \frac{x_0}{x}$, tos (grad $u, y = \frac{x_0}{x}$) $\Rightarrow \frac{y_0}{r_0}$, $\cos (\operatorname{grad} u, z) = -\frac{z_0}{r_0}$, donde $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, 3347 3348 ≈ 3142 3350 $\frac{J^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \cos^2 u + \frac{d^2 u}{du^2} \cos^2 \beta + \frac{d^2 t}{dx^2} \cos^2 \gamma$ $+2\frac{\partial^{2}u}{\partial x\,\partial u}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^{2}u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha\cos\gamma+2\frac{\partial^{2}u}{\partial u\,\partial z}\cos\beta\cos\gamma$, 3352, $\frac{\partial u}{\partial u}$ x = -0.5, 3353. $a''_{xx}(x, -2x) = a''_{yy}(x, -2x) = -4.3 x - a'_{xy}(x, -2x) - 5.3 x$ 3354, $z = \chi \varphi(y) + \psi(y)$. 3355, $z = \varphi(x) + \psi(y)$. 3356, $z = \varphi_0(x) + y \varphi(x) + \dots + y^{n-1} \varphi_{n-1}(x)$. 3357, $u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z)$. 3359, $u = 1 + x^2y + y^2 + 2x^4$. 3359, $u = 1 + xy + y^3$. 3360, $u = 1 + xy + y^3$. 3362. Los ceros de la función f (x) no pueden llenar completamente un intervalo $(a, \beta) \subseteq (a, b)$, 3363 El conjunto de ceros de la función f(x) no here que ser denso en ninguna parte del intervalo (a, b), además, cada cero E de la función f(x) es simultáneamente un cero de la función g(x) y existe un limite finito $\lim_{x\to \infty} |g(x)|/(x)|$, 3364, 1) Un conjunto infinito; 2) des, . 3) a) una, b) dos. 3365 1) Un conjunto infunto; 2) cuatro, y = x, y = -x; $y = |x|, y = -|x|, 3 |\cos 4| a |\cos b|$ cuatro, 5) una, 3366 1) En minguno, 2) $0 < x, < 1, x, = \sqrt{\frac{1+1/2}{2}}$ 3) x = 0, x = 1, 4 < x = 1 $< \sqrt{1+\frac{1}{2}}$ as ramas uniformes son $y \rightarrow g \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}} z^1 x^4$ $\left(x \leq \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}\right)$ $u = e \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^2}} \leq x - \frac{1}{2}$ $\leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$), donde $\epsilon = -1$, 1. 3367. Los puntos de ramificación son (1,0), (0,0), (1,0); $y=\varepsilon$ (x) $\sqrt{\frac{V E x^2+1-(2x^2+1)}{x}}$ (|x| < 1), donde $\varepsilon(x) = -1$, 1, $\operatorname{sgn} x y - \operatorname{sgn} x$. - sgn x. 3368 El conjunto de valores de la función $\psi(y)$ tiene que tener puntos comunes con el conjunto de valores de la función f(x). 3371, $y' = -\frac{x+y}{x-y}$, $y'' = -\frac{x+y}{x-y}$ $= \frac{2a^2}{(x-y)^4} . \quad 3372, \ y = \frac{x+y}{x-y}; \quad y' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}, \quad 3373, \ y' = \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$ $v' = \frac{-\varepsilon \sin y}{(1 - \varepsilon \cos y)^3}, \ 3374, y' = \frac{y^3(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}, \ y' = \frac{y''(y'(1 + \ln x)^2 - 2(x - y)) \times y''}{x^3(1 - \ln y)^3} \rightarrow \frac{x''(1 - \ln y) + x'(y - \ln y)^4}{x^4(1 - \ln y)^3}, \ 3375, \ y' = \frac{y}{x}, \ y'' = 0, \ 3376, \ y'_1(0) = 0$ $= 1, y'_*(0) = 1.$ 3378. $y'_*(0) = 0, y'_*(0) = -\sqrt{33}, y'_*(0) = \sqrt{3},$ 3380. $y' = \sqrt{3}$ $= -\frac{2x + y}{x + 2y}, \ y'' = -\frac{18}{(x + 2y)^2}, \ y'' = -\frac{182x}{(x + 2y)^3} \quad 3381 \quad y' = 0; \ y'' = -\frac{2}{3}$ $y' = -\frac{2}{3}$ 3383, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^3} = \frac{x^2 + z^2}{z^3} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{yy}{z^3}$

 $qn = \frac{x\cos n + \lambda\cos n}{-(\sin n - \lambda\cos n)}\frac{x\cos n + \lambda\cos n}{qx} + \frac{x\cos n + \lambda\cos n}{(\sin n + \lambda\cos n)}\frac{qn}{qn}$ $\frac{(2 dx \cos v - x dv \sin v) dv}{x \cos v + y \cos u} = \frac{(2 dy \cos u + y \cos u)}{x \cos v + y \cos u} = 3405. \quad du$ $=\frac{1}{2}(dx+dy), \quad dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy), \quad d^2u=dx^2, \quad d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2.$ $3406. \ \, \frac{dy}{dx} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right), \ \, \frac{dz}{dx} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + \cdot\right) \cdot \frac{d^3y}{dx^4} = 2 \cdot \frac{d^3z}{dx^2} = 6\left(t + \frac{1}{t}\right).$ 3407 $d \ge \frac{x^2}{2}$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -3 \omega v$, $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{3}{2} (u+v) (u \ne v)$. 3407.1. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}$. $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} - \frac{34072}{3x^3} = \frac{36}{3x^3} = \frac{26}{121} \cdot 3408 \cdot \frac{d^2z}{\partial x^3} = -\frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{3409}{\partial x^2} = \frac{d^2z}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{3409}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{3409}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{3409}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{3409}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \psi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{3409}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{\cos^2 \phi + \cos^2 \phi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = -\frac{\cos^2 \phi + \cos^2 \phi}{\sin^3 \phi} \cdot \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = -\frac{\cos^2 \phi + \cos^2 \phi}{\sin^3 \phi} = -\frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = -\frac{\cos^2 \phi$ $= \frac{\sin 2v}{u^2}, \quad \frac{d^3}{dx \, dy}, \quad \frac{\cos 2v}{dx}, \quad \frac{d^3z}{dy^2}, \quad -\frac{\sin 2v}{u^2}, \quad 3410, \quad dz = 0; \quad d^3z = 0$ $=\frac{1}{2}(dx^2-dy^2) \qquad 3411 \quad \frac{dz}{dx}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{5x}{(x-2y)^2}.$ $3412 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y-z} = \frac{(x+1)}{(z+1)} \frac{y-x}{(z+1)} e^{x-z}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+2)^2} + \frac{(y+1)}{z+1} \frac{(y-x)}{(y+z)^2} e^{y-z}$ $3413. \frac{r_{2}^{2}}{i\chi} = \frac{1}{7} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} - \frac{1}{7} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \frac{\partial$ $=\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Rightarrow 3414 \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{f}\frac{\partial \psi}{\partial y} : \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = -\frac{1}{f^2}\left\{ \begin{array}{ccc} \partial \psi & \partial^2 \psi \\ \psi & \partial z \end{array} \right.$ $=\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial$ $\frac{\partial^2}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} $+\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} + $=\frac{c_4}{3\sqrt{\partial t}}\frac{\partial t}{\partial t} = 3415 \text{ a)} \frac{\partial u}{\partial x} = 35 \frac{u}{u} = \frac{\partial u}{\partial y} = 57 \frac{u}{u}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 1 - \left(\sin\frac{u}{u} - \frac{v}{u}\cos\frac{t}{u}\right),$ $\frac{\partial v}{\partial z} = v_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{6} \sin z - v_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin z}{e^{i z} (\sin z - \cos z) + 1} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{e^{i z} (\sin z - \cos z) + 1}$ $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-e^{x^{2}} - \cos v}{-(e^{x} - \cos v) + 1}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^{x} + \sin v}{-(e^{x} + \sin v - \cos v) + 1}, \quad 3418, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^{x} + \sin v}{(\sin v - \cos v) + 1},$ $\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{1}{t_1^2} \left[-\frac{\partial (g, h)}{\partial (g, z)} \left(I_1 \frac{\partial}{\partial z} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial (h, f)}{\partial (g, z)} \right] \left(f \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f$ $+I_{z}\frac{\partial}{\partial y}+I_{z}\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{2}g+\frac{\partial}{\partial}\frac{(f_{z},g)}{\partial(g-z)}\Big(I_{1}\frac{\partial}{\partial x}+I_{2}\frac{\partial}{\partial y}+I_{3}\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{2}h\Big\},$ dende $I_1 = \frac{\partial}{\partial} \frac{g(x)}{g(x)}$, $I_2 = \frac{\partial}{\partial} \frac{g(x)}{g(x)}$, $I_3 = \frac{\partial}{\partial} \frac{g(x)}{g(x)}$ $y | I = \frac{\partial}{\partial} \frac{(f(g)h)}{g(x)}$ 3417 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{I_1 \partial y}{I_2 \partial y}$, donde $I_1 = \frac{\partial_{x_1} g_1}{\partial_{x_2} g_2}$ $Y_1 = \frac{\partial_{x_1} h_1}{\partial_{x_2} g_2}$, 3418. $\frac{\partial u}{\partial y}$ $=\frac{I_1}{I} \quad \frac{\partial u}{\partial J} = \frac{I_2}{I}, \quad \frac{\partial u}{\partial Z} = \frac{I_3}{I}, \text{ donde } I_1 = \frac{\partial \left(g, h\right)}{\partial \left(g, w\right)}, \quad I_2 = \frac{\partial \left(h, f\right)}{\partial \left(g, w\right)}, \quad I_3 = \frac{\partial \left(h, f\right)}{\partial \left(g, w\right)}$ $y = \frac{D(l \mid p \mid h)}{D(u \mid p)} = \frac{h}{(u \mid p)} = \frac{1}{2} \frac{dx + l_x dy}{l_x} \cdot \text{donde } l_x = \frac{h}{(u \mid p)} \frac{l_x}{l_x} = \frac{l_x}{h} \frac{l_x}{l_x} = \frac{$ $I_{i} = \frac{\partial}{\partial I_{i}} \frac{I_{i}}{I_{i}}$ 3431 $x^{(i)} + xx^{(i)} = 0$ 3432 $x^{(i)} = 0$. 3433, $\frac{d^{2}x}{d^{2}} = I\left(\frac{dx}{dt}\right)^{4} = 0$. 3434 $\frac{d^3y}{d^2} + y = 0$. 3435. $\frac{d^3y}{dt^2} = 3\frac{d^3n}{dt^3} + 2\frac{dy}{dt} = 6y = 0$. 3436. $\frac{d^3y}{dt^3} + n^2y = 0$ 3437 $\frac{d^2y}{d^2x} + m^2y = 0.3438 \ \mu'' + \left[q(x) - \frac{1}{4} p(x) - \frac{1}{2} p'(x) \right] \alpha = 0.3439. \frac{d^2x}{dx^2} + \frac{1}{2} p'(x)$ $\Rightarrow a + 3i \frac{d}{di} + 2u = 0.3440, \frac{du}{di^2} = 0.3441, \frac{d^2u}{di} = 0.3442, \frac{d^2u}{di^2} + 8u \left(\frac{du}{di}\right)$ 3443. $t^{6} \frac{d^{3}u}{dt^{2}} + (3t^{6} + 1) \frac{d^{6}u}{dt^{2}} + \frac{du}{dt} = 0$ 3444. $t^{6} + u' + u' + \frac{A}{(a + b)^{2}}u$. 3446 $\Phi(1 \mid a, a' + a^{\dagger}) = 0$. 3447 $f(xa + a^{\dagger} + a \mid a) = 0$. 3450 $\frac{dr}{d\theta} = r$. 3451 $r^2 = \frac{1 - \sin 2\phi}{\sin 2\phi} r^2$, 3452, $r(r^2 + 2r^2 - rr^2) = r^2$ 3453. $\frac{r^2}{r}$ 34.4. $K = \frac{r^2 + 2r^3 - rr^6}{r}$, 3455. $\frac{dr}{dr} = \mu r^4 \frac{dr}{dr} = -1$ 3456. $\omega = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\psi}{dt} \right)$. 3457) ' ,) ' = $\int f' = \frac{h}{\sqrt{2}}$ 3458 , $\phi(x + y)$, donde ϕ es una. . On the differentiable arbitraria 3459, z=q $\psi^* \leftarrow \varphi^2$) 3460, $z=\frac{\lambda}{q}$ $\psi = \gamma$). 3461 $z = x \sqrt{\frac{g}{x}}$ 3462 $\frac{dz}{\partial z} = \frac{dz}{\partial y} = e^2 \sin y$ 3463 $\frac{dz}{\partial z} = \frac{dz}{\partial z}$ 3464. $\frac{dz}{\partial z} = \frac{1}{2}$. 3465. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{z}{v} \cdot \frac{z^{t} + u}{z^{t}}$ 3466. $2u + v - z = \frac{\partial z}{\partial u} + (z + 2v - z) \frac{\partial z}{\partial t} = u - v - z$ $3467 \frac{e^{x+y}-z^{z}}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial z}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial z}} \qquad 3468. \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{2}}{u^{2}+v^{2}}, \quad 3469. \frac{\partial u}{\partial z}=0. \quad 3470, \frac{\partial x}{\partial u}=0$ $-\frac{x}{y} = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v} \quad 3472. \quad A = \frac{x^2 - 2xu + u^2 \left[\frac{\partial x}{\partial u} \right]^2 + \frac{\partial x}{\partial v}}{x^4 \left(u \frac{\partial x}{\partial v} + v \frac{\partial v}{\partial v} \right)}$ $3473 \frac{\partial_{a}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + 3u + (e^{\chi} + e^{\eta} + e^{\zeta}) = 0 \quad 3474. \quad \frac{\partial_{a}}{\partial u} = 0. \quad 3475. \quad \frac{\partial u}{\partial u} = 0.$ 3478 $\frac{cw}{c\hat{\sigma}} = 0$ 3477 $u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{v}}\right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial v}$ 3478 $\frac{e^{\pi u} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial \hat{v}} \cos^2 v\right)}{\partial w}$ 3479. $A = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}$. 3480. $\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\xi \eta}{\xi}$. 3481 $\omega = \frac{\partial u}{\partial \phi}$ 3482. $\omega = \frac{\partial u}{\partial r}$ 3483. $u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{\psi}}\right)^2$ 3484. $u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{\psi}^2}$ 3485. $u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \overline{\psi}^2}$ $= r^{2} \frac{\partial^{2} u}{\partial r^{2}} \quad 3486 \quad w \quad \frac{\partial^{2} u}{\partial \phi^{2}}, \quad 3487 \quad I = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad 3488, \quad u = \psi \left(x + c \right) + c = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^{2} u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial v}{\partial r} \right).$

 $+\psi(x+\alpha t)$, dende ϕ y ψ son functiones arbitrarias 3489. 3 $\frac{\partial^2 z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$ 3490. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$ 3491 $a\left(\frac{d^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial u} + c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{z}{c_1}\right)$ 3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$. 3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + m^2 e^{2\theta} x = 0$. 3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial u} \partial v$ 3495. $\frac{\partial^2 z}{\partial u} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial b}$ 3496. $\frac{\partial^2 z}{\partial u} = \frac{2}{u(4)} \frac{\partial z}{\partial b}$ 3497. $(u^2 - 1) \frac{\partial^2 z}{\partial b}$ $= u \frac{\partial z}{\partial u} \qquad 3498. \quad \frac{\partial^4 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \frac{\partial z}{\partial u} \qquad 3499. \quad \frac{\partial^3 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2 + v^2} \left(v \frac{\partial z}{\partial u} - u \frac{\partial z}{\partial v} \right) \qquad 1$ $3500 \left(1 - \frac{dz}{\partial t}\right) \frac{d^2z}{\partial u} + \frac{dz}{\partial u} \frac{d^2z}{\partial u^2} + 1, \quad 3501 \quad u = \psi_1 x + \lambda_1 y) + \psi_1 (x + \lambda_2 y), \quad double$ $\lambda_1 y \lambda_2$ son las raíces de la ecuación $A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$ 3503. a) $\Delta a = \frac{d^2 y}{dx^2}$ $\frac{1}{\tau} \int_{r}^{r} \frac{du}{dr} \frac{1}{\tau} \frac{du}{dr} + \frac{2}{r} \frac{d^{2}u}{dr^{2}} + \frac{2}{r^{2}} \frac{d^{2}u}{dr^{2}} + \frac{1}{r^{3}} \frac{du}{dr}, \quad 3504. \quad u \frac{d^{2}}{du^{2}} + \frac{\partial u}{\partial r}$ $+\epsilon u$ 6. 3505. $A = X \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} - Y \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}$ 3508. $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(t \frac{d}{d\xi} \right) + \frac{\partial u}{\partial X}$ $+ \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = 2 \left(\xi \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta} + \xi \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta} + \eta \zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta} \frac{1}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta}$ $+\frac{\partial z}{\partial u_{+}^{2}}+\frac{\partial^{2}z}{\partial u_{+}^{2}}=0 \quad 3510, \frac{\partial^{2}u}{\partial \xi^{2}}=0 \quad 3511 \quad \Delta u=-\frac{\partial u}{\partial r_{f}}+\frac{1}{r^{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\times$ $\times \frac{du}{\partial t} = \Delta_{x^{2}} - \frac{1}{r^{2}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{s_{1} \gamma_{1}} \frac{\partial}{\partial t} \left(s_{1} \gamma_{1} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{s_{1} \gamma_{1}^{2} \gamma_{1}} \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} \right]$ 3512. $+\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{\partial^2L}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 0$ 3514. 3515. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$, 3516. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial u} = 2\omega$, 3517. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \left(\frac{\omega}{u} - 1\right)^{\alpha} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}$ 3518. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 = 0.$ 3519. $\frac{\partial^2 w}{\partial u} = \frac{w}{4 \sin^2 (u - u)}$, 3520. $\frac{Yu}{2u}$, 1 $+\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0. \quad 3523. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \omega} = 0 \quad 3524. \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial$ $+ \left. z^{\omega} - 1\right) \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] 3526. x - y \phi(z) + \psi(z). 3527. A (3.1)$ $\times \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} + 2B(X,Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X} + C_X X Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0.$ 3528 $\frac{\pi}{2} \frac{A_0}{A_0} \frac{A_0}{A_0$ $\frac{u-y_0}{s \log s \log t_0} = \frac{z-z_0}{\cos t_0}, \ z-z_0 = (x-x_0) \cos a \lg t_0 + (y-y_0) \sin a \lg t_0, \ donde$ $x_0 = a \cos a \cos t_0$, $y_0 = a \sin a \cos t_0$, $z_0 = a \sin t_0$, 3529. $\frac{x}{a} + \frac{z}{a}$ $ax = cz = \frac{1}{2} (a^2 + c^2).$ 3530 $\frac{x-1}{1} = \frac{b-1}{2} = \frac{c-1}{2}, \quad x+y+2, \dots, x+y+2$ 3531 $x = \frac{1}{2} + \frac{y}{3} = \frac{z-3}{z-1}$, 3x + 3y - z = 3 3532, x + z = 2, y + z = 3x - z = 0. 3533. $M_3 \left(-1, 1, -1 \right) M_3 \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{9} - \frac{1}{27} \right)$. 3537 $f_8 (-1)$

7, 4

 $r_x(x_0, y_0)\cos \alpha + \int_{\mathcal{P}} (x_0, y_0) \sin \alpha$, 3538. $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{16}{243}$ $-5 \quad 0: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{x-5}{1} \qquad 3540. \ 3x + 4y + 12x = 169; \ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{x}{1}$ 3541 $z = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} x + a = \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} = \frac{\frac{z}{4}}{2}$ 3542. $ax_0x = aq_0q$ $+ cz_0z = 1$, $\frac{x}{ax_0} \frac{x_0}{ax_0} \frac{y_0}{by_0} \frac{y_0}{cz_0} = 3543$, x + y = 2z = 0. $= \frac{y}{x} + \frac{1}{x} + \frac{y}{x} + \frac{$ 3545. $\frac{x}{a}\cos\phi_0\cos\phi_0 + \frac{y}{b}\cos\phi_0\sin\phi_0 + \frac{z}{c}\sin\phi_0 - 1$ $\frac{x\sec\phi_0\sec\phi_0 - a}{bc}$ $\frac{y \sec \psi_0 \csc \phi_0 - v}{ac} = z \csc \psi_0 \qquad 3546. x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0 - z \lg x = 0,$ $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_0 \in \mathbf{c} \cdot \mathbf{q}_0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}_0} = \mathbf{s} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{q}_0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}_0} = \mathbf{s} - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}_0}$ 3547, as $\sin v_a - ag \cos v_b + u_c z =$ $= a_{3} v_{1} - \frac{x - p + \cos v_{0}}{a_{2} u v_{0}} + \frac{y - u_{1} \sin v_{1}}{a_{1} u v_{0}} + \frac{y - av}{u_{0}}, \quad 3549 \frac{3x}{u_{0}} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 2$ 3549 $A = \pm 0$] $\overline{2} = 2$] $\overline{2}$, $B(\pm 2) = 4 \pm 2$, $C = 4 \pm 2$ in 3550, $x = 10^3$, $a = \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{d}$ donde $d = \sqrt{d^2 + b^2 + c^2}$ 3551, z = -6; $z = \frac{c^2}{2}$ 3556 $x^2 = y^2 = xy = 1$ x = 0; $2y^2 = 4z^4 = 4$ x = 0, $-1z^4 = -1$ 3557 $\delta < \epsilon$ 3. 3559. $\epsilon \le 6 - \frac{26\pi a}{2} = 3203. \frac{1}{6} - \epsilon = 20$ $z = x_0 + y_0 + z = \frac{1}{\sqrt{z_0}} \qquad \text{b) } x_0 + y_0 = z_0 \qquad \frac{1}{\sqrt{z_0}}, \qquad z) \text{ on a crownial of } z$ x + y + z = 0, $x^2 + y^2 + z^2 + z$, $3564 = -\frac{x^2}{a^4} + z^2 + z^$ 3565. $x^2 + y^2 = p^2$ 3567. $y = \pm x$ 3568. $y^2 = 4ax$. 3569. No existe envolve of 3570. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{2}{3}} \cdot 3571$. $|x_y| = \frac{5}{12}$ 3572. $|x_y| = \frac{12}{3} - \frac{gx^2}{3574}$ 3574. a) y = 0es la envolvente (lugar geométrico de los puntos de inflexión), b) y=0 es la envolvente, c) y = 0 es el lugar geométrico de los puntos singulares (puntos de retroceso), d) v = 0 es el lugar geométrico de los puntos dobles, v = a es la envolvente 3575. El toro 3516. $x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \beta + x^2 \sin^2 \gamma =$ $(3^{2} + g^{2} + R)^{2} + z^{3} = r^{2}$ $=2xy\cos\alpha\cos\beta$ = $2xx\cos\alpha\cos\gamma$ = $2yx\cos\beta\cos\gamma$ = 1. 3577. $[xyx]=\frac{x}{4\pi}\frac{1}{1}\frac{1}{3}$ 3578. $|z \pm \sqrt{x^2 + y^2}| = e^{\sqrt{2}}$. 3579. $\left| \begin{array}{ccc} x & y & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} y & z & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & y_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} y & z & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2 \\ z_0 & x_0 & |^2 + \left| \begin{array}{ccc} z & x & |^2$ $=5+2(x-1)^3-(x-1)(y+2)-(y+2)^3, 3582. \ f(x,y,z)=3, (x-1)^3+(y-1)^2+(x-1)^3+(x-1)(y-1), (x-1)(y-1), (x-1)(y-1)$ $\frac{+1}{3585}$ $x^y = 1 + (x - 1) + x - 1 + (x - 1) + R_1(1 + 0) + (x - 1) + (x - 1)$ |u| < b < 1 donde k $(x | y) = \frac{1}{6} x^y \left(\left(\frac{u}{x} dx + \ln x dy \right)^2 + 3 \left(\frac{u}{x} dx + \dots dn \right) \right)$ $> \left(-\frac{\pi}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx \, dy \right) + \left(\frac{2\eta}{x^2} dx^2 + \frac{3}{x^2} dx^2 \, dy \right)$ y $dx = x - 1 \, dy = b - 1$ 3586. $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$. 3587. a) $1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. b) $\frac{1}{4}$ (1) +x-xy. 3588. -(xy+xz+yz). 3589. $F(x,y)=\frac{h^2}{3}(f_{xx}^2+f_{yy}^2)+$ $+\frac{h^4}{4d!}(f_{xxxx}^{(V)}+f_{yyyy}^{(V)})+\cdots) \quad \text{3690.} \quad F\left(q\right)=f\left(x,y\right)+\frac{q^2}{q}(f_{xxx}''(x,y)+f_{yy}'(x,y)).$ $\Delta_{XY}f\left(x,-y\right)=hk\left[\frac{\partial^{2}f}{\partial x\,\partial y}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{h-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!\left(n-m\right)!}\frac{\partial^{n}f\left(x,y\right)}{\partial x^{m}\partial y^{n-m}}\right]$ 3592. $F(Q) = f(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{Q}{2}\right)^{2n} \Delta^n f(x, y), \quad \text{donde} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ .$ 3593. $1 + mx + ny + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + mnxy + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \cdots$ $\{(x) < 1, |y| < 1\}, \quad 3594. \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1}(m+n-1)!}{m!^{n}!} \chi^{m}y^{n}$ $(|x| + |y| < 1). \qquad \qquad 3595. \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \ge 0} (-1)^m \frac{x^m y^{1+1}}{m! (2^n + 1)}$ $x_1 < + \infty, |y_1 < + \infty)$ 3593. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i} \frac{x^{i} - x^{i}}{m^{i} + n}$ $(|x|<+\infty,|y|<+\infty),|x|=0,\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}(|x|<+\infty),$ $||u'|<+\infty), \qquad \text{3598.} \ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ \frac{x^{nn}y^{3n}}{(2n)!} \ (|x|<+\infty), \ |y|<+\infty),$ 3599. $\sum_{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x^2+y^2<+\infty).$ 3600. $\sum_{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{x^m y^m}{mn} (|x| < 1, |y| < 1).$ 3601. f(x, y) == $=1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^{2}}{2}\right)y, \hspace{1cm} 3602. \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-.)^{m}\left(y+1\right)^{n}}{m!^{n}!} \hspace{0.1cm} (|x|<\frac{1}{4},m)$ $|y| < +\infty$), 3603. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)](y-1)^n$ 0 < y < 2) 3604. $z = 1 + (2(x-1) - (y-1)) - [8(x-1)^2 - 10(x-1)(y-1) +$ $+3(q-q)^2]+\cdots$ 3605 (0, 0) es un punto aislado si $a \le 0$; es un punto de retroceso si a = 0, es un punto doble si a > 0. 3606 (0, 0) es un punto doble 3607 (0, 0) es un punto aislado 3608. (0, 0) es un punto aislado 3609 (0, 0) es un punto dobie. 3610, (0, 0) es un punto de retroceso (de segunda especie). 3611 (0, 0) es un punto doble. 3612, Si $a \le b \le c$, la curra consta de un óvalo y de una rama infinita, si $a = b \le c$, A(a, 0) es un punto assiado, si $a \le b = c$, B(b, 0) es un punto doble; si $a = b \times c$, A(a, 0) es un punto de retroceso. 3613. (0, 0) es un punto doble. 3614 (0, 0) es un punto de retroceso. 3615. (0, 0) es un punto de terminación 3616 (0, 0) es un punto anguloso. 3617 $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ son puntos de discontinui dad de 1 a especie 3618 x = 0 es un punto de discontinuidad de 2.º especie 3619. x = 0 es un punto doble 3620 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ es un punto de retroceso. 3621, $z_{min} = 0$ para x = 0, y = 1 3622 No hay puntos de extremo. 3623. Minimo no estricto z = 0 en los puntos de la recta x - y + 1 = 03624, $z_{max} = -1$ para x = 1, y = 0 3625, $z_{max} = 108$ para x = 2, y = 3, mínuro no estricto z = 0 para x = 0, $0 \le y \le 6$, máximo no estricto z = 0para x = 0, $-\infty < y < 0 y 6 < y < +\infty 3626 z_{min} = -1 para <math>x = 1, y = 1$ 3627 $z_{min} = -2$ para $x_1 = -1$, $y_1 = -1$ y $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; no hay extremo para x = 0, y = 0, 3627.1. Máximo z = 0 para x = 0, y = 0; mínimo z = -1para $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \pm 1$, punto de ensil, adura z = -1 para x = 0, $y = \pm 1$ y punto de ensilhadura $z = -\frac{1}{9}$ para $\tau = -\frac{1}{9}$, y = 0.3628 Minumo $\tau = 30$ para x = 5 y = 2 3629, $z_{min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ para $\frac{x}{a} = -\frac{b}{b} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $z_{\text{max}} = \frac{ab}{5\sqrt{2}} \text{ para } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ 3630. $z_{\text{max}} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ para $x = \frac{a}{c}$ $y = \frac{b}{c}$. Si c > 0; $c_{\min} = -Va^2 + b^2 + c^2$ para $x = \frac{a}{c}$. $t = \frac{b}{c} \sin c < 0$, no hay extremo ti c = 0, $a^2 + b^2 \neq 0$, 3631, $z_{max} = 1$ para x = 0, y = 0 3632 Minimo z = 0 para x = 0, y = 0; punto de ensiladura $z = \frac{1}{2}e^{-z}$ para $z = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. 3633. Punto de cualisdura $z = e^3$ para x 1.) 2 3634 Max.mo $e^{-1.3} \approx 2.26 \cdot 10^{-6}$ para x = 1. z = 3, minumo $z = -26 e^{-12} \approx -25 51$ para $z = -\frac{1}{98}$, $y = -\frac{3}{98} - 3635$ Minimo $z = 7 - 10 \ln 2 \approx 0.0685 \text{ para } x = 1 = 2$ 3636. $z_{max} = \frac{3}{9} \sqrt{3}$ para $x = \frac{\pi}{3}$

 $y = \frac{\pi}{6}$, 3637. $z_{min} = -3 \frac{\sqrt{3}}{8} p_{min} = 2\pi \frac{2\pi}{3} z_{min} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} p_{min} = q_{min}$ 3638. Punto de ensiliadora $z = -1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \pi \approx 1.70$ para x = 1y = 1.3639 Minimo $z = -\frac{1}{2z} \approx -0.184 \text{ para } x = y = +\frac{1}{\sqrt{2c}} \approx -1.184 \text{ para}$ máximo $z = \frac{1}{2z}$ para $x = -y = \frac{1}{\sqrt{2z}}$, no hay extremos en los pun tos estecionarios x = 0, $y = \pm 1$ y $x = \pm 1$, y = 0 3640. Puntos estacionarios $x = \frac{\pi}{12} (-1)^{m+1} + (m+n) \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{12} (-1)^{m+1} + (m-n) \frac{\pi}{2} (m, n)$ $\pm 1, \pm 2,$). Extremo $z = m\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)(-1)^{m+1} + 2 \cdot (-1)^n$ si m y n son de paridad distinta (máximo si m es impar y n es par, mínimo si m es par y n es impar), no hay extremo si m y n son de igual paridad 3641, zmin = 0 para x = 0, y = 0, máximo no estricto $z = e^{-1}$ para $x^2 + y^2 = 1$ 3642. $u_{m,n} = -14$ para x = -1, y = -2, z = 3 3643 Minimo u = -6913 para x = 24, y = 144, z = -1.3644, Minimo y = 4 para $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1.3645$, $\mu_{\text{max}} = \frac{a^2}{7^2}$ para x y · z · $\frac{a}{7}$, extremo no estrecto $\mu = 0$ para y $x \neq 0, x \neq 0, x + 2y + 3z \neq a.$ 3646. Minuto $x = \frac{15a^{16}}{4} \sqrt[3]{\frac{a}{16b}}$ $x = \frac{1}{2} \frac{15}{1} \sqrt{6a^{14}b} \quad y = \frac{1}{4} \sqrt[5]{16a^4b}, \quad z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4b^4}{4}}, \quad 3647. \quad Maxumo \quad u = 4$ para $x = y = z = \frac{\pi}{2}$, mammo en la frontera u = 0 para x = y + z = 0 $x = x = x + \pi = 3648$ $u_{\text{max}} = \left(\frac{2}{n^2 + n + 2}\right)^{\frac{n^2 + n + 2}{2}}$ para $x = x_2$ $r_n = \frac{2}{n^2 + n + 2}$ 3649. Minimo $n = (n + 1) 2^{n+1}$ para $r_1 = 2^{n-1}$ $x_i = x_1^n + \dots + x_n - x_1^n$. 3650 Los números $a_i = x_1, x_2, \dots + x_n$ b forman una progresión geométrica de razón $y = \sqrt[a+1]{\frac{b}{a}}$. 3151. Mínimo $z_1 = -\frac{1}{a}$. máximo $z_2 = 6$ para x = 1, y = -1 3652, $z_{min} = -4 + 2\sqrt{6}$ para $x = y = -(3 + \sqrt{6}); z_{\text{max}} = 2\sqrt{6} - 4 \text{ para } x = y = -(3 - \sqrt{6}) 3653 \text{ M/nimo}$ no estricto $z = -\frac{a}{2 \sqrt{2}}$ para $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}$ z < 0; maximo no es tricto $z = \frac{a}{2\sqrt{10}}$ para $x^2 + y^2 = \frac{3a^2}{8}$, z > 0. 1654. $z_{max} = \frac{1}{4}$ para

 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 3655. $x_{min} = -\frac{\sqrt{u^2 + b^2}}{\sqrt{ab}}$ para $x = -\frac{bx}{\sqrt{u^2 + b^2}}$ $y = -\frac{az}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad z_{\text{mark}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|} \quad \text{para} \quad x = \frac{az}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{az}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$ donde $t = sgn ab \neq 0$, 3656. $R_{max} = \frac{a^2b^3}{a^2+b^2} para x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 3657, $z_{min}=\lambda_1$ $z_{max}=\lambda_2$, Conde λ_1 y λ_2 son as raices de la ecuación $A - \lambda_1 (C - \lambda_1) - B^2 = 0$ y $\lambda_1 < \lambda_2$. 3657 1 Máximo $z = 105 \frac{1}{4}$ para $x = \pm 1$, $y = \pm 3$, mínimo z = -50 para $x = \pm 2$, $y = \pm 3$, 3658. Extremo $z = 1 + \frac{(-1)^k}{1-2}$ para $z = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ $k=0,\pm1,\pm2,$) (máximo si k es par, y mínimo si k es impar) 3659. $u_{\text{min}} = 3 \text{ para } x = -\frac{1}{3}$ $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$ $u_{\text{max}} = 3$ para $x = \frac{1}{3}$ $a = -\frac{2}{3}$, $a = \frac{2}{3}$ 3660, $a_{m,n} = \frac{a^{m-n+1}m^m\pi^np^n}{2^n\pi^np^{m+n+p}}$ para $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{a}{n + n + p}$ 3661 who solves 0 x = 0 z = 1 $v_{\text{max}} = s^2 \text{ para } x = \pm a, y = 0, z = 0$ Ref2 * A = $\frac{a}{b}$ para $x = b = z = \frac{a}{b}$ 1663. $u_{min} = -\frac{1}{310}$ para $x = -\hat{y}_{t}$ $\hat{y}_{t} = \hat{y}_{t}$ $y = -\frac{2}{16}$ $y = 2 + \frac{1}{16}$ $x = -\frac{3}{36}$ para $x = y = -\frac{1}{16}$ $z = \frac{2}{16}$, $z = z = -\frac{1}{16}$, $y = z = -\frac{1}{16}$ $x = \frac{2}{1.6}$. 3663 1 Máximo condicionado u = 1 para x = 1.3 = 1.3 = 1.3 = 1.3 $u_{\text{max}} = \frac{1}{8}$ para $x = b = z = \frac{\pi}{6}$ 3665 $u_{\text{man}} = \lambda_1 y u_{\text{max}} = \lambda_2$ donde $\lambda_1 y$ $\lambda_2 \text{ son ras rather de la sequación} \quad \mathbf{A}^k = \left(\frac{s\cdot \eta^2 \, \alpha}{\alpha^2} + \frac{s\cdot s^2 \, \beta}{b^2} + \frac{s\cdot \eta^2 \, \gamma}{c^2}\right) \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 \epsilon^2} + \frac{1}{2}\right)$ $+ \frac{\cos^2\beta}{\sigma^2c^2} + \frac{\cos^2\gamma}{\sigma^2b^2} = 0 \quad (\lambda_1 < \lambda_2).$ 3605, $u_{\min} = \frac{R^2 \left(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \nu \right)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$; $u_{\max} = R^9$. $= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right)^{-1}, \text{ park } x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \right)^{-1} \qquad (i=1, 2, \dots, n), 3658, u_{\min} = \frac{a^p}{a^{p-1}}.$ para $x_i = \frac{n}{n}$ (i = 1, 2, ..., n) 3669 $u_{\min} = \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\alpha_j \beta_j}\right)^2$ para $x_i = \frac{1}{n}$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$. 3670, $u_{\min} = \frac{1}{n}$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$. 3670, $u_{\min} = \frac{1}{n}$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$. 3670, $u_{\min} = \frac{1}{n}$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$. 3670, $u_{\min} = \frac{1}{n}$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$. 3670, $u_{\min} = \frac{1}{n}$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$. 3671. Los extremos $u = \lambda$ se determinan por las ecuaciones $\left[a_i + \lambda \delta_{ij}\right] = 0$, donde $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$. 3675. $\ln i z = -5$, sup z = -2. 3677. $\ln i z = 0$ sup z = 1 3678. $\ln u = 0$, 3678. $\ln u = -\frac{1}{2}$; sup $u = 1 + \sqrt{2}$. 3680. $\ln u = 0$; sup u = 1 $\frac{1}{2}$; sup $u = 1 + \sqrt{2}$. 3680. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

 $x_{i} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_{1}} \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{1}{\alpha_{2}} \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{1}{\alpha_{1}} \frac{1}{\alpha_{2}} + \frac{1}{\alpha_{n}}}{\frac{1}{\alpha_{1}} \frac{1}{\alpha_{2}} + \frac{1}{\alpha_{n}}} (i = 1, 2, ..., n) \text{ donde } \alpha_{i} (i = 1, 2, ..., n)$

son los exponentes respectivos de las potencias, el valor mínimo de la suma es

son los exponentes de la caria
$$\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}} = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1$$

son $\sqrt[4]{2}\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{2}$. 3688. $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{3x}}$ donde R es el radio de la superficie cilíndrica y H es su generatriz

3689.
$$x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i}, \quad y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i}, \quad z = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} z_{i}}, \quad \text{donde}$$

$$1 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}.$$
 La suma minima de los cua.

drados de las distancias es igual a $z=2N+\sum_{l=1}^{n}(x_{l}^{l}+y_{l}^{l}+z_{l}^{r})$. 3690

Il lingulo de inclinación de las generatrices del cono respecto de la base es gual a a csin $\frac{2}{3}$ 3691. El ángulo de inclinación de las caras laterales de las parámides respecto de sus bases es igual a arcsin $\frac{2}{3}$, 3692. Los lados del rectángulo son $\frac{p}{3}$ y $\frac{p}{3}$ 3693. Los lados del triángulo son $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ y $\frac{3p}{4}$ 3694. Las dimensiones del paralelepípado son $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ y $\frac{R}{\sqrt{3}}$, 3695. La altura del paralelepípado es igual a $\frac{1}{3}$ de la altura del cono, 3696. Las dimensiones del paralelepípado son $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ y $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 3697. La altura del paralelepípado es $h=l\sin\alpha$, $\frac{1}{2}\log\alpha-Vl$, si $\alpha \ge \arctan Vl$, y h=0 si $0 < \alpha < \arctan Vl$. 3698. Las dimensiones del paralelepípado son a,b y $\frac{3p}{4}$ $\frac{4p}{4}$ $\frac{B_{10}+C_{10}+D_{10}}{14^{2}+B^{2}+C_{10}+D_{10}}$ 3700 $a=\frac{1}{2}$ $\frac{x_{1}-x_{2}y_{1}-y_{1}z_{1}-z_{2}}{m_{1}}$ $\frac{n}{n}$ $\frac{p}{n}$ $\frac{n}{n}$ $\frac{n}{n}$ $\frac{n}{n}$ $\frac{p}{n}$ $\frac{n}{n}$ $\frac{n}{n}$

dende $A = \sqrt{\frac{m_1 - m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_3 + n_4}} = 3700 \text{ d} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_1 - n_2 + n_3}{m_4 + n_3 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_3}{n_4 + n_3 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_3}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_3}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_3}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_3}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_2 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4 + n_4}{n_4 + n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4}{n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4}{n_4}} = 3701 \sqrt{\frac{n_1 - n_4}{n_4}} =$

Los cuadrados de los semiejes $a^2=\lambda_1+y-b^2=\lambda_2$ son raíces de la ecuación $(1-\lambda A)(1-\lambda C)-\lambda^2 B^2=0$. 3703 Los cuadrados de los semiejes $a^2=\lambda-b^2=\lambda_2+y-c^2=\lambda_3$ son las raíces de la ecuación

3703. 1 02 cos2 0 + 02 cos2 B + 64 cos2 8

3707 El ángulo de incidencia es igual a arcsin $\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$: la desviación del rayo es igual a 2 arcsin $\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ — α . 3708. Los coeficientes buscados a y b se determinan por las ecuaciones a(xx) + b(x) = [xy], a(x1) + bn = [y1], donde $[xy] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ etc El problema tiene solución determinada si $\sum_{i \neq 1} (x_i - x_i)^2 = 0$ 3709. Ig $2\alpha = \frac{2(x + y_1)}{(x^2 - x_1)^2} + \frac{1}{2} \cos\alpha + \frac{1}{2} \sin\alpha$ donde $x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ etc son los valores medios 3710. $4x + \frac{1}{2}$, $\Delta_{min} = \frac{1}{2}$

3711. F(y) = 1 51 ∞ < y < 0 F(y) 1 2 y s 10 ≤ y ≤ 1 F(y) st $1 \le y \le +\infty$, 3712. F(y) es discontinus para $y \ge 0$ 3713 a) $\frac{\pi}{4} = 1 - 1$. c) $\frac{8}{3}$ d) $\ln \frac{2z}{1+z}$ 3713.1. 0. 3715. No es posible. 3716 No es posible 3m7. $F'(x) = 2xe^{-x^2} - e^{-x^2} - \int_0^{x^2} g^x e^{-xy^2} dy$ 371B. 2) $\rightarrow (e^{\alpha \sqrt{3} \ln \alpha} + e^{\alpha \sqrt{1-x^2}}) \cos \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx,$ $b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+a}\right)\sin a,b+a)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+a}\right)\sin a(a+a),\quad \ a)\cdot\frac{2}{a}\ln(1+a^{b});$ d) $f(\alpha, -\alpha) + 2\int_{-1}^{2} f'_{\mu}(\alpha, \nu) dx$, dende $\alpha = x + \alpha$, $\alpha - x - \alpha$. e) $2\alpha \int_{0}^{a^{2}+a^{2}} \sin(y^{2}+\alpha^{2}+\alpha^{2}) dy + 2\int_{0}^{a^{2}} \sin 2x^{2} \cdot \cos 2\alpha x dx = 2a \int_{0}^{x} dx \int_{0}^{x} \cos(x^{2} + y^{2} - \alpha^{3}) dy, \qquad 3719. \quad F^{*}(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$ 3720. F''(x) = 2f(x) si $x \in (a, b)$, y = F''(x) = 0, si $x \in (a, b)$ 3721. $F''(x) := \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}$, donde $\Delta^2 f(x) := f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ 3722. $F^{(n)}(x) = (n-1)! f(x)$. 3723. $4x - \frac{11}{3}$. 3724. 0,934 + 0,428x (18ptox) madamente!) 3725. $\frac{dE}{dk} = \frac{E - F}{k} + \frac{dF}{dk} = \frac{E}{k + 1 - k^2} - \frac{F}{k}$ 3729. $F'_{xy}(x, y)$ $= x(2-3y^2) f(xy) + \frac{x}{y^2} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 y(1-y^2) f'(xy).$ 3732. $\pi \ln \frac{|a|^{-1/2} + b}{y^2}$ 3733. 0, si $|a| \le 1$, $\pi \ln a^2$, si |a| > 1. 3734. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln (1 + a)$ 3735. $\pi \arcsin a$. 3736. $\frac{\pi}{2} \ln (1+\sqrt{2})$. 3737. $\ln \frac{b+1}{a+1}$. 3738. a) $\arctan \frac{b-a}{1+ia+11(b+1)}$, b) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^4+b+2}{a^2+2a+2}$ 3741. $a \ge 0$. 3742. $\operatorname{Max}(p, q) > 1$. 3743. $\left| \frac{p-1}{a} \right| < 1$ 3744 f3745. n < 0 a $n > \frac{1}{2}$. 3748. $p > \frac{1}{2}$. 3747. Es convergente para p > 1 y para $n=-\frac{2n-1}{2}\pi$ (n=1, 2, ...) 3748 Es convergente para n>43747, Ea convergente si p > 1, 3780. Es convergente sî $-1 \le n \le 2$ 3755 1 a) Es uniformemente convergente b) converge no uniformemente

3755.2 Corverge no amisermemente. 3756. Es am ormemente convergen c 3757 Es un fermemente convergen e 3758. Es uniformemente convergen e 3759 Converge no un formemente 3760 Es un ormemente convergente 3760 I Es in formemente converges e 3761 Es aniformemente convergen a 3762 Converge na up fo cemente 3763 a Es uniformeniente con espenie bi converge ne office er en e 3764 Converge no un formemente 3765 Es un form mente convige te 3765 1 h = 1059 3766 a) Es un for memente onvergen e bi convente no uniformemente 3767. Es uniforme mente convergente, 3768. Converge do un comemente, 3769. Es un forme mente convergente. 3770. Es uniformemente convergente. 3772 No

 $3776 \frac{1}{3}$, $3776 2. 1 3778 <math>a = \pm 1.3779$ Es continua 3780. Es continga 3781 Est intimua 3782, Escentinus, 3783, Es discontinus para $\alpha=0$.

3764
$$\frac{1}{2}$$
 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

3799.
$$(1 \alpha) + (1 \alpha)$$

$$+\beta + \beta - \alpha^{3} + \beta^{2} + \alpha + \beta + \alpha + \beta = \alpha > 0, \ \beta > 0.$$
 3803, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$3504 \quad \sqrt{\frac{1}{a}} e^{-\frac{ac_1-b^2}{a}} \quad 3305 \quad + \frac{2b^2}{a^2} \frac{a_1 - 4abb_1 - 2a^2c_1}{a^2} \quad \sqrt{\frac{1}{a}} e^{-\frac{ac_1-b^2}{a}}.$$

3606
$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} e^{i\alpha}$$
. 3807 $\sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})$ 3803. $\sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})$ 3803. $\sqrt{2} \times$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} = 3810, \frac{b}{4a+3}, \frac{b}{a} = 3811, (-1)^a \frac{\sqrt[4]{a}}{2^{aa+1}} \cdot \frac{a^{aa}}{ab^{aa}} (e^{-ab}).$$

3812. $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta$ 3812.1 La función es impar Para x>0 tiene mínimos en los puntos $2k\pi$ y máximos en los puntos $(2k-1)\pi$, donde k=1 3 Las asíntotas son $y=\frac{1}{2}$ quando $x\to+\infty$ e $y=-\frac{\pi}{2}$ quando $x\to-\infty$

3815. 0. $|\alpha| |\alpha| < |\beta|$, $\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\alpha, -\alpha) |\alpha| = |\beta|$, $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha, -\alpha) |\alpha| = |\alpha|$; 3816. $\frac{1}{2} sgn \alpha_n$ 3817. $\frac{\pi}{2} |\alpha|$ 3618. $\frac{3\pi}{8} \propto |\alpha|$, 2219. $\frac{\pi}{4}$ 3020 $\frac{9}{8}$, 7 3821. $\frac{\alpha}{\lambda}$ 3822 $\frac{\alpha + \beta}{\lambda}$ actg $\frac{\alpha + \beta}{\lambda} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ arctg $\frac{\alpha - \beta}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \ln \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \ln \frac{\beta}{\lambda$ 3823. D(x) = 1 para |x| < 1, $D(x) = \frac{1}{2}$ para x = 1, |x| > 1para | x1 > 1. 3824. a) magn a cos ab. b) magn a smab 3825 1. e . . 3826. $\frac{\pi}{2} \text{ Ngn } \text{ sgn}^{-\alpha_1} = 3827 - \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r})$ 3828. $\frac{\pi(1-\frac{1}{4})^2}{4}e^{-\frac{\pi}{4}}$ 3829 $\frac{1}{1}\frac{\pi}{ac-b^2}\cos\frac{b\pi}{a}e^{-\frac{\pi}{a}}\cos\frac{b\pi}{a}$ 9830. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{2}}$ 2831 $\sqrt{\frac{\tau}{a^{\frac{1}{4}}}}\sin\left(\frac{ac-b^{\frac{1}{4}}+\frac{\tau}{a}}{a}\operatorname{sgn}a\right)$. 2833 $\sqrt{\pi} \sin \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$. 3833. $\sqrt{\pi} \sin \left(a^2 + \frac{\pi}{4} \right)$. 3835. a) $\frac{\pi l}{a^{n+1}}$ ($p = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \quad \text{(i)} \quad \frac{1}{\rho-\alpha} \quad \text{si} \quad \rho > \alpha, \text{ d)} \quad \frac{1}{(\rho+\alpha)^2}; \quad \text{(i)} \quad \frac{\rho}{\rho^2+1}; \quad \text{(i)} \quad \ln\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$ $g = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}}$, 3837, a) 1; b) $x^2 + \frac{1}{2} 1$ c) $e^{2ex^2 + 4t^2}$; d) $\frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos ax$ 3., $\frac{1}{5} = \frac{x^3}{22^3}$, donde $\sigma = V = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{x^2}{2}} = 3843$. 51.5 $\frac{1}{4}$ 3846. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 3847. $\frac{7}{2\sqrt{2}}$ 3848 $\frac{3t}{512}$. 3849. $\frac{\pi}{2\sin \pi}$. 750 $\frac{n}{2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{n}$ 3851. $\frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}$ (0 < m < n) 3852. B (n = m, m) $(0 < m < n) \quad 3853. \quad \frac{p^{-p}}{n} \left(\frac{p}{n} \right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n} \, , \, p - \frac{m+1}{n} \right) \left(0 < \frac{m+1}{n} < p \right).$ 3854. $\frac{(b-a)^{m+n+3}}{(a+c)^{m+1}(b+a)^{m+1}}$ B (m+1, n+1)(m>-1, n>-1) 3855. $\frac{1}{m}$ X $> \phi\left(\frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n < 0 \quad \text{o} \quad n > 1), \quad 3856, \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) (m > -1),$ n > -1), 3857, $\frac{\pi}{2 \cos \frac{n\pi}{2}}$ (|n| < 1), 3858, $\frac{2^{n-1}}{n} B\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\right) (n > 0)$. 3859. $\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) (n > 0)$. 3860. $\frac{1}{(n)} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \left(\frac{m+1}{n} > 0\right)$. 3861. $\Gamma\left(\rho + 1\right)$

$$\begin{cases} (p > -1), & 3862, \frac{d}{dp} \left\lceil \frac{\Gamma(p+1)}{\alpha^{p+1}} \right\rceil (p > -1), & 3863, -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{s^{-2} p\pi}, & (0 0), \\ 3877, & \frac{\pi a^m}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, & (a > 0), & 3879, & aB \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\eta} \right), & 3880, & \frac{2a^2}{n}, & \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \right), \\ 3831, & \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, & (a > 0), & 3879, & aB \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\eta} \right), & 3880, & \frac{2a^2}{n}, & \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \right), \\ 3831, & \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, & (a > 0), & 3879, & aB \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\eta} \right), & 3880, & \frac{2a^2}{n}, & \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \right), \\ 3831, & \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, & (a > 0), & 3879, & aB \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\eta} \right), & 3880, & \frac{2a^2}{n}, & \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \right), \\ 3831, & \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, & (a > 0), & 3879, & aB \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\eta} \right), & 3880, & \frac{2a^2}{n}, & \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} \right), \\ 3881, & \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, & \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}, & \frac{\pi}{2\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}, & \frac{\pi}{$$

 $=\frac{1}{\sqrt{7}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{x^{2}}{2}}\cos\lambda x\,d\lambda,\quad 3994,\quad xe^{-x^{2}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}\int_{-\pi}^{\pi}\lambda e^{-x^{2}}\sin\lambda x\,d\lambda$

2395. a)
$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{4} \frac{e^{-x} x}{1 + e^{-x}} dx + e^{-x} $

Capitulo VIII

3901
$$\frac{1}{4}$$
. 3902. $S = \frac{4}{9} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^3}$, $\overline{S} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^3}$; $13\frac{1}{3}$, 3903 9.88 El valor exacto es $1 = 2$ $1/2$, $1/3$ 20 3904 0.402 Fl valor exacto es 0.4

3905 $\delta < 0.0020$ 2905. 1. 3907 $= 3508^{-7a^2}$ 3910. $I = F(A, B) - F(A, B) = -F(2, B) + F(a, b)$. 3912 a) Negativo b) negativo, c) positivo

5913. $\frac{1}{4}$. 3914. 1.95 $< I < 2$. 3915. $a^2 + b^2 = \frac{h^2}{2}$

3916. $\int_0^1 dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$. 3917. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dx$ 3919 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dx$ 3920. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ 3921 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ 3921 $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$

$$3022 \int_{-1}^{1} dx \int_{-1/2}^{1/2} f(x, y) dy + \int_{1}^{1} dx \left\{ \int_{-1/2-x^{2}}^{1/2-x^{2}} f(x, y) dy + \int_{2}^{1} dx \int_{-1/2-x^{2}}^{1/2} f(x, y) dy \right\} + \int_{2}^{1} dx \int_{-1/2-x^{2}}^{1/2-x^{2}} f(x, y) dy + \int_{2}^{1} dy \int_{2}^{1} f(x, y) dx + \int_{2}^{1} f(x,$$

4 \int_0
ción está limitado por dos circunferencias concéntricas con el centro en el origen de coordenadas y por dos rayos que parten del origen de coordenadas

3943.
$$\int_{0}^{\infty} d\phi \int_{0}^{\infty} r f(r \cos \phi, r \sin \phi) dr + \int_{0}^{\infty} d\phi \int_{0}^{\infty} r f(r \cos \phi, r \sin \phi) dr =$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}rdr\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}I\left(r\cos\phi,\quad r\sin\phi\right)d\phi+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}rdr\int\limits_{ar\cos\phi}^{arc\sin\phi}I\left(r\cos\phi,\,r\sin\phi\right)d\phi.$$

3944.
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} cosec(\phi + \frac{\pi}{4}) dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} r dr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{$$

3945.
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{1+r^2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} r^{\frac{\pi}{4}} r^{\frac{\pi}{4}} dr + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) r_{r_{r_{r_{r_{1}}}}}(r) dr$$

3946
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\cos \varphi} rf(r\cos \varphi, r\sin \varphi) dr = \int_{0}^{2\pi} rdr \int_{0}^{\cos \varphi} f(r\cos \varphi, r\sin \varphi) d\varphi + \int_{0}^{2\pi} f(r\cos \varphi, r\cos \varphi, r\sin \varphi) d\varphi + \int_{0}^{2\pi} f(r\cos \varphi, r\cos \varphi, r\cos \varphi) d\varphi + \int_{0}^{2\pi} f(r\cos \varphi, r\cos \varphi, r\cos \varphi) d\varphi + \int_{0}^{2\pi} f(r\cos \varphi, r\cos \varphi, r\cos \varphi) d\varphi + \int_{0}^{2\pi} f(r\cos \varphi) d\varphi + \int_{0}^{2\pi} f(r\cos \varphi) d\varphi + \int_{0}^{2\pi}$$

$$+\int_{0}^{\infty} r dr = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+e^{-r}-1} \int_{0}^{\infty} f\left(r\cos\varphi_{n} - r\sin\varphi\right) d\varphi_{n}$$
where $\frac{1}{r}$

3947
$$\int_{0}^{\pi} d\Phi \int_{0}^{\pi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mathcal{U} =$$

$$=\int_{0}^{\pi} r dr \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi}{\int_{0}^{\frac{1}{2}} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi}.$$

3949.
$$\int_{0}^{\infty} dr \int_{arcson}^{\infty} f(\varphi, r) d\varphi.$$
3949.
$$\int_{0}^{\infty} dr \int_{1}^{\infty} f(\varphi, r) d\varphi.$$
3949.
$$\int_{0}^{\infty} dr \int_{1}^{\infty} f(\varphi, r) d\varphi.$$
3951.
$$2\pi \int_{0}^{\infty} rf(r) dr.$$
3952.
$$\pi \int_{0}^{\infty} rf(r) dr+\frac{1}{2}$$
3953.
$$\int_{1}^{\infty} (\pi - 4 \arccos \frac{1}{2}) rf(r) dr.$$
3953.
$$\int_{1}^{\infty} f(\varphi, r) d\varphi.$$
3954.
$$\int_{1}^{\infty} (\pi - 4 \arccos \frac{1}{2}) rf(r) dr.$$
3955.
$$\int_{1}^{\infty} (\pi - 4 \arccos \frac{1}{2}) rf(r) dr.$$
3956.
$$\int_{1}^{\infty} (\pi + b(b+h) + (b+h)^{2} + (2b+h) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} dr.$$
3957.
$$\int_{0}^{\infty} u du \int_{0}^{3} f(u, u) dv.$$
3958.
$$\int_{1}^{\infty} \int_{1}^{\infty} du \int_{0}^{\infty} f(\frac{u+v}{2}) \frac{1}{2} \frac{1}{2} du.$$
3959.
$$4 \int_{1}^{\infty} \sin^{2} v \cos^{4} v du \int_{0}^{\infty} dr \left(u \cos^{4} v, u \sin^{4} v\right) du.$$
3961.
$$u = xy, u - x = y.$$
3962.
$$\int_{1}^{\infty} f(u) d$$
3963.
$$\int_{1}^{\infty} (u) d$$
3963.
$$\int_{1}^{\infty} (u) d$$
3964.
$$\int_{0}^{\infty} f(u) d$$
3965.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} du.$$
3965.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \sin^{2} v \cos^{4} v du \int_{0}^{\infty} dr \left(u \cos^{4} v, u \sin^{4} v\right) du.$$
3964.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} dv.$$
3975.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \sin^{2} v \cos^{4} v dv.$$
3968.
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{$$

3994.1 $\frac{1}{12.41} \frac{(ab)^3}{a^3}$. 3995. $\frac{ab}{70}$. 3996. $\frac{4^5}{2(1+1)} \frac{a}{6+1}$ 3997. $\frac{a^5}{2}$ 3998. $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$. 3998.1. $\frac{1}{15} \cdot (b^4-a^4)(a^{-3}-d^{-3})$. 3998.2. $\frac{q+p}{(p+1)(q+1)} \times$ $\pm \frac{12}{25}$) ab. 4000, $\frac{e^2}{6}$ ($\sqrt{10} \pm 2$) arcsin $\frac{1}{3}$. 4001, $\frac{\pi}{161}$. 4002, $\frac{e^2}{4}$ [$(v_1 + v_1) \times$ \times ($\ln 2a_x + \sin 2a_1$) \rightarrow { $a_x + a_1$ } ($\sin 2a_1 + \sin 2a_1$)]. 4003. $\frac{2}{3} \pi a^2$. 4004. 4007 $\frac{5}{5}$ 4008. $\frac{\pi R^7 a}{4} = \frac{2}{3} R^3$, 4009. $\frac{88}{105}$, 4010. π , 4011. π , 4012. $\frac{17}{12} = 11 - 2$. 4013 $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$ 4014. $\frac{7}{8}$ 4015. $\frac{45}{32}\pi$ 4016. $\frac{16}{9}a^3$, 4017 $\frac{9a^4}{\pi}$. 4018. $\pi (1 - e^{-R^2})$. 4019. $2a^2c \cdot \frac{(\beta - a) \cdot \pi + 2}{\pi^2}$. 4020. $\frac{\pi}{R}$. 4021. $\frac{1}{2} \pi obc (2 + 1/2)$. 4022 $\frac{4}{3}$ πabc (2) 2 1). 4023 $\frac{3\pi abc}{8}$ 4024. $\frac{2}{3}$ πabc 4028 $\frac{abc}{3}$ $4026 \quad \frac{2}{9} a5a \ 3\pi + 20 \quad 167 \ 2) \quad 4027 \quad \frac{\pi \left(b^3 - a^3\right)}{12} \quad 4028 \quad \frac{9}{2} a^4 \quad 4029 \quad \frac{1}{4}$ 4030 $\frac{a^{7}c}{\pi}$ n $\frac{\beta}{a}$ 4031. $\frac{\beta}{33}$ 4032. $\frac{\beta}{2\sqrt{5}}$ 7656 4033 $\frac{\pi^{4}a^{3}c}{128}$ 4033.1 4 f. $e^{-1} - e^{-1} u^{2}$ 4034. $\frac{abc}{3n^{2}} \frac{\Gamma^{1}}{\Gamma} \frac{7}{n}$ 4035. $\frac{abc}{2m + n} \frac{\Gamma^{-1}}{\Gamma} \frac{1}{m} \frac{1}{n}$ 4035 $\frac{9}{3} \pi a^2 (2 + 2 - 1)$ 4037 160^3 4038, $8a^4 \arcsin \frac{b}{a}$, 4039. 4040. $\epsilon a^2 = 4041 = \pi \sqrt{2} = 4042$, $\frac{\pi a^2}{2}$, 4043. $-\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) \uparrow e^{-\frac{\pi a^2}{3}}$ $+\frac{8}{3} \arctan \frac{1}{1/2} + 4944, \frac{a^4}{9}(20-3\pi) + 4945, \frac{2a^4}{6}(4945,1) + \frac{7}{6}(13\sqrt{10}+1\pi^{-2}+1)$ **4045.2.** $\frac{1}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{c^2} \right] + 4045.3. \frac{4}{3} ab \left(2\sqrt{2} - 1 \right) \times \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1$ $\sqrt{netg} \sqrt{\frac{a}{h}}$. 4045.4. $\frac{\pi}{2} \ln (e + e^{-1})$, 4046. $S = 4\pi (3 + 2\sqrt{3}) a^2$, $V = \frac{8n}{\sqrt{3}} a^3$ 4047. $(\phi_1 + \phi_1)$, $\sin \phi_2 \rightarrow \sin \phi_1) R^2$, donde ϕ_1 , ϕ_2 son ias longitudes de lon meridianos, ψ_1,ψ_2 son las latitudes de los paraielos, R es el radio de la esfecie 4048. $\pi \left\{ a \sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln a + \sqrt{c^2 + h^2} \right\}$ 4046. $S = a (\phi_1 + \phi_2) \{b (\psi_1 + \psi_1) + a \quad (\sin \psi_1 + \sin \psi_1)\}; \quad 4\pi^2 ab. \quad 4050. \quad a$

$$\begin{array}{c} - \sin (s)^n \sqrt{\frac{a^3 + b^3}{a^3 + b^3}} \frac{b c}{(a^3 + b^3)} \frac{c}{(a^3 + b^3)} \frac$$

4063.
$$\int_{0}^{2} dx \left\{ \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{2} f(x, y, z) dy + \int_{x^{2}}^{2} dz \right\} \frac{f(x, y, z) dy}{f(x, y, z) dx} + \int_{0}^{2} dz \int_{0}^{2} \int_{0}^{2} f(z, y, z) dx + \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{2} f(x, y, z) dx + \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{2} \int_{0}^{2} f(x, y, z) dx + \int_{0}^{2} dz \int_{0}^{2} \int_{0}^{2} \int_{0}^{2} f(x, y, z) dx + \int_{0}^{2} dz \int_{0}^{2} $

4118 $\frac{abc}{1}$ 41181 $\frac{abc}{90}$ 41182. $\frac{abc}{1680}$ 41183. $\frac{41}{35}abc$ 4118. $\frac{9}{4}a^2$ 4120 - $\frac{5^2}{3} = a^2$, $\sqrt{\frac{3}{3}} \Gamma^2 \left(\frac{3}{4}\right)$ 4121. $\frac{47}{3} a^2$ 4122. $\frac{mobc^4}{6}$, $1 = e^{-3}$). 6123 \$ 100 4124 5ate (1 1) 4125, 37 27 4128 V 5123 , S 707 X 4130 $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}$ 4131. $\frac{3}{2}$. 4132. $4\pi Q_6\left(\frac{1}{p}\right)$; $r = e^{-x}$ 4133 $\left(0, 0, \frac{1}{4}c\right)$ 4134. $x_0 = x_0 = \frac{2}{5}a$, $x_0 = \frac{7}{4}a^3$ 4135 $z = \frac{7}{2}p$ $z_0 = 0$ $z_0 = \frac{1}{2}p$ 4136 $z_1 = \frac{3}{8}a^2$ $y_0 = \frac{3}{8}b$, $z_0 = \frac{1}{2}c$ 4137 $x = z_0 - \frac{3a}{5}$ 4138. $x_0 = y_0 - 1$, $z_0 - \frac{5}{4}$ 4139. $x_0 - \frac{6\pi}{4}$ 0. $z = \frac{5\pi}{4\pi\hbar}$, $z = \frac{3\pi}{5\pi}c$ 4140, $z_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \frac{7}{20}$. 4141, $\frac{z_0}{a} = \frac{y_0}{5} = \frac{z_0}{c} = \frac{y_0}{c}$ $\frac{3}{4} \frac{1}{r} \frac{1}{r} \frac{1}{r} = \frac{1}{4} \frac{142}{4142} x_0 = \alpha y_0 \quad \beta z_0 = 14143. I_{xy} = \frac{650}{60} I_{xy} = \frac{295}{60}.$ $I = \frac{65^{\circ}}{10^{\circ}} \cdot 4164. I_{A} = \frac{4}{15} \operatorname{mabes} \cdot I_{A} = \frac{4}{15} \operatorname{mbs} I_{AA} = \frac{4}{15} \operatorname{mbs} 4145. I_{AV} = \frac{70.5}{10^{\circ}},$ $I_{AS} = \frac{7}{20} - I_{AS} - \frac{750^{3}c}{20} - 4148. \ I_{AS} = \frac{2550^{3}}{220} (15.7 - 16) I_{AS} - \frac{755^{3}c}{10^{2}5} (105.7 - 272)$ $= \frac{2a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4a}{2} 4147.1 $I_{-x} = \frac{5}{2.06 + \frac{7}{2}} a^{9}bc$ $I_{-x} = \frac{15 \pi^{2}}{256 + \frac{7}{2}} ab^{9}c$ $I_{-xy} = \frac{\pi^{2}}{128 + \frac{7}{2}} ab^{6}b$ 4147.2 $I_{-y} =$ $= \frac{1}{5n^2} + \frac{n}{5} + \frac{\Gamma}{5} + \frac{n}{5} + \frac{3}{5n^2} + \frac{\Gamma_{2x}}{5n^2} + \frac{\Gamma_{2x}}{5n^2} + \frac{\Gamma_{2x}}{5n^2} + \frac{1}{5n^2} + \frac{1}{5n^2} = \frac{1}{5n^2}$ $\chi = \frac{1}{15} = \frac{1}{15} = \frac{1}{15} = \frac{1}{15} = \frac{4}{15} = \frac{4}{15} = \frac{4}{15} = \frac{4}{15} = \frac{1}{15} = \frac{7}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{15} = \frac{1}{$ 1150 $\frac{4}{9}$ 1, 22 4153 $I = \frac{M}{3}$ $a^2 \pm \frac{4}{3}$ donde $M = 2 \pm \rho_0 a^2 h$ es la mass 4154. $I_0 = \frac{1 - \frac{1}{2} r_0}{3}$ 4155 $u = 2\pi Q_0 R^2 = \frac{r^2}{3}$, an $r \le R$; $u = \frac{4\pi R^2 Q_0}{3r}$, so

r > R, donde $r = \sqrt{x^3 + y^2 + z^3}$. 4158, $u = 4\pi \int f(q) \min \left(\frac{Q^2}{r}, q\right) dq$, dende r = 1 $= \sqrt{k^2 + y^2 + z^2}, \quad 4157, \quad u = \pi g_0 \left\{ (h - z) \right\} \left(u^2 + (h - z)^2 + z \right) \left(u^2 + z^2 \right), \quad v = 0$ $\times \{h-z, -z, z\} + a^2 \ln \left[\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2-z}} \right]$ 415B X - 1 1 $Z = -\frac{kMm}{a_1 - a_2}$, so $a_1 \ge R$ $Z = -\frac{kMm}{R^2}a_1$ so $|a_1| < R$ 4159. X = 0, Y $Z = -2.5 \alpha_0 h_1 + \alpha^2 + \overline{\alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 + (n - z)^2 + (z - h - z)}, \qquad 4.60. \quad 3.0$ Y=0: $Z=-180_0R$ sin² α . 4161 Es convergente si p>1 4162. Es convergente si p>1vergente si p > 1 y q > 1, 4163 Es convergente si $p > \frac{1}{2}$, 4164 Es conver gentess + 1 < 1 4165. Es divergente 4169. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}(p>q>1)$. 4170. $\frac{1}{q-1}(p>1)$ 4171 21 $4172. \frac{\pi}{n-1} (p>1). 4173. \pi \sqrt{2(12-1)} 4174 \frac{1}{2} 4175. t 4176$ 4177 $\frac{\pi}{4}$, 4178. $\frac{\pi}{18} e^{\frac{h}{18}}$ donde $\delta = \frac{ab}{bc}$, $y \Delta = \frac{ab}{bc} e^{\frac{h}{4}}$ 4179. $\frac{\pi}{ab}$ 4180. - $\frac{180^7b^3}{}$ 4181 Es convergente 4182 Es convergen e si p < 14183. Es convergente si $\frac{1}{p} + \frac{1}{d} > 1$. 4184. Es convergente si p < 1. 4185 es convergente si p < 1, 4187, $\frac{\pi}{2}$, 4188 πa , 4189, $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$, 4190, 2, 4191 Es convergente si $p > \frac{3}{2}$. 4192. Es convergente si $p < \frac{3}{2}$ 4193 Es convergente si $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{r} < 1$, 4194. Es convergente si p < 1, 4195 Es convergente si p < 1 4196. $(1 + p)^{-1} (1 + q)^{-1} (1 + r)^{-1} (p < 1, q < 1, q < 1)$ r < 1), 4197, $\frac{4\pi}{3}$, 4188, $2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right)(p < 1)$, 4199, $\pi^{\frac{2}{2}}$, 4200. donde $\Delta = |a_{ij}|$, 4204, a) $\frac{n}{3}$; b) $\frac{n(3n+1)}{12}$, 4205, $\frac{a^n}{n!}$, 4206, $\frac{1}{n^{n+1}}$ 4207 $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$ 4208. $\frac{2^{n_h} h_h}{(\Delta +)} h_g$ 4209. $\frac{a_1 a_2}{n}$ 4210. $\frac{n-1}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \circ a_1 \ldots a_n = 4211 = \frac{n^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, a\right)}, \quad 4212. = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{12\Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

213. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$. 4218. $R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{1} f(V\widehat{u}) u^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} du$. 4219. $u = \frac{16}{15} \pi^2 e_0^2 R^4$. 220. $\sqrt{\frac{a_{ij}}{b}}e$, donde à $[a_i, y, A = \frac{a_{ij}}{b}, \frac{b_i}{c}]$ es el determinante made 4221, $1+\sqrt{2}$, 4222, $\frac{256}{15}a^4$ 4223, $2\pi^2a^3(1+2\pi^4)$, 4224, $\frac{a^2}{6}(\cosh^{\frac{3}{4}}2f_4-1)$. 225, $4a^{\frac{1}{2}}$, 4226, $2(e^{a}-1)+\frac{\pi}{4}ae^{a}$, 4227 $2a^{2}(2-\sqrt{2})$, 4228, $\frac{2ka^{2}\sqrt{1+k^{2}}}{1+4k^{2}}$ 4229, $2a^2$, 4230, $\frac{\tau}{a}$, 4231, 5, 4232, $\sqrt{3}$, 4233, $|x_0| + |z_0|$, donde $|x_1| < a$. 4234. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^6}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. 4238. $\left(1 + \frac{2L_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$. 4236. $a\sqrt{2}$ × $\times arctg \frac{\epsilon}{\sqrt{a^2-a^2}}$, 4237 $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^4+b^2}$ 4238, $\frac{2}{3}\pi a^4$. 4239 $\frac{1}{3}$ $\left\{4 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$ 4240 $\frac{a^{2}}{2 \cdot 6 + \frac{1}{2}} \left[100 \cdot 1^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{10}{17} \cdot \frac{25 + 41^{-2} \cdot 8}{17}\right]$ 4241 28 8 $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac$ 4241 1 $\frac{2}{3}$ p $^{\circ}$ 1 1 - 1), 4242, $\frac{n}{8} \left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \right]$, 4243 $x_9 = 0$ $-S_y = \frac{1}{5}a^3 + 42442$, πa^3 , 4244.3, a) $\frac{32}{3}a^4$; b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3 + 4244.4$. $r_0 = \frac{a}{1.2}$. 4245, $z_0 = z_0 = \frac{41}{2}$ 4246 $z_0 = \frac{2}{5}$ $\mu_0 = \frac{1}{5}$ $z_0 = \frac{1}{2}$ 4247 $I_2 = I_0$ 1 $= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) \left(1 + \sqrt{a^2 a^2 + h^2} - 1\right) = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}, \quad 4248, \quad a) \quad 0; \quad b) \quad \frac{2}{3}, \quad c) \quad 2$ **4249.** a) 2; b) 2; c) 2, 4250. $-\frac{14}{15}$, 4251, $\frac{4}{3}$, 4252, 0, 4253, $-2\pi a^2$, 4254, -2π . 4255. 0, 4256. 0. 4257. $\frac{\pi}{4}$... 4258. 8. 4269 ... 4260. 4. 4261. — 2. **4262.** $\int_{0}^{\pi} f(u) du, \ 4243, = \frac{3}{2}, \ 4264, \ 9. \ 4265, \int_{0}^{\pi} \varphi(x) dx + \int_{0}^{\pi} \psi(y) dy, \ 4266, \ 62.$ 4267. 1. 4268 $\pi + 1$ 4269. $e^a \cos b \rightarrow 1$. 4271 $z = \frac{x^2}{3} + x^y y - xy^2 - \frac{y^2}{3} + C$. **4272.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ errig $\frac{3x-y}{2x\sqrt{2}} + C$. **4273.** $z = -\frac{2y^3}{(x+y)^3} + \ln|x+y| + C$. **4274.** z =

 $= e^{x+y} (x-y+1) + ye^{x} + C, \quad 4275, \quad z = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial x^{n} u y^{m}} + (-4276 z - \frac{y^{n+m}}{x^{n} u u^{n}})$ \times $\left(| \arctan \frac{x}{a} \right) + C$, 4278. $|I_R| \ll \frac{8\pi}{R^2}$, 4279. $\frac{1}{35}$, 4280. $- \pi a^{\dagger}$, 4281. $2\pi \sqrt[4]{5}a^{\dagger}$ \times $\times \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$, 4282, $-\frac{\pi a^3}{4}$, 4283, -4, 4284, $-53\frac{7}{12}$, 4285, 0. 4286, b - a. 4287. $\int_{0}^{\infty} \varphi(x) dx + \int_{0}^{\infty} \psi(y) dy + \int_{0}^{\infty} \chi(z) dz. \quad 4289. \quad \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(u) du.$ 4269. $\int uf(u) du. 4290. u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C. 4291. u =$ =x $\frac{x}{u} + \frac{xy}{2} + C$ 4292, $u = \ln V(x + y)^2 + z^2 + \arctan \frac{z}{x + y} + C$ 429s A $= -rig_{x^2-2}$, 4294 $A = -\frac{R}{2}(a^2-b^2)$, 4295. $A = R\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2}\right)$, fonde $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_2^2}$ (= 1 2). 4296. $I = \iint y^2 dx dy$. 4297. $-46\frac{2}{3}$. 4288. $\frac{\pi a^2}{2}$. 4299. — $2\pi ab$. $4500. — <math>\frac{1}{5}(e^x-1)$. 4301. 0. 4302 $I_x=I_y=2$ 4303. $\frac{2\pi aa^2}{8}$ $\frac{1}{2}$, $Q = 4x + \frac{2}{dy}$, donde x as una función dos veces diferenciable y k as una constante. 4305, $\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x,y)]$ 4307 l) l = 0, 2) $l = 2\pi$. 4308. πab . 4309 $\frac{3}{8}$ 735 4310 $\frac{a^2}{6}$. 4311. $\frac{3}{2}$ a^2 4312. a^4 , 4313. $\frac{1}{3} + \frac{4\tau}{91}$ 43'4. $\frac{a^2}{2} \mathbb{B}(2m+1, 2n+1)$. 4315. $\frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{2}{n})}$. 4316. $\frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \pi}{\sin \pi}\right]$ 6317. $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$, 4318. $\pi(n+1)(n+2)r^2$, $6\pi r^2$, 4319. $\pi(n+1)(n+2)r^2$, $6\pi r^2$. 4320, $4a^2$, 4321, sgn(ad - bc). 4322, $I = \sum sgn \frac{\partial (\phi, \psi)}{\partial (x, y)}$, dende la suma se extrende a todos los puntos de intersección de las curvas: $\varphi(x, y) = 0$ y ψ (τ) = 0 situados en la parte intenor del circuito C 4324 I = 2 S, donde S es el area de la figura limitada por el circulto (4325 1/x (x0 10) + 1'y (x0 10) 4326 Las proyecciones de la fuerza sobre los ejes de coorde nadas son iguales a: X=0: $Y=\frac{2kmM}{\pi a^2}$. donde k es la constante de gravitación. 4327 $u = 2\pi \times R \ln \frac{1}{D}$, si

 $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant R$, $u = 2\pi x R \ln \frac{1}{r_0}$, si $\varrho > R$. 4328. $I_1 = \frac{\pi}{m} \varrho^m \cos m \varphi$, $I_2 = \frac{\pi}{m} e^m \cos m \varphi$. $= \frac{\pi}{m} \varrho^m \sin m \varphi, \quad \text{sin } 0 \le \varrho \le 1; \quad I_1 = \frac{\pi}{m} \varrho^{-m} \cos m \varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \varrho^{-m} \sin m \varphi, \quad \text{sin}$ $\rho > 1$, 4329, $\mu = 2 \pi$ si el punto A(x, y) está situado en el interior del circuito C: $u = \pi$ si el punto A (x, y) está situado en el circuito C; u = 0si el punto A (x, y) está situado en el exterior al circuito C. 4330. $K_1 = \pi \varrho^m \cos m\varphi$, $K_2 = \pi \varrho^m \sin m\varphi$, si $0 \le \varrho < 1$; $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, si q = 1: $K_1 = -\frac{\pi}{a^{10}}\cos m\phi$, $K_2 = -\frac{\pi}{a^{10}}\sin m\phi$, si q > 1, 4339. $Q = -\frac{\pi}{a^{10}}\cos m\phi$ $= \int \int \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy; \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \text{ 4340. } H_x = k! \oint \frac{1}{\ell^*} \left[(\eta - y) dz - (\zeta - z) dy \right].$ $H_{y} = ki \oint_{\mathcal{L}} \frac{1}{r^{2}} \left[(\xi - z) \, dz - (\xi - x) \, dz \right], \quad H_{z} = ki \oint_{\mathcal{L}^{z}} \frac{1}{r^{2}} \left[(\xi - x) \, dy - (\eta - y) \, dx \right].$ 4341. $I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3}) a^4$. 4342. $\frac{7}{2} \pi \sqrt{2} a^4$. 4343. πa^4 . 4344. $\frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})$. 4345. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. 4346. $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. 4347. $\frac{4\pi}{3}$ abs $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+$ $+\frac{1}{c^2}$). 4348. $\pi^* [aV 1 + a^2 + \ln (a + V 1 + a^2)]$, 4349. $\frac{\pi a^4}{2} \sin a \cos^2 a \left(0 \le a \le a \le a + a^2\right)$ $\leq \frac{\pi}{2}$) 4350, $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$, 4352, $\frac{2\pi(1+6\sqrt{2})}{15}$. 4352.1, πa^2 , 4352.2. $\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$. 4353. $\frac{4}{5} \pi q_0 a^3$. 4354. $\frac{\pi q_0 a (3a^3 + 2b^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{12}$, 4355. $x_0 = \frac{a}{9}$; $y_0 = 0$; $x_0 = \frac{16}{9\pi}a$. 4358. $z_2 = y_3 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_4 = \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1)$. 4356,1,2) 40 a', b) $\pi R \left[R(R + H)^2 + \frac{a}{2\sqrt{2}} \right]$ $+\frac{2}{3}H^2$, 4356.2 $\frac{\sqrt{3}}{12}$. 4375. Las proyecciones de la fuerza de atraccción sobre los ejes de coordenadas son: X=0, Y=0; $Z=\pi kmp_0 \ln \frac{\alpha}{3}$. 4358, $\mu=4\pi q_0 \min \left(\alpha, \frac{\alpha^2}{r_0}\right)$, double $r_0=$ $=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 4359. $F(t)=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$, si $|t| \le \sqrt{3}$; F(t)=0, si $|t| > 1 \ \overline{3}$. 4360. $F(t) = \frac{\pi (8 - 5 \sqrt{2})}{6} t^4$. 4361. F = 0. $F = \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r-1)^2], \quad \text{si} \quad r - a < t < r + \alpha, \ F = 0, \quad \text{si} \quad t > r + \alpha \ (t \ge 0).$ 4362, $4\pi x^{2}$, 4363, $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]$ abc. 4364. 0. 4365, $\frac{4\pi}{ah^2}(a^ab^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$, 4366, $\frac{8\pi}{3}(a+b+c) R^2$, 4367, $-\pi a^2 \sqrt{3}$, 4368, $\frac{h^3}{3}$. 4369, 2 nn.S. 4970, 0, 4371, $-2\pi a$ (a+h), 4377, $2\pi Rr^2$, 4373, $-\frac{9}{2}a^2$, 4374,0, 4376. 3 $\iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ 4377. 0. 4378. 2 $\iiint \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ 4379. $\left\{ \left\{ \int \Delta u \, dx \, dy \, dz, \text{ donde } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^3} \right\} = \frac{4380}{3} \left\{ a^3 + \frac{u^3}{2} \right\} |z| + \frac{u^3}{2} \left\{ a^3$ 4385. $\frac{2}{5}a^3$ 4385.1. $2\pi^2a^2b$. 4387. $3a^4$. 4388. $\frac{12}{5}\pi a^5$. 4389. 1. 4380. $-\frac{\pi h^4}{2}$ 4392. a) I = 0, b) $I = 4\pi$. 4401. a) grad $\mu(0) = 3I - 2J - 6h$, | grad $\mu(0) = 7$, $\cos u = \frac{3}{7}$, $\cos \beta = -\frac{2}{7}$, $\cos \gamma = -\frac{6}{7}$; b) grad u(A) = 6l + 3f, | grad u(A)| = = 3 $\sqrt{5}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \gamma = 0$, α) grad $\alpha(B) = 7t$, | grad $\alpha(B) = 7$. cos $\alpha = 1$, cos $\beta = 0$, cos $\gamma = 0$; grad $\alpha = 0$ en el punto M(-2, 1, 1). 4401.1. grad u (51) = 12(-9f - 20k, | grad u (M) | = 25, $\cos \alpha = \frac{12}{25}$. $\cos \beta =$ $=-\frac{9}{56}$, $\cos y = -\frac{4}{5}$, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{3}{\sqrt{9}}$, 4402. a) $xy = t^2$; b) x = y = 0 y x = y = t; c) x = y = z. 4403. r = 1 4404. $\frac{4(x^3 + y^2)}{n^2 - 256} + \frac{4z^2}{n^2} = 1 (x \ge 16)$; $\frac{x^3 + y^3}{060} + \frac{1}{1600}$ $\pm \frac{z^2}{\sqrt{674}} = 1$; max u = 20. 4405. $\cos \varphi = -\frac{8}{9}$. 4406. Las superficies de nivel son las hojas de conos; las superficies de nivel del módulo del gradiente son totos; inf u = 0. $\sup u = 1; \text{ in } | \operatorname{grad} u | = 0, \sup | \operatorname{grad} u | = \frac{1}{2}. \quad 4407. \quad \frac{|\Delta t|}{|\operatorname{stud} u (x_a, y_a, z_a)|}.$ 4409. i) $\frac{r}{r}$; b) 2r; c) $-\frac{r}{r^2}$, 4410. $f'(r)\frac{r}{r}$, 4411. c. 4412. $2r(c \cdot c) - 2c(c \cdot r)$. 4415.1. a) grad $u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_z + \frac{\partial u}{\partial z} e_z$, donde $e_r = i \cos \phi + j \sin \phi$. $e_{\phi} = -i \sin \phi + j \cos \phi$, $e_{\phi} = k \sin \log v$ vectores unitarios, tangentes a las curvas coordenadas correspondientes; b) grad $u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\theta$, donde $e_r = i \cos \phi \sin \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} e_\theta$ $e_{\eta} = t \cos \varphi \cos \theta + f \sin \varphi \cos \theta - k \sin \theta$ + $f \sin \varphi \sin \theta + k \cos \theta$, $e_{\alpha} = t \cos \varphi \cos \theta + f \sin \varphi \cos \theta - k \sin \theta$, $e_{\alpha} = -t \sin \varphi + f \cos \varphi$ son los vectores unitarios, tangentes a las curvas coordenadas correspondientes. 4416, $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^3 + z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial r} = |\operatorname{grad} u|$, si a = b = c. 4417. $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos(l, r)}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, si $l \perp r$, 4418. $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$. si . grad $u \perp$ grad v. 4419. $a = \frac{i(\sqrt{x^2 + y^2 + yz}) - j(\sqrt{x^2 + y^2 + xz}) + k(x - y)z}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$ 1420, $y = c_1 x$, $z = c_2 x^4$, 4422.1. div $a(M) = \frac{18}{125}$; $\Pi = \frac{24}{125}$ s.e., 4423.0. 4425. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 4426. $\int_0^u (r) + \frac{2}{r} \int_0^r (r) \cdot \int_0^r (r)$

 $=c+\frac{c_1}{r}$, donde c y c_1 son constantes 4427. a) 3; b) $\frac{2}{r}$, 4428, $\frac{f'(r)}{r}(c\cdot r)$. 1429. $\Im(r) + rf'(r)\Im(r) = \frac{c}{r^2}$, donde c es una constante. 4430, a) u $\triangle u +$ + (grad u)², b) $u \Delta v$ + grad $u \cdot$ grad v, dondo Δu es el operador de Laplace. 443 L. div v = 0; div $w = -2 \omega^2$. 4432. O, fuera de los centros de atracción. 4433. div $a=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_i)+\frac{\partial a_j}{\partial m}\right]$, donde a_r,a_ϕ son las proyecciones del vecfor a sobre las curvas coordenadas φ = const. y r = const. 4434. 4434. div $a = \frac{1}{IMN} \left[\frac{\partial}{\partial u} (MN a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w} (LMa_w) \right]$, donde a_u, a_v, a_w son las proyecciones del vector o sobre las curvas coordenadas correspondientes y $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}, \qquad M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}.$ $N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. Si r, φ, z son las coordenadas cilíndricas, entonces div $a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_r) + \frac{\partial a_2}{\partial m} + r \frac{\partial a_2}{\partial z} \right]; \quad \text{si } r, \partial, \varphi \text{ son las coordena-}$ das esféricas, entonces div $a = \frac{1}{r^4 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r \sin \theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (a_b \sin \theta) + r \frac{\partial a_b}{\partial w} \right].$ 4436. a) 0, b) 0. 4436.1. rol a (M) = $-\frac{5}{4}I - J + \frac{5}{2}k$, [rol a (M)] = $\frac{1}{4}\sqrt{141}$. $\cos \alpha = \frac{-5}{V[14]}$, $\cos \beta = \frac{-4}{V[14]}$, $\cos \gamma = \frac{10}{V[14]}$, 4437. 2) $\frac{P(r)}{r}[r \times c]$; b) $2f(r)c + \frac{f''(r)}{r}[c(r \cdot r) - r(c \cdot r)],$ 4439. a) 0; b) 0. 4440. $rot v = 2\omega$. 4440.1 rol $a = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_q) - \frac{\partial a_r}{\partial \Phi} \right] k$, donde $a_{\varphi} \neq a_r$ son las proyecciones. del vector a sobre las curvas coordenadas respectivas r = const y $\phi = const$. 4440.2. a) rol $a = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial w} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)e_o + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_z) - \frac{\partial a_r}{\partial w}\right]e_z$ donde $a_r = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi$, $a_{\varphi} = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi$, $a_z = a_z$; b) tot a = $=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(a_{x}\sin\theta)-\frac{\partial a_{y}}{\partial\omega}\right]e_{r}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial a_{y}}{\partial\omega}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_{y})\right]e_{z}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_{y})-\frac{\partial}{\partial r}(ra_{y})\right]e_{z}$ $-\frac{\partial a_i}{\partial t}\Big]e_{\psi}, \text{ donde } a_i = a_x \cos \psi \sin \theta + a_y \sin \phi \sin \theta + a_z \cos \theta, \ a_{\psi} = a_z \cos \psi \cos \theta + \frac{1}{2}$ $+a_y\sin \phi\cos \phi-a_x\sin \phi$, $a_\phi=-a_x\sin \phi+a_y\cos \phi$. 4441. a) D. b) πh^{2} . 4442, a) 0, b) 0. 4443, π . 4444. $\frac{3\pi}{8}$, 4445. 0. 4445.1, $\frac{\pi}{5}$. 4447. $4\pi m$. 4449. $\sum_{i=1}^{n} e_{i}$ 4450. $\omega_{i} \frac{\partial u}{\partial i} = \text{div } (k \text{ grad } u)$, donde c es la capacidad calorifica especifica y p es la densidad del cuerpo.

4452, $2\pi^2b^2$. 4452.1. $8\frac{20}{21} \cdot \ln 2$. 4452.2. $\frac{3}{4}(3+e^a-12e^{-a})$. 4453. $\int_{A}^{B} I(t) t dt$.

4454. a) 2π ; b) 2π . 4455. a) $\Gamma = 0$; b) $\Gamma = 2\pi n$, donde n estel número de vueltas del circuito C en torno del eje Oz. 4455.1. tol a(M) = -J - 2h. $\Gamma = -\pi (\cos \beta + 2 \cos \gamma) e^a$. 4456. $Q = \int_{S}^{S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy$. $\Gamma = \iint_{S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy$. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$. $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$. 4457. u = xyz (x + y + z) + C.

4457.1. $\frac{1}{3}$. 4453. $u = \frac{m}{t}$. 4459. $u(x, y, z) = \sum_{l=1}^{n} \frac{m_l}{t_l}$, donde r_l es la distancia del punto variable M(x, y, z) al punto M_l $\{l = 1, 2, ..., n\}$.

4660. $u(x, y, z) = \int_{r_0}^{\infty} t l(t) dt$, donde $t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

APENDICES

1. CONSTANTES IMPORTANTES

n=3,1410935556	em2.7182815285	At = 1g e = 0,43 1294 1819
1 = 0.31630996GR	$\frac{1}{e} = 0.367879441.2$	$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2,8025850930$
* = 1,50000(40)1	e==7,3590560089	1 radian = 57°17'44.508" ara 1== 0.01745 32935
V==1,7724538509	Ves-1,6487212707	art 1-= 0,01745 32526

II. TABLAS

Valores inversos, Raíces cuadráticos y cúbicas. Función exponencial

a	1 1	Va	1 ⁷ 10n	1/1	3/160	1 100H	ęħ	210	- 10	r-n
1224557190	1,603 3,550 3,550 3,550 3,550 3,500	1.00 1.41 1.73 2.00 2.24 2.65 2.65 3.00 3.16	3,16 4,47 5,50 7,07 7,77 8,45 10,00	1.00 1.25 1.45 1.59 1.71 1.62 1.91 2.00 2.05	2.711 2.112 3.448 3.50 3.45 4.64	4.5597.43.55 6.537.43.55 6.77.85.52.60 10.00	2,315 2,35 20,69 20,69 145,41 403,4 103,6 3,951 5103 27035	1,105 1,221 1,350 1,492 1,522 2,226 2,460 2,715	0.819 0.819 0.819 0.654 0.654 0.549 0.406	0.255 0.135 0.0493 0.00143 0.00143 0.00143 0.4510- 9.12-10- 3.35-10- 1.23-10- 4.54-10-

2. Mantisas de los logaritmos decimales

Λ.	0	1	2	3	4	5	6	7	1	ä
100000000000000000000000000000000000000	-50 501 577 509 577 509 577 509 577 509 577 509 577 509 577 509 577 509 577 577 577 577 577 577 577 577 577 57	000 011 322 491 613 708 785 851 959	301 679 342 505 623 716 792 857 914	477 114 362 519 653 724 799 519 919 868	502 353 533 533 543 732 643 732 643 732 869 973	62794430 5450 5440	775 1045 1045 1045 1045 1045 1045 1045 104	\$45 230 450 450 575 672 755 586 987	203 275 457 550 661 553 553 564 661	954 279 453 591 650 771 839 898

3. Logaritmos naturales

N	6	1	2	3	4	5	10	2	- 1	- 90
0 1 h 2 h 3 h 3 h 5	-90 2,303 2,596 3,401 3,669 1,912 4,094 4,282 4,500 4,605	4,263 4,394 4,511	4,522	3.761 3.970 4.143 4.290 4.419 4.533	1,386 2,639 3,178 3,526 3,784 3,989 4,159 4,431 4,431 4,543 4,543	1.609 2.708 3.219 3.555 3.867 4.607 4.174 4.348 4.443 4.554 4.654	1.792 2.775 3.258 3.584 3.584 5.625 4.100 6.331 4.454 4.563	1,949 2,453 3,250 3,611 4,043 4,043 4,205 4,344 4,460 4,575 4,673	4.585	2,104 2,04 3,06 3,06 6,07 4,27 4,27 4,27 4,27

Logaritmos naturales de 10^{±n}

п	+	74 1	n.	+	- 1	12	7	
1 2	2,3026 4,6052	3,6974 5,3948	3 4	6,9078 0,2105	7,6972	5	11,6129	12.407

4. Funciones hiperbólicas

k	sh x	ejt x	thx	X	sh x	ch =	th a
0 1 2 3 4 5 5 6 6 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 201 0 201 0 201 0 305 0 4521 0 637 0 7558 1 927 1 175 1 309 1 608 2 129	1 005 1 075 1 075 1 075 1 175 1 175	0 0.197 0.291 0.389 0.462 0.537 0.664 0.710 0.634 0.834 0.885 0.885	67550 -2575 67500	2,376 2,544 2,544 2,266 3,027 4,457 4,956 6,69 6,193 10,013	2.576 5.207 3.418 2.5207 3.418 2.5207 3.418 2.5207 4.508 7.672 5.577 5.572 9.115 9.115 9.115 9.115	0,522 0,535 8,947 8,947 8,946 0,947 0,950 0,950 0,960 0,00 0,0

Para x > 3, con un error menor que 0,05, se tiene in $x = ch \times \pi + \frac{1}{2} e^{x}$.

5. La función factorial y funciones relacionadas con la misma

n I	n)	(2=-1)31	(2n)		1,5		1.(2n - 1)0			11(24)()	
1234567	24 120 720 5 040 40 520 362 860 325 800	10 395 10 395 10 395 10 395 2 977 025 34 450 425 [654 729 075]	645	840 080 120	10.000 0	33 333 38 859 98 413 24 803	0.066	666 523 058 096 007	333 667 810 201 200 400 493	0,000	004 18 260 41 021 71 001 55 000 00

6. Funciones trigonométricas

a°	α = arc α° (radianes)	2122 4	(ga	tigu	tas o		
0 12345 67890 1111115 0 12345 0 1 199 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	8 6.017 0.055 0.057 0.057 0.152 0.157 0.152 0.207 0.157 0.152 0.207	6.017 6.017 6.017 6.027 6.027 6.027 6.122 6.	0 0 17 0 0 15 0 0 0 17	29 44 50 0 5 14 6 5 14	1.000000000000000000000000000000000000	1	9 57 55 4 72 1 0 9 57 5 5 4 72 1 0 9 57 6 5 4 7 2 7 7 9 57 6 5 5 5 7 5 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7
		cos 2	rtgs	lg s.	sina	(radianes)	a

7. Función Gamma

4	1,0	1,4	1,2	1,3	1,3	1,5	1,5	1,7	1,5	1,9	2,0
P(A)	1,000	0,951	0,918	0,897	0,887	0,526	0.894	0,609	0.931	0,962	1.000

Para x > 0, min $\Gamma(x) = \Gamma(1,4616) = 0,8856$.

OTRAS OBRAS AFINES

publicadas por

THOMSON

ÁLGEBRA, Teoria y ejercicios. Garcia Ruiz Sáiz.



La experiencia docente de los autores de esta publicación les ha llevado a crear un texto que pueda ser de suma utilidad para un gran número de estudiantes que necesitan aprender Algebra, dentro de las variadas disciplinas de estudios universitarios y comprender al mismo tiempo todos los principlos sobre los que se asienta esta interesante teoria.

En su conjunto, es una base muy completa de Algebra lineal dentro de una estructura juiciosemente planeada, simplificando al máximo les explicaciones taóricas para extenderse en una serie muy completa de ejercicios illustrativos de los conceptos algebraicos, conforme estos se van desarrollando. Es una obra recomendable para cuantos se inician en el estudio del álgebra, y resuelve desde un principio los escollos del estudiante de la materia.

ANÁLISIS NUMÉRICO. Más de 300 ejercicios resueitos y comentados. E Garcia Merayo I A. Nevot Luna.

El nivel requerido en este libro se limita al propio de un primer ciclo de Universidad. Se completa el desarrollo con un repaso teórico a guisa de introducción en cada capítulo, como excelente base para llevar a cabo las prácticas propuestas. Valiosa recoplación de ejercicios resueltos y comentados referidos al análisis numésico.

